GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1941

SIBIIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică".
2. Membrii decedaţi.
3. Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică".
4. Raport pentru decernarea premiului „General Sc. Panaitescu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 1 — 2.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 305.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2250, 2953, 4452, 4639, 4675, 5125, 5214, 5259, 5308, 5328, 5350, 5414, 5417, 5480.
10. Exerciţii: 1 — 2.
11. Probleme propuse: 5542 — 5556.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **55**42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARĂ

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XLVII

15 SEPTEMVRIE 1941 — 15 AUGUST 1942

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1941

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ”

DELEGAȚIUNEA SOCIETĂȚII PENTRU ANUL 1941 *)

GABRIELA ȚIȚEICA, C-DOR-ING. I. LINTEȘ, AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII „GAZETA MATEMATICĂ“

GENERAL GH. BUICLIU și I. IONESCU. Membri delegați pentru: cereri, diverse și suplimente.

O. N. ȚINO ajutat de GH. TH. GHEORGHIU și C. IONESCU-BUJOR. Raportori.

CPT. C. IONESCU-ȚIU, R. ȚIȚEICA, Ș. ȚIȚEICA. Membri delegați pentru: schimburi de reviste și primirea lor, reclamațiuni privitoare la tipărire, primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.

GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.

G. G. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, C. IONESCU-BUJOR, CPT. C. IONESCU-ȚIU, N. N. MIHĂILEANU, AL. PANTAZI și F. PĂSĂRICĂ. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.

GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, M. GHERMĂNESCU, COMANDOR I. LINTEȘ, O. N. ȚINO și COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică.

E. ARGHIRIADE, D. BARBILIAN, P. BENEȘ, GH. DUMITRESCU, ADRIAN GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, AL. ROȘU și G. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru geometrie.

I. S. ANTONIU, M. BOTEZ, GH. TH. GHEORGHIU, VIRGIL GHIȚESCU, CPT. C. IONESCU-ȚIU, GENERAL GH. LITEANU, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru trigonometrie.

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri și un cassier (Art. 14 din Statute).

TH. ANGHELUȚĂ, P. BENEȘ, G. G. CONSTANTINESCU, OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, CPT. C. IONESCU-ȚIU, H. P. IONESCU, AL. ROȘU, O. N. ȚINO și Ș. ȚIȚEICA. Membri delegați pentru algebra elementară.

I. ALEXIU, P. BENEȘ, M. BOTEZ, I. CHIȚULESCU, GH. DUMITRESCU, AL. NICULESCU și GH. D. SIMIONESCU. Membri delegați pentru geometrie descriptivă.

I. S. ANTONIU, EM. BOTEA, GH. D. SIMIONESCU, AL. STOENESCU, C. C. TEODORESCU și GABRIELA ȚIȚEICA. Membri delegați pentru mecanică.

GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, CPT. M. FOCȘENEANU, GH. TH. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR, N. N. MIHĂILEANU, AL. NICULESCU, O. N. ȚINO și Ș. ȚIȚEICA. Membri delegați pentru geometria analitică.

G. G. CONSTANTINESCU, C. IONESCU-BUJOR și AL. STOENESCU. Membri delegați pentru cosmografie.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUȚĂ, D. V. IONESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, AL. PANTAZI, TIB. POPOVICI, O. N. ȚINO și P. SERGESCU. Membri delegați pentru articole și note de matematici superioare.

N. ABRAMESCU, I. IONESCU, V. MARIAN și P. SERGESCU. Membri delegați pentru istoria matematicilor.

I. IONESCU, O. ONICESCU, P. SERGESCU și GH. ZAPAN. Membri delegați pentru filosofia matematicei.

N. ABRAMESCU, TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, D. V. IONESCU, TIB. POPOVICIU, P. SERGESCU și O. N. ȚINO. Membri delegați pentru probleme propuse de matematici superioare.

O. N. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.

I. ALEXIU, GH. DUMITRESCU, V. GHIȚESCU, C. IONESCU-BUJOR, CPT. C. IONESCU-ȚIU, N. N. MIHĂILEANU și AL. NICULESCU. Membri delegați pentru exerciții.

P. BENEȘ, GH. TH. GHEORGHIU, P. SERGESCU, GABRIELA ȚIȚEICA, Ș. ȚIȚEICA și CD. GR. ZAPAN. Membri delegați pentru chestiuni de examen.

GENERAL GH. BUICLIU și C. IONESCU-BUJOR. Membri delegați pentru alcătuirea tablei de materii.

C. IONESCU-BUJOR, CPT. C. IONESCU-ȚIU, AL. ROȘU, GH. D. SIMIONESCU și R. ȚIȚEICA. Membri delegați pentru cercetarea prealabilă a soluțiilor pentru întocmirea copertei.

CPT. C. IONESCU-ȚIU. Bibliotecar.

I. BUȘILĂ și AL. AL. ROȘU. Membri delegați pentru chestiuni fiscale.

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici. — Str. Matei Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU NICOLAE Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe Timişoara. — Str. Mocioni, 10. Timişoara.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1937, Aug. 27	ALDEA N. N. Licenţiat în Matematici. — Str. Matei Voevod, 65. Bucureşti 4.
5	1938, Febr. 17	ALEXIU IULIAN. Inginer constructor. Licenţiat în Ştiinţe Matematice. — Inginer în Direcţiunea de poduri. Lucrări noui, Studii şi Construcţii. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Mihail Cornea 41. Bucureşti 2.
6	1940, Aug. 28	ANDONIE GH. Inginer de mine. — Directorul minelor. Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Braziliei, 18. Bucureşti 3.
7	1940, Febr. 8	ANDRONESCU PLAUTIUS. Doctor-Inginer. — Profesor, Politehnica Timişoara. — Str. Sevastopol, 30. Bucureşti 2.
8	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe a Universităţii „Regele Ferdinand I". — Str. Eugen de Savoya, 9. Timişoara.
9	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer Inspector General. — Membru în Consiliul Technic Superior. Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P — Str. C. Dissescu, 17. Bucureşti 2.
10	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer electrician, Diplomat al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi de Electricitate din Bucureşti. — Str. Aviator Th. Iliescu, 28. Tel. 29437. Bucureşti 3.
11	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Doctor în Matematici. — Profesor la Colegiul Naţional Sft. Sava. — Str. Banu Manta 77. Bucureşti.
12	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic Cluj. Profesor la Liceul Gh. Barţiu Cluj.
13	1941, Iunie 5	AVRAMESCU AUREL. Doctor-Inginer electrician dela Politehnica din Dresda. — Şef Serv. Studii Soc. G-lă Gaz şi Electricitate. Asistent la Politehnică. Bucureşti.
14	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Subdirector în Direcţiunea Generală a Drumurilor. — Str. Barbu Delavrancea, 51. Bucureşti 2.
15	1940, Febr. 8	BĂDĂRĂU EUGEN. Doctor în Fizică. Profesor universitar. — Str. Academiei, 14. Et. II. Bucureşti.
16	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele, — Director tehnic al Societăţii Comunale a Tramvaelor Bucureşti. — Şoseaua Jianu, 38. Bucureşti.

*) Data admiterii.

17	1936, Febr. 27	BĂDESCU RADU. Doctor în Matematici şi Docent al Universităţii din Geneva. — Profesor agregat la Facultatea de Ştiinţe, Universitatea din Cluj.
18	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Mayo 560. Republica Argentina.
19	1940, Aug. 38	BĂLAN G. ŞTEFAN. Inginer Constructor, Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. G-l Berthelot, 80. Bucureşti 2.
20	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Carol Davila, 8. Bucureşti 6.
21	1940, Febr. 8	BENEŞ PAUL. Licenţiat în Matematici. — Profesor Secundar. Bibliotecar la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. — Str. Vaporul lui Asan, 13. Bucureşti.
22	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Director General al Societăţii „Uzinele Chimice Române". — Str. Basarabia, 49. Bucureşti 2.
23	1938, Febr. 17	BOTEA G. EMIL. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Secţia construcţii. — Subşef de serviciu în Administraţia Comercială a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Aleea Alexandru, 11. Bucureşti.
24	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor Liceul „Petre Rareş" din Piatra-Neamţ. — Str. I. Gh. Duca, 15. Piatra-Neamţ.
25	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer. — Str. Viitorului 22. Bucureşti 3.
26	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Str. Ing. Pandele Ţărăşanu, 7. Bucureşti 2.
27	1935, Noem. 7	BUCURESCU I. Cpt. Licenţiat în Matematici. — Absolvent al Secţiei de Radio-Comunicaţii dela Şcoala Politehnică Bucureşti. — Str. Aviator Iliescu, 31. Bucureşti 3.
28	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer. Profesor la Politechnica din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Washington, 32. Bucureşti 3.
29	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General/r. din Artilerie. — Fost Secretar general la Ministerul Apărării Naţionale. Însărcinat cu conferinţe la Politehnica din Bucureşti. — Str. M. Cogălniceanu, 10. Bucureşti 2.
30	1938, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer Inspector General. Directorul Podurilor C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
31	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Fost Secretar general la Ministerul Lucrărilor publice şi Comunicaţiilor — Str. Armenească, 17 bis. Bucureşti 1.
32	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Lt.-Col. de Artilerie. Absolvent al Şcoalei de Artilerie antiaeriană din Metz (Franţa). Brevetat de Stat Major al Şcoalei Superioare de Războiu din Paris. — Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Franzelari, 19. Bucureşti.
33	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer Inspector General. Director C. F. R. — Str. Lăzureanu, 48. Bucureşti 6.

34	1939, Aug. 31	BURILEANU ŞTEFAN. General. Licenţiat şi Doctor în Matematici dela Paris. Profesor Universitar onorar, Profesor de metalurgie. — Consilier general tehnic al Uzinelor şi Oţelăriilor Malaxa. — Str. General Berthelot, 95 Bucureşti 2.
35	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noui C. F. R. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
36	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
37	1921, Mai 4	BUŞILĂ G. IOAN. Inginer Inspector General. — Membru în delegaţia Consiliului Tehnic-Superior.—Str. Dr. Lueger, 8 bis. Bucureşti 1.
38	1926, Iulie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer-Şef. — Directorul Întreţinerii din Direcţiunea Generală a Drumurilor. Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. — Str. Simonide, 3 Bucureşti 1.
39	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General.—Str. Vasile Lupu, 24. Bucureşti 2.
40	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Inginer, Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Administrator-delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
41	1936, Noem. 7	CARAFOLI ELIE. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat şi Doctor în Ştiinţe dela Sorbona. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 42. Bucureşti 2.
42	1920, Mart. 1	CARAMAN ERMIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „V. Alecsandri" din Galaţi, fost prefect şi deputat de Covurlui. — Str. Domnească, 170 A. Galaţi.
43	1936, Febr. 27	CARTIANU GH. Inginer. — Asistent la Politehnica din Bucureşti. Antreprenor. — Str. Popa Tatu, 81. Bucureşti 2.
44	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Colonel de Artilerie. — Comandantul Reg. 40 Artilerie Tg.-Mureş.
45	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Str. G-ral Angelescu, 44. Bucureşti 2.
46	1939, Aug. 31	CAZANACLI V. PETRE. Licenţiat în Matematici.—Profesor titular.
47	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Regia Autonomă C. F. R. — Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
48	1914, Dec. 20	CHIRIŢUŢĂ A. Inginer Inspector General. Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Oţetari, 8. Bucureşti 1.
49	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer-Şef.—Director în Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor. — Str. Iancu Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
50	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer.—Administrator Industrial. Antreprenor de lucrări publice şi particulare. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.

51	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris. Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Politehnica din Bucureşti. Str. Buzeşti, 98. Bucureşti 2.
52	1940, Febr. 8	CIORAPCIU F. MIRCEA. Inginer Constructor. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Ţepeş Vodă, 34. Bucureşti 4.
53	1939, Dec. 7	CLAUDIAN VIRGIL. Licenţiat în Matematici. Profesor la Liceul Mihai Viteazu Bucureşti.—Str. Lt. Radu Robescu, 24. Bucureşti.
54	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GEORGE. Inginer diplomat. — Administrator delegat al Soc. „Sarotec" S. A. R. — Str. B. Mussolini, 22. Bucureşti 3.
55	1938, Aug. 31	CONSTANTINESCU G. G. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Str. Aquila, 10. Bucureşti 6.
56	1895,Sept.15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Fost Ministru. — Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
57	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer, Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Conducătorul Imprimeriei C. F. R. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Gara Filaret.
58	1936, Febr. 27	COŞEREANU ION. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — Inginer în Biroul studii Avioane al Uzinei I. A. R. din Braşov. — Fabrica de Avioane I. A. R. — Str. Mihail Eminescu, 17. Braşov.
59	1941, Febr. 20	COSTĂCHESCU V. CONSTANTIN. Căpitan. — Comandantul Submarinului „Delfinul". Profesor la Şcoala Navală. — Nava bază Constanţa.
60	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer. — Director General Soc. „Letea". — Fabrica „Letea", Bacău.
61	1939, Dec. 7	CRĂCIUNEANU CONST. Căpitan. — B-dul Mărăşti, 47, Bucureşti 2.
62	1936, Aug. 25	DĂSCĂLESCU HR. Licenţiat în Matematici. — Profesor.—Str. Cuza Vodă, 58. Focşani.
63	1941, Iunie 5	DINESCU P. ALEX. TUDOR. Inginer Constructor. Asistent suplimentar la Şcoala Politehnică Bucureşti. — Şef de Secţie la R. A. C. F. R. — Str. Eufrosina Poteca, 5. Bucureşti.
64	1939, Febr. 23	DOBRESCU ANDREI. Licenţiat în Matematici. — Profesor de matematici la Liceul industrial de construcţii civile şi edilitare din Bucureşti.
65	1939, Aug. 31	DONCIU NICOLAE. Licenţiat în Matematici.—Profesor Liceul militar Târgovişte. — Str. Heliade Rădulescu, 35. Târgovişte.
66	1939, Dec. 7	DRAGOMIRESCU-BUZNE EDUARD. Căpitan de Artilerie, brevetat de Stat Major, Profesor de Construcţii de guri de foc şi muniţiuni la şcoalele pregătitoare şi de aplicaţie de Artilerie. — Str. General Anghelescu, 159. Bucureşti.
67	1936, Febr. 27	DROSESCU GH. ION. Inginer mecanic. — Director al Uzinelor Astra şi Union. — Str. Belgrad, 2. Bucureşti 3.

*) Data fondării revistei *„Gazeta Matematică"*. Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

68	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef. — Inspector tehnic C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 22. Craiova,
69	1922, Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematici. — Profesor Colegiul Naţional Sf. Sava Bucureşti. Director general al învăţământului profesional din Ministerul Culturii Naţionale. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 6.
70	1936, Febr. 27	DUMITRESCU C. I. Inginer Electromecanic dela S. P. B. — Asistent la „Rezistenţa Materialelor" la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer la Direcţiunea Economatului C. F. R. — Str. Cuza Vodă, 94. Bucureşti 2.
71	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Şos. Ştefan cel Mare, 218. Bucureşti 1.
72	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer constructor. — Inginer în Direcţia de Poduri C. F. R. Asistent la Politehnica Bucureşti. — Parcul lancului II, Str. F, 26. Bucureşti 4.
73	1938, Febr. 17	FLORIAN ZAHARIA. Licenţiat în Matematici. — Profesor Actuar expert. — Profesor. Director la Societatea de Asigurare „Naţionala". — B-dul Elisabeta, 95 bis A. Bucureşti.
74	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Brevetat de Stat Major. — Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Porumbaru, 33. Bucureşti 3.
75	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19. Bucureşti 1.
76	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer — Fost Secretar General al Ministerului de Lucrări Publice şi Comunicaţii. Profesor la Şcoala Superioară de Războiu. — Str. Wilson, 13, Etaj II, apart. 7. Bucureşti 1.
77	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General. — Str. Gh. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
78	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. NICOLAE. Inginer Inspector General — Director C. A. M. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
79	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului de Statistică dela Universitatea din Paris. — Director în Ministerul Economiei Naţionale. Profesor la Şcoala de Statistică. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
80	1939, Dec. 7	GEORGESCU-ROEGEN OTILIA. Licenţiată în Matematici. Profesoară secundară. — Str. Bitolia, 5. Bucureşti 3.
81	1934, Dec. 19	GEORGESCU VAL. N. ION. Căpitan de Artilerie. Inginer Electro-Mecanic. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Timişoara. — M. I. A. Dir. Tehnică. — Str. Bitolia, 28. Bucureşti 3.
82	1938, Aug. 31	GHEORGHIEŞ AL. General de Artilerie.
83	1936, Febr. 27	GHEORGHIU C. ADR. Licenţiat în Matematici. Arhitect. — Str. G-ral Magheru, 209. Bucureşti 2.
84	1941, Iulie 5	GHEORGHIU ALEXANDRU. — Inginer constructor. — Directorul Soc. Anonime de Mine de granit, din Poeni. Asistent la Şcoala Politehnică. — Calea Victoriei 128. Bucureşti.

85	1932, Apr. 20	GHEORGHIU TH. GH. Doctor în Matematici. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Vatra Luminoasă, 55. Bucureşti 4.
86	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Lahovary, 3. Bucureşti 3.
87	1913, Aug. 30	GHEORGHIU A. MIRCEA. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Subdirectorul Navigaţiei Fluviale Române. — Str. Aviator Iliescu, 44. Bucureşti 3.
88	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în matematici. Diplomat al Institutului de Statistică al Universităţii din Paris. — Directorul Statisticei financiare — Str. Berzei 5. Bucureşti 1.
89	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică Timişoara.
90	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. AL. Lt.-Col. Inginer Radio-electrician. E. S. E. — Str. Chişinău, 12. Bucureşti 2. Telefon 5-4547.
91	1939, Febr. 23	GHIRCOIAŞU V. N. Licenţiat în Matematici. Asistent suplinitor Seminarul de Algebră superioară. — Facultatea de Ştiinţe. Timişoara.
92	1936, Aug. 25	GHIŞOIU I. PETRE. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice, din Bucureşti. — Inginer în Direcţiunea Comercială a Soc. Uzinelor de fier şi domeniilor din Reşiţa S. A. — Str. Răspântiilor, 17. Bucureşti 3.
93	1939. Dec. 7	GHERMANI DIONISIE. Inginer, Profesor. — Decan al Facultăţii de Construcţii din Politehnica din Bucureşti — Preşedintele Comitetului de Direcţie P. C. A. Adm. Delegat la Soc. Edilitatea şi la Soc. Govora-Călimăneşti. — Str. Paris, 45 Bucureşti.
94	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Dr. Ioan Meşotă" din Braşov. — Str. Dorobanţilor, 5. Braşov.
95	1941, Iunie 5	GORCIU GH. VASILE. Licenţiat în Matematici. — Asistent suplinitor la Şcoala Politehnică. — Str. Carol 110. Bucureşti.
96	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
97	1936, Febr. 27	GUŢU I. AL. Inginer. — Inginer la Societatea Petroşani. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Sevastopol, 11 C. Bucureşti 2.
98	1941, Iunie 5	GUŢU ION. Inginer constructor. — Inginer în Direcţia Podurilor C. F. R. — Str. Vişinilor, 2. Bucureşti 4.
99	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer — Director C. A. M. — Cartierul C. A. M. Filaret. Str. B, 12. Bucureşti 6.
100	1927, Ian. 28	HANGANU M. D. Doctor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris. — Director la C. A. M. Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
101	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Şeful serviciului M. II Mărfuri din Direcţia Mişcării C. F. R. — Str. Petre Poni, 7. Bucureşti 2.

102	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret, Bucureşti 6.
103	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer S. P. S. Licenţiat în Matematici. Paris. — Profesor onorar la Şcoala Politehnică din Bucureşti.— Pensionar. Str. Buzeşti, 74. Bucureşti 2.
104	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer. — Şcoala Politehnică Bucureşti — Str. Buzeşti, 74. Bucureşti 2.
105	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
106	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.— Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.
107	1936, Febr. 27	IONESCU P. HARALAMBIE. Licenţiat în Matematici.— Str. Agricultori, 15. Ap. 13. Bucureşti.
108	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU ION. Pensionar. Profesor onorific al Şcoalei Politehnice. Inginer Inspector General. — Decanul Colegiului Inginerilor. Membru Corespondent al Academiei Române. — Str. Răsuri, 25, Bucureşti 3.
109	1941, Febr. 20	IONESCU I. PAUL. Profesor titular. Liceul comercial Gh. Chiţu. Inspector general în M. Ed. N. — Str. Unirii 114. Craiova.
110	1939, Febr. 23	IONESCU TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Inspector şcolar. — Str. Sandu Aldea, 35. Bucureşti 2.
111	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR CONSTANTIN. Licenţiat în Matematici.— Profesor Liceul internat „Barbu Ştirbei" Buftea.—Str. Precupeţii Vechi, 40. Bucureşti 3.
112	1936, Febr. 27	IONESCU-ŢIU D. C. Cpt. din Geniu, Licenţiat în Matematici. — Profesor de matematici la Şcoala pregătitoare de ofiţeri de geniu.— Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.
113	1932, Apr. 20	IONESCU ZANE D. GH. Inginer ordinar clasa I. Secţia Mine şi Metalurgie. Şcoala Politehnică Bucureşti. — Subdirector clasa I în Regia publică comercială Monetăria Naţională. — Str. Fabrica de Chibrituri, 34. Bucureşti.
114	1936, Febr. 27	ISTRATI CONSTANTIN. Lt.-Comandor-Inginer, Diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Preşedintele Comisiei Militare M. Aerului şi Marinei în Uzinele I. A. R. din Braşov. Bd. Pache, 107. Bucureşti.
115	1924, Ian. 30	KAUFMAN NORBERT. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer-Consilier în Direcţiunea Generală C. F. R. — Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
116	1936, Febr. 27	LAMOTH PETRU. Licenţiat în Fizico-Matematici. — Profesor la Liceul „Banaţia". — Piaţa Tebec, 2. Timişoara.
117	1939, Febr. 23	LASCU BAL. Licenţiat în Matematici. — Str. Avram Iancu, 17. Cluj.
118	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Inginer-Şef. — Director în Administraţia C. A. M. Asistent la Şcoala Politehnică. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.

119	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Bul. Regele Albert, 35. Bucureşti
120	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Comandor. Doctor-Inginer. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Comisar General-ajutor pentru Industriile de metalurgie şi armament. — Str. Zoe Râmniceanu, 10 B. Bucureşti.
121	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. General de artilerie, pensionat. — Str. Spătarului, 54. Telefon 2-0940. Bucureşti 1.
122	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici.—Profesor secundar.— Liceul Militar „D. A. Sturdza". Craiova.
123	1934, Dec. 19	MALAXA C. ELENA. Licenţiată în Matematici şi Fizico-Chimice. — Profesoară de Matematici şi Directoarea Şcoalei Centrale de fete din Bucureşti. — Str. General Lahovary, 3. Bucureşti.
124	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. — Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
125	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
126	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Str. I. G. Duca, 60. Bucureşti.
127	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Musolini, 27. Bucureşti 3.
128	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei, 80. Vila 26. Bucureşti 6.
129	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef.— Direcţia Generală a Drumurilor. — Intrarea Geneva, 6. Bucureşti 3.
130	1940, Dec. 7	MARIAN VICTOR. Doctor în Fizică. Licenţiat în Fizico-Matematici. Asistent la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. — Bul. Diaconovici Loga, 1 A. — Timişoara.
131	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
132	1939, Aug. 31	MEREUŢĂ EM. Licenţiat în Matematici.—Str. Vatra Luminoasă, 89. Bucureşti.
133	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Întreţinere C. F. R. — Str. Dan Vodă, 3. Bucureşti 2.
134	1939, Dec. 7	MICLESCU ANDREI. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Fizico-chimice, brevetat al Şcoalei de Război din Paris. Profesor de matematici la diferite şcoli militare.—Str. Delea Veche, 15 bis. Bucureşti.
135	1935, Noem. 5	MIHĂILEANU N. N. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Seminarul Monahal Cernica. — Str. Vulturilor, 63. Bucureşti.
136	1921, Febr. 5	MIHALOPOL C. Inginer Inspector General. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.

137	1939, Dec. 7	MIHOC GHEORGHE. Doctor în Matematici. Asistent la Facultatea de Ştiinţe Bucureşti. Director în Casa Centrală a Asigurărilor Sociale. — Str. Agricultori, 83. Bucureşti.
138	1939, Aug. 31	MIHU CERCHEZ. Licenţiat în Matematici.—Str. Rozelor 9. Bucureşti.
139	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer.—Inginer-Şef la Societatea „Concordia".— Gura Ocniţei. Jud. Dâmboviţa.
140	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „N. Bălcescu" din Brăila. — Str. Galaţi, 71. Brăila.
141	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer Inspector General. — Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
142	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Inspector general. Licenţiat în Matematici.—Director Tehnic Casa Autonomă a Monopolurilor.— Piaţa Lahovary, 1 A. Bucureşti 3.
143	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer, — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. Ciprian Porumbescu, 11. Bucureşti.
144	1940, Febr. 8	MIU M. ION. Inginer Constructor. — Licenţiat în Matematici. Inginer la Direcţia Poduri C. F. R. — Gara de Nord, Bucureşti 2.
145	1939, Febr. 23	MORŢUN EMIL. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul „I. C. Brătianu", Piteşti.
146	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE. Inginer. — Director General S. T. B. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Roma, 59. Bucureşti 3.
147	1928, Aug. 29	NEGURĂ GR. ST. Licenţiat în Matematici dela facultatea de ştiinţe din Bucureşti. — Profesor definitiv la Liceul din Bârlad. — Str. Dobranici, 16. Bârlad.
148	1939, Aug. 25	NESTOR D-TRU. Inginer. — Str. V. Stoenescu, 10. Bucureşti.
149	1910, Mai 21	NICHIFOR A. GHEORGHE. Doctor în Ştiinţele Matematice (Specialitatea Geometria Descriptivă). — Profesor la Politehnica din Bucureşti. Facultatea de Arhitectură.—Str. Sfinţilor, 8. Bucureşti.
150	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Şcoala Politehnică Timişoara.
151	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-Industrial, Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti 1923. — Directorul tehnic al Societăţii „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
152	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcţiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Ecoului, 85. Bucureşti 6.
153	1934, Dec. 19	NICOLESCU IOAN RADU. Comandor (r) de Marină. Secretar General Uzinele Malaxa.—Piaţa Washington, Etaj III. Bucureşti.
154	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematici.—Profesor la Liceul „Mihail Eminescu" din Bucureşti.—Str. Sabinelor, 119. Bucureşti 6.
155	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef.—Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Londra, 35. Bucureşti 2.
156	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cernăuţi.—Str. Paris, 14. Bucureşti 3.

157	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Director al Institutului Superior de Educaţie Fizică. Director al Şcoalei de Statistică. — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.
158	1927, Ian. 28	ORĂNESCU OCTAVIAN. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti Secţia Electro-Mecanică. — Sub-Director la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2. Galaţi
159	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Cadastral Şcoala Politehnică. Inginer Hotarnic şi Operator Topometru. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar titular la Politehnica din Bucureşti la cursul de Construcţii Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfiinţii Voievozi, 9. Bucureşti 2.
160	1910, Mai 21	ORĂŞEANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor. — Directorul învăţământului secundar din Ministerul Culturii Naţionale. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
161	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici. Actuar-expert. Statistician-expert. — Profesor la Şcoala de Statistică. Asistent Universitar. Inspector actuar la Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Brezoianu, 38 bis. Bucureşti. (Telefon 3-4305).
162	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici. — Inginer C. F. R. — Str. Edgar Quinet, 5. Bucureşti 1. (Telefon 4-6329).
163	1939, Aug. 31	PĂSĂRICĂ FL. Licenţiat în Matematici.—Profesor particular. Şef de Serviciu în Direcţia Generală a Monitorului Oficial. — B-dul Elisabeta, 29. Bucureşti.
164	1939, Dec. 7	PAVEL DORIN. Doctor-Inginer. Profesor la Politehnica Bucureşti.— Str. Dr. Severeanu, 36. Bucureşti 6.
165	1941, Iunie 5	PERLEA G. DAN. Inginer C. F. R. — Str. Dr. Severeanu, 8. Bucureşti 6.
166	1939, Dec. 7	PERSU AUREL. Inginer. — Conferenţiar la Politehnica Bucureşti. Director General I. A. R. Braşov. — Calea Victoriei, 159. Bucureşti.
167	1939, Dec. 7	PETRESCU S. GHEORGHE. Doctor în Matematici. Asistent la Observatorul din Bucureşti. — Str. Tutunari, 28. Bucureşti 6.
168	1940, Aug. 28	PETRESCU PETRE. Lt.-Col. rez. din Artilerie. Director General al Armamentului din Soc. „Astra".—Str. Roma (Intrarea Roma, 6). Bucureşti.
169	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer.—Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D.—Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
170	1939, Dec. 7	POPESCU M. IOAN. Căpitan de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Ofiţer de Stat Major. Incadrează Statul Major al Aerului. — Profesor de Matematici la diferite Şcoli Militare din Bucureşti. — Str. Dr. C. Severeanu, 23. Bucureşti VI.

171	1935, Apr. 10	POPESCU VICTOR. Inginer Soc. Comunală a Tramvaelor Bucureşti. Asistent Politehnica Bucureşti — Str. Argentina, 44. Bucureşti 3.
172	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer electromecanic. Director al Fabricei de motoare de aviaţie I. A. R. — Str. N. Iorga, 14. Braşov.
173	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Matei Voevod, 75. Bucureşti 4.
174	1931, Mart. 11	POPP N. Lt.-Comandor. Inginer.—Subsecretariatul de Stat al Aerului. — Str. Alecu Russo, 7. Bucureşti.
175	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic Universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Str. Clucerului 10, Bucureşti.
176	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAI. Inginer-Antreprenor.—B-dul Basarab (Alee) 9. Bucureşti 2.
177	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. General de Artilerie.—Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
178	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici. Actuar expert. – Consilier Controlor la Inalta Curte de Conturi.—Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
179	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. General de Artilerie/r. — Str. Ana Davila. 25. Bucureşti 6.
180	1941, Iunie, 5	PROVINCEANU MIHAIL. Inginer electromecanic. Diplomat al Şc. Politehnice Bucureşti şi Şcoala Superioară de Electricitate Paris. — Inginer la Soc. de Gaz şi Electricitate. — Parcul Jianu. Str. Q, 24. Bucureşti.
181	1941, Febr. 20	RĂDULESCU I. MIRCEA. Inginer constructor. — Inginer. Inspecţia I. Poduri C. F. R. Bucureşti. — Str. Căp. Buruiană, 14. Bucureşti.
182	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Şef în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. Gr. Cantacuzino, 59. Bucureşti.
183	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. Doctor în Drept. Ştiinţele Politico-Economice.– Şef Controlor în Serviciul de Inspecţie al Ministerului de Finanţe.—Str. Inginer B. Giulini, 9. Bucureşti 6.
184	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer, Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti 1.
185	1941, Febr. 20	RUZVAN I. THEODOR. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. — Inginer C. F. R. — Bd. Traian Moşoiu, 11. Bucureşti 5.
186	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer.—Director Tehnic la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Cartierul C. A. M. Filaret. Str. B. 28. Bucureşti 6.
187	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic, Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor.— B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
188	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer constructor. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească".—Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.

189	1929, Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. — Direcţia de Studii a Căilor Ferate Române. Asistent la Politehnica din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
190	1938, Aug. 31	SAVIN C. I. Locotenent. Licenţiat în Matematici. — Str. Cotroceni, 13. Bucureşti 6.
191	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION Inginer-Mecanic-Electrician. — Director Technic P. T. T. — Str. Ştirbey-Vodă, 65. Bucureşti.
192	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR Inginer. — Inginer la Consiliul tehnic Superior. — Str. Eftimie Murgu, 6. Bucureşti 4.
193	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer de mine. Licenţiat în Matematici şi Drept.—Director tehnic la Societatea „Steaua Română".—Steaua Română-Câmpina.
194	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE· Doctor în Matematici. Licenţiat în Filosofie.— Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Milano, 12 Timişoara.
195	1921, Febr. 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General. — Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipiul Bucureşti. — Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti 2.
196	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Liceul de aplicaţie al Şcoalei Normale Superioare din Bucureşti. — B-dul Pache, 99. Corp. VI. Bucureşti.
197	1940, Aug. 28	SIMIONESCU MIRCEA. Inginer Constructor, Asistent la Politehnica din Bucureşti. Inginer la S. T. B. — Str. Varşovia, 2. Bucureşti.
198	1941, Iunie 5	ŞLEAHTENEA DUMITRU. Inginer constructor. Diplomat Şcoala Politechnică Bucureşti 928. — Soc. Comunală Locuinţe ieftine Bucureşti. — Parcul Iancului II. Str. Gabrielescu, 5. Bucureşti.
199	1910, Aug. 3	SMĂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General în Corpul Tehnic. Subdirector General în Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
200	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef.— Subdirector Direcţia de Studii C. F. R. — Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti 3.
201	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Matei Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
202	1938, Febr. 17	STAN AURELIAN. Căpitan de Artilerie· Licenţiat în Matematici. Absolvent al Şcoalei de Aplicaţie a Artileriei dela Fontainebleau (Franţa). — Str. Buzeşti, 10. Bucureşti 2.
203	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer. — Profesor Suplinitor la Politehnica din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de Telefoane. — Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
204	1941, Febr. 20	STANCU S. MARIN. Inginer constructor. Diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti. — Inginer C. F. R. — Staţia Ploeşti Triaj.
205	1941, Iunie 5	STANCU S. MIRCEA. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. Secţia Construcţii. — Inginer la Soc. Comunală de Locuinţe ieftine. Bucureşti. — Calea Şerban Vodă, 272. Bucureşti 5.
206	1941, Aug. 28	ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE. Sublocotenent din Geniu (Reg. 1 Transmisiuni). — Str. Popp de Băseşti, 52. Bucureşti.

207	1941, Iunie 5	ŞTEFĂNESCU-GOANGĂ AUREL. Inginer ord. clasa II, Politehnica Bucureşti, construcţii, Sublocotenent de rezervă A. C. A. — Inginer în Serviciul construcţiilor şi instalaţiilor C. A. M. Asistent pe lângă Catedra de Geometrie Descriptivă la Politehnica Bucureşti. — Parcul Iancului, Str. Lt. Ionescu Anton, 27. Bucureşti.
208	1939, Febr. 23	STOENESCU I. ALEXANDRU. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice Bucureşti. — Inginer în C. F. R. Direcţia Podurilor. — Str. Caragea Vodă, 21. Bucureşti 3.
209	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. — Directorul Societăţii de locuinţe ieftine Bucureşti. — Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
210	1936, Aug. 25	STOICESCU T. T. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Colegiul Naţional Predeal.
211	1941, Iunie 5	STOIKA VICTOR. Inginer Inspector General. — Preşedintele Consiliului de Administraţie C. F. R. — Str. Paris, 12. Bucureşti.
212	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General de rezervă. — Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.
213	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Licenţiat în Matematici, Inginer electromecanic. — Conferenţiar de Radio-Comunicaţii la Politehnica din Bucureşti — Director tehnic P. T. T. — Calea Victoriei, 68. Bucureşti.
214	1900, Noem. 1	TEODOREANU VASILE. Pensionar. — Str. Zlataust, 7. Iaşi.
215	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Profesor la Politehnica din Bucureşti. — Str. Arh. Blanc, 8. Bucureşti.
216	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General — Fost Ministru. — Str. Paris, 53. Bucureşti 1.
217	1937, Ian. 28	THEODORU HENRI. Inginer. — Profesor la Şcoala de Sub Ingineri. Conferenţiar la Politehnică, Antreprenor. — Str. Alex. Donici, 27. Bucureşti.
218	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin". — Str. Basarabia, 12. Bucureşti 1.
219	1940, Aug. 28	TULLEA C. GH. Inginer Inspector General Ministerul Economiei Naţionale. — Str. Aviator Theodor Iliescu, 69. Bucureşti.
220	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Politehnica din Timişoara. — Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
221	1939, Dec. 7	ŢINTEA M. ION Inginer la M. A. M. Profesor la Şcoala de Ofiţeri de Aviaţie. — Str. Leova, 42. Bucureşti.
222	1929. Oct 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Politehnica din Bucureşti. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
223	1939. Aug. 31	ŢIŢEICA RADU. Doctor în Fizică. Licenţiat în Matematici. Inginer. — Asistent la labor. Optică, Facultatea de ştiinţe. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti.
224	1941, Febr. 20	ŢIŢEICA ŞERBAN. Licenţiat în matematici, licenţiat în ştiinţe fizico-chimice, doctor în ştiinţe. — Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Str. Dionisie Lupu, 80. Bucureşti, 3. Tel. 2-8064.

225	1936, Febr. 27	TOMESCU ST. IOAN Inginer. — Intrarea Geneva, 4. Bucureşti.
226	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. Dr. Lister, 65. Bucureşti 6.
227	1935, Noem. 5	VÂLCOVICI VICTOR. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Profesor la Universitatea din Bucureşti. Membru corespondent al Academiei Române. — Str. Londra, 44. Bucureşti 3
228	1914, Dec. 20	VARDALA ION. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris. — Director General al Soc. A. R. „Banloc" pentru fabricaţiunea şi comercializarea cauciucului. — Str. Wilson, 13. Bucureşti 1.
229	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer Inspector General. — Profesor şi Subdirector al Liceului Industrial Nr. 1. — Str. Polizu, 5—7. Bucureşti 2.
230	1932, Mart. 26	VASILESCU GR. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti (1919). Doctor al Academiei de Inalte Studii Comerciale şi industriale din Bucureşti. — Profesor Politehnica din Bucureşti. Subdirector în Direcţia Generală a Porturilor şi a Căilor de Comunicaţie pe Apă. — B-dul Pache 120. Bucureşti.
231	1920, Ian. 10	VASILESCU C. I. Inginer-Şef. — Str. Aviator Ştefan Protopopescu, 36. Bucureşti 2.
232	1931, Apr. 20	VASILIU G. DAN. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Subdirector tehnic la Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — B-dul Tache Ionescu, 27. Bucureşti.
233	1940, Febr. 8	VASILESCU I. TEODOR. Inginer Constructor. — Str. Cobălcescu, 6. Bucureşti.
234	1941, Febr. 20	VASILIU C. EUGENIU. Inginer diplomat al fostei Şcoale Naţionale de Poduri şi Şosele. — Antreprenor de Lucrări publice şi particulare. — Str. Vornicul Mogoş, 6. Bucureşti 4.
235	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. Asistent supl. la Politehnica din Bucureşti. — Str. Transilvania, 35. Bucureşti 2.
236	1941, Febr. 20	VASILIU C. ION. Inginer constructor S. P. B. — Şeful secţiei L. 6 C. F. R. Gara Ploeşti.
237	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
238	1938, Febr. 17	VESCAN T. TEOFIL. Doctor în Ştiinţe fizice. Licenţiat în Matematici. — Profesor secundar. — Institutul de Fizică teoretică şi aplicată al Universităţii din Cluj.
239	1936, Febr. 27	VICIU A. A. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Militar din Tg.-Mureş.
240	1933, Febr. 22	WOINAROVSKY R. Licenţiat în Matematici. — Str. Manu Cavafu, 16, Bucureşti 6.

241	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU C. GRIGORE. Inginer, Diplomat S. N. P. S. 1920. Bucureşti şi E. S. A. Paris. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Administrator unic al fabricei de avioane Set. Industria naţională aeronautică. — Str Popa Lazăr 9—15. Bucureşti. Tel. 2—5074.
242	1941, Iunie 5	ZAMFIRESCU GH. ION. Căpitan de Artilerie. — Str. Maltopol, 17. Bucureşti.
243	1929, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie dela Universitatea din Berlin. — Conferenţiar la Facultatea de Litere şi Filosofie din Bucureşti.— Str. Victor Manu, 39. Bucureşti 4.
244	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Comandor. Inginer de Construcţii Aeronautice şi Mecanice (E. N. S. A. Paris).—Str. Pasteur, 44, Bucureşti 6 (Telefon 4-3929).
245	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich.— Antreprenor. — Bulevardul Elisabeta, 57. Bucureşti 2.

†

MEMBRII DECEDAŢI*)

	Data admiterii	Data morţii
1. ANGELESCU A.	1919 Septemvrie 12	1938 Apr. 6
2. BANCIU I.	1911 Februarie 20	1940 Sept. 16
3. BOTEA N.	1932 Aprilie 20	1937 Dec. 18
4. BRATU GH.	1920 August 15	1941
5. BUNGEŢIANU D. PREDUŢA	1938 Februarie 27	1940 August 21
6. FILIPESCU E. G.	1909 Iulie 1	1937 Noembrie 24
7. FUNDĂŢEANU C. I.	1928 Mai 9	1940 Sept. 23
8. PANAITESCU SC.	1914 Decemvrie 20	1938 Martie 22
9. PATRICIU G. TITUS	1911 Decemvrie 17	1937 Ian. 5
10. POPESCU I.	1922 August 31	1936 Sept. 20
11. ŢIŢEICA GH.	1895 Noemvrie 1	1939 Februarie 5

*) Aci sunt trecuţi în ordinea alfabetică numai redactorii şi membrii decedaţi în ultimii 7 ani şi cari au stat la „*Gazeta Matematică*“ până la sfârşitul vieţii lor.

PREMIILE, BURSELE ŞI PUBLICAŢIILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

Cer regulamentele ca şi tradiţiile noastre, ca la început de an să arătăm ce s'a realizat în anul din urmă şi ce disponibilităţi avem pentru realizările ce ne propunem în viitor.

Iată situaţia în legătură cu veniturile fondurilor speciale ale Soc. *Gazeta Matematică*, în cursul anului XLVI de apariţie a revistei şi prevederile pentru anul XLVII pe care-l începem.

I. **Premii.**

1. *Premiul anual de aritmetică*, în valoare de 5.000 lei, a fost acordat elevului D. D. BOIANGIU, după cum s'a arătat în Vol. XLVI la pag. 352.

2. *Premiul anual de geometrie elementară* „G. ŢIŢEICA“, în valoare de 5.000 lei, a fost acordat elevului IULIAN PETRESCU, în baza raportului publicat la pag. 574.

3. *Premiul anual de algebră*, în valoare de 5.000 lei, a fost dat elevului MIRCEA D. POPA. Raportul de premiare a fost publicat la pag. 466.

4. *Premiul anual de trigonometrie* „VASILE CRISTESCU“, în valoare de 5.000 lei, n'a fost atribuit nici anul acesta, din lipsă de lucrări de trigonometrie publicate în Vol. XLVI, după cum se vede la pag. 524.

5. *Premiul anual de mecanică sau astronomie*, „SP. HARET“, în valoare de 5.000 lei, nici el n'a fost acordat, din aceleaşi motive. Raportul Comisiunii se găseşte la pag. 634.

6. *Premiul anual de filosofia matematicilor* „VASILE CONTA“, în valoare de 4.000 lei, din lipsă de lucrări de această natură aduse la cunoştinţa Societăţii, n'a fost acordat, după cum a hotărît Adunarea Generală din 28 August a. c. Raportul urmează să se publice în No. 3 al Gazetei, din Noemvrie a. c.

7. *Premiul de matematici superioare pure sau aplicate* „INGINER H. CAPRIEL“, în valoare de 1.000 lei, urmează să se acorde în anul 1944, la terminarea perioadei de 5 ani regulamentare, uneia din lucrările ce se vor fi primit asupra subiectului propus de Comisiunea acestui premiu, subiect care a fost publicat în Vol. XLV, pag. 461.

8. *Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare,* „GENERAL SC. PANAITESCU", de asemenea urmează să fie acordat la împlinirea perioadei regulamentare de 5 ani.

9. *Premiul anual* „LT.-COL. GH. A. TĂNĂSESCU", a revenit elevului DAN F. DUMITRESCU, clasificat întâiul la concursul *Gazetei Matematice* din 1941, după cum s'a arătat în raportul publicat la pag. 449.

10. *„Premiul anual de geometria triunghiului şi a tetraedrului* „NICOLAE G. BOTEA", n'a fost încă atribuit, raportul Comisiunii pentru acest premiu urmând să fie supus primei Adunări Generale viitoare.

In anul precedent, acest premiu a fost luat de elevul IULIAN PETRESCU, în baza raportului publicat în Vol. XLVI la pag. 195.

11. *Premiul anual* „INGINER AL. ROŞU" a fost dat elevului MIRCEA D. POPA care a fost corespondentul cel mai harnic al Gazetei, în anul precedent (Vol. XLVI, pag. 409).

* * *

In cursul anului XLVII de apariţie a Gazetei (anul şcolar 1941—1942), *conform cu regulamentele ce se găsesc anexate la Numărul de faţă,* premiile de acordat sunt următoarele:

1. *Premiul anual de aritmetică,* de 5.000 lei.

2. *Premiul de geometrie elementară,* „GH. ŢIŢEICA" de 5.000 lei.

3. *Premiul de algebră,* de 5.000 lei.

4. *Premiul de trigonometrie* „VASILE CRISTESCU": Anul acesta se va putea acorda fie un premiu de 15.000 lei, fie 2 sau 3 în valoarea minimă de câte 5.000 lei.

5. *Premiul anual de mecanică sau astronomie* „SP. HARET": Se va putea acorda un premiu de 15.000 lei, sau această sumă se va putea împărţi în 2—3 premii de minimum 5.000 lei.

6. *Premiul anual de filosofia matematicilor* „VASILE CONTA", dispune anul acesta de 8.000 lei, putându-se acorda un singur premiu de această valoare, sau 2 de câte 4.000 lei.

7. *Premiul anual* „LT-COL. GH. A. TĂNĂSESCU", constând din cărţi de matematici ce se vor putea cumpăra din venitul fondului cu acest nume, este destinat primului clasat la concursul anual al Gazetei.

8. *Premiul anual de geometria triunghiului şi tetraedrului* „NICOLAE GH. BOTEA", din venitul fondului cu acest nume.

9. *Premiul anual* „INGINER GH. A. ROŞU“ din venitul fondului respectiv este destinat celui mai harnic corespondent la Volumului XLVI al Gazetei.

II. **Burse.**

Din venitul fondului „PROFESOR ION IONESCU“ s'a acordat în anul şcolar 1940—1941 o bursă de 3.000 lei lunar, care a fost deţinută dela 15 Oct. până la 15 Februarie de D-l RADU MARTAC din anul V Construcţii şi dela 15 Febr. până la 15 Iunie de D-şoara GEORGETA ROMAŞCAN studentă în anul III Construcţii la Politehnica din Bucureşti.

III. **Publicaţii.**

Nici în cursul anului trecut nu s'a făcut nici o publicaţie în biblioteca tehnică a *Gazetei Matematice*, la a cărei tipărire sunt destinate veniturile fondului „ANGHEL SALIGNY“.

Din disponibilităţile curente ale Soc. *Gazeta Matematică* s'a tipărit volumul II din *Elementele lui* EUCLID.

S'au dat în fine la tipar, urmând să apară în curând:

1. Volumul III din *Elementele lui* EUCLID.
2. *Algebra superioară* de D-l N. ABRAMESCU.
3. O broşură cu *enunţurile problemelor nerezolvate*, al cărei cost a fost acoperit de donaţiile D-lui Inginer D. STOICA.
4. Monografia „*Maxime şi Minime Geometrice*“ de D-l ION IONESCU, cu care se inaugurează biblioteca „GEORGE ŢIŢEICA“.

COMISIUNEA PENTRU ADMINISTRAREA
FONDURILOR SPECIALE ALE SOC. „GAZETA MATEMATICĂ“
Inginer IOAN BUŞILĂ şi Inginer D. A. STAN.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU“

Relativ la decernarea premiului „General Sc. Panaitescu“, avem onoare a vă supune D-vs. următoarele:

Din examinarea tuturor lucrărilor cu caracter matematic, aplicat la „Ştiinţele Militare“, apărut în cursul acestui an şi în special din examinarea revistelor militare:

Revista Artileriei;
Revista Aeronauticei şi Marinei;
Revista Geniului;
Buletinul Centrului de Instrucţie al Artileriei Antiaeriene.

Am ajuns la concluzia că „Revista Artileriei“ are cele mai numeroase şi interesante studii şi articole de matematici aplicate la Ştiinţele Militare.

In consecinţă, vă rugăm să binevoiţi a aproba ca aceste lucrări din „Revista Artileriei“ să fie luate în considerare la acordarea premiului „General Sc. Panaitescu“ pe perioada 1938—1942.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SC. PANAITESCU“

G-L GH. BUICLIU, ING. AL. BUNESCU,
C-DOR I. LINTEŞ.

Acest raport a fost citit şi aprobat de Adunarea Generală din 28 August 1941.

NOTE MATEMATICE

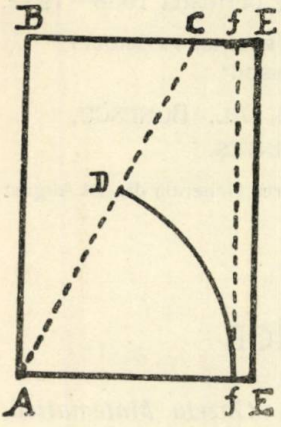
1. *Asupra mediei şi extremei raţii.* In *Gazeta Matematică*, Anul XLVI, pag. 254, D-l I. IONESCU, în Nota Nr. 44, a dat câteva indicaţiuni asupra problemei împărţirii unui segment în medie şi extremă raţie.

In legătură cu aceasta găsesc o aplicaţie interesantă în tipografie. In cartea „*Manual Grafic*“ de IOSEF KRANNICH, apărută la „*Cartea Românească*“ în 1928, la pag. 76, se găseşte pasajul, pe care-l dau extras aci alăturat privitor la alegerea formatelor estetice după regula „*tăieturii de aur*“. Probabil că este tradus după vreo carte germană, împreună cu tabloul, în care se găsesc şi greşeli (22, 13, 8).

Interesante sunt termenele de *diagonală*, pentru dreapta CA, *curbă* trasă cu compasul, şi *diferenţialul tăieturii* care este de sigur o traducere greşită.

„Formatul cel mai estetic este acela întocmit după regulile „*tăieturii de aur*“. Inainte de a forma paginile ne vom convinge totdeauna dacă formatul hârtiei este sau nu estetic. Presupunem că figura 41, înfăţişează foaia ale cărei proporţii am avea de controlat, dacă sunt sau nu conforme „*tăieturii de aur*“. A—B este înălţimea, iar A—E lăţimea foaiei. Spre a afla dacă corespunde regulei de mai sus vom proceda astfel: Impărţim linia A—B în

două părţi egale, iar lungimea jumătăţii aflate o trecem apoi pe lăţimea hârtiei, aci indicată prin literile B—E. Punctul atins vom însemna cu litera C. Plecând de la punctul C, tragem o *diagonală* spre punctul A, iar pe diagonală marcăm iarăşi jumătatea lungimii A—B, pornind de la punctul C; pe diagonală găsim punctul D.



Cu un compas, aşezat pe punctul A, tragem o *curbă* prin punctul D atingând linia A—E unde vom găsi punctul *f*. Acest punct ne dă conform regulii de mai sus, lăţimea corespunzătoare cu înălţimea foaiei. A—B este înălţimea iar A—*f* lăţimea ei.

„In tabloul de mai jos găsim cu uşurinţă, fără să măsurăm hârtia pentru fiecare caz în parte, aşa cum am notat mai sus, lungimile şi lăţimile corespunzătoare pentru un număr însemnat de formate. Dacă de ex. o lucrare (sau o foaie) are înălţimea de 20 cicero sau 20 cm va trebui să aibă lăţimea de 12,4 cicero sau 12,4 cm. In cazul când cunoaştem lăţimea, aflăm înălţimea respectivă prin adunarea *diferenţialului „tăieturii de aur“* la lăţimea dată. De ex.: Dacă lăţimea lucrării (sau a foaiei) este de 20 cicero sau 20 cm, înălţimea va trebui să fie 20 + 12,4, deci 32,4 cicero sau cm“.

Inălţ.	Lăţ.	Inălţ.	Lăţ.	Inălţ.	Lăţ.	Inălţ.	Lăţ.	Inălţ.	Lăţ.
1	0,6	11	6,8	21	13,0	31	19,2	41	25,4
2	1,2	12	7,4	22	13,0	32	19,8	42	26,0
3	1,9	13	8,0	23	14,2	33	20,4	43	26,6
4	2,5	14	8,7	24	14,8	34	21,0	44	27,2
5	3,1	15	9,3	25	15,5	35	21,6	45	27,8
6	3,7	16	9,9	26	16,1	36	22,2	46	28,4
7	4,3	17	10,5	27	16,7	37	22,9	47	29,0
8	4,9	18	11,1	28	17,3	38	23,5	48	29,7
9	5,6	19	11,7	29	17,9	39	24,1	49	30,3
10	6,2	20	12,4	30	18,5	40	24,7	50	30,9

C. TEODORESCU.

2. *Asupra problemei 5389.* Soluția analitică, dată acestei probleme, la pag. 610, Vol. XLVI, *Gazeta Matematică*, se simplifică foarte mult dacă se iau ca axe de coordonate dreapta Δ și paralela dusă din A la BC. Cu aceste axe, al căror unghiu să-l notăm cu θ, se găsește imediat

$$A(a, o) \quad , \quad B(o, y) \quad , \quad C(x, y)$$

$$\overline{AB}^2 = a^2 + y^2 - 2ay\cos\theta \quad \text{și} \quad \overline{BC}^2 = x^2$$

iar condiția din enunț

$$\overline{AB} = k \cdot \overline{BC}$$

devine

$$k^2x^2 - y^2 + 2ay\cos\theta - a^2 = 0$$

care este ecuația unei hiperbole, care se reduce la drepte când $a = 0$.

In cursul acestei demonstrații am păstrat aceleași notații dela pag. 610, Vol. XLVI.

Problema are și soluție pur geometrică.

G-L GH. BUICLIU.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematica din Timișoara. Anul XXI. Nr. 6 August 1941. Timișoara. Asupra unei desvoltări în serie, de M. GHERMĂNESCU. Asupra unei integrale ce intervine în mișcarea tautocronă, de R. BĂDESCU.

Bulletin scientifique de l'École polytechnique de Timișoara. Tome 10 Fasc. 1—2. Nouveaux domaines de recherches en « *Trigonométrie quadratique* », par V. ALACI. Sur la réduction de l'équation indéterminée du second degré $x^2 - \varphi y^2 = 1$ $(\varphi > 0)$ aux équations $x^2 - \beta y^2 = \pm 1$, et $ax^2 - \beta y^2 = \pm 1$, par O. N. TINO. Remarques sur les mouvements tautochrones, par TH. ANGHELUȚĂ. Sur la nouvelle Géométrie du triangle, par M. VINCENZO G. CAVALLARO. Sur une classe de surfaces, par GH. TH. GHEORGHIU. L'expression analytique de la perspective newtonniène des polynomes, par M. ST. BOTEZ. Ueber eine zahlentheoretische Methode zur Bildung und Anzahlbestimmung neuartiger lateinischer Quadrate, von E. STERN.

Mathesis. Tome LIV. Année 1940. No. 5—6 Mai Gembloux 1940. Proiectivități ternare permutabile de R. DEAUX Asupra unui mijloc elementar de a stabili fomulele de adunare ale funcției eliptice F (k, φ) de R, FRANCOTTE. Octogon mărginit de pătrate de V. THÉBAULT. Asupra cuarticei lui GUTSCHOVE,

de H. LORENT. Dreptunghiuri asemenea asociate unui triunghiu, de V. THÉBAULT (Suplement). Primul profesor de matematici şi de ştiinţe nautice în Rusia, LEONTIJ FILIPPOVIC MAGNICKIJ de R. DEAUX.

Idem. No. 7 Juillet 1940. Asupra numerelor curioase, de G. LAMBERT. Asupra ecuaţiilor diferenţiale lineare cu coeficienţi constanţi, de J. LEEMMANS. Descompunerea unei homografii binare, de R. DEAUX. Poligon de $2n$ laturi mărginit de triunghiuri isoscele asemenea, de V. THÉBAULT. Asupra cubicelor plane, de A. CLAEYS. Soluţie geometrică a problemelor fundamentale ale geometriei intrinsece plane, de R. GOORMAGHTIGH. Cuadranglu mărginit de triunghiuri isoscele asemenea de V. THÉBAULT. (Suplement).

N. M. Corespondenţa omografică. (Monografia Nr. 10 din Biblioteca Revistei „*Pozitiva*".

Revista Matematica Hispano-Americana. Seria 4. Tome I. No. 2. Madrid 1941. JORGE JUAN, de J. M. T. M. Comentarii asupra algebrei şi topologiei, de T. R. BACHILLER. O teoremă asupra frecuenţei punctelor unei drepte care sunt pe o fascicolă interioară alteia, de amplitudine cunoscută, de L. ESCARDO.

Universitatea din La Plata. Publicaţiunile Facultăţii de Ştiinţe fizico-matematice. Vol. II. Num. 1 Aprilie 1941. La Plata.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Tome XXIII Nr. 10. Bucureşti 1941. Sur les combinaisons généralisées, par P. SERGESCU. Sur les invariants de l'équation de *Laplace*, par G. VRÂNCEANU

Idem. Index Bibliographique des Tomes I—XX (1912—1938).

ION IONESCU. *Povestiri Ştiinţifice.* (Tipărită în *Biblioteca Tehnică. « Universul »* Nr. 1). Bucureşti 1941. Editura Ziarului *« Universul »*. Preţul 100 lei.

Autorul a retipărit, în o broşură de 272 de pagini, formatul 130×210, conferinţe şi articole, referitoare la popularizarea ştiinţelor, în număr de 20, dintre care cele mai multe au fost publicate mai înainte în Revista *« Natura »*.

Chestiunile tratate sunt următoarele : Nepopularitatea matematicilor, Aritmetica preistorică, Aritmetica juridică, Aritmetica lui GHEORGHE LAZĂR, Jocuri cu numere, Dobânda în vechile aşezăminte româneşti, Centenarul primei cărţi de matematică tipărită în Bucureşti. Aritmeticile lui LAZARINI. Algebra lui PETRACHE POIENARU. *Pitagora.* Ultima Teoremă a lui FERMAT. Călătoria unui matematician prin Moldova în secolul XVIII. Jubileul Logaritmilor. Mania Calculului . Calculul probabilităţilor. Tocmeala de noroc. Jocurile de noroc. Geometria lui GHEORGHE LAZĂR. Parabola. Vieaţa în lumea plană.

Chestiunile sunt expuse în mod elementar, astfel că citirea broşurii se poate face de cei ce au cunoştinţele liceului, şi a *fortiori* de corespondenţii *Gazetei Matematice.*

GEORGE ŢIŢEICA. *Operele.* Vol I. (Publicate de Academia Română). *Note si Memorii.* Bucureşti 1941. Imprimeria Naţională. Preţul 300 lei.

Cu materialul adunat de D-nii RADU ŢIŢEICA şi GH. TH. GHEORGHIU Academia Română a publicat, în un volum de 504 pagini, 92 de lucrări matematice ale lui GHEORGHE ŢIŢEICA, şi anunţă publicarea a încă două volume. Volumul I are o prefaţă scrisă de d-l D. POMPEIU şi „*Viaţa şi opera lui* GEORGE ŢIŢEICA" scrisă de D-nii O. ONICESCU şi GH. VRÂNCEANU, Profesori la Universitatea din Bucureşti.

Cartea este foarte folositoare celor ce vor să lucreze în domeniile matematice exporate de GEORGE ŢIŢEICA.

I. I.

P. SERGESCU: *Quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France (Monografii matematice publicate sub îngrijirea profesorilor dela Secţiunea de matematici a Universităţii din Cluj), Fascicula IV, Timişoara 1941.*

După cum ne spune autorul, d-l P. SERGESCU profesor la Universitatea din Cluj, această monografie era destinată altei colecţii, iniţiate de *Palais de la Découverte* din Paris. Din cauza împrejurărilor, ea apare în locul fasciculei IV a Monografiilor pentru care Domnia Sa pregătise un studiu despre „*Cercetările recente cu privire la zerorile polinoamelor*", a cărui note şi manuscris s'au risipit cu ocazia evacuării Clujului. Astfel se explică întârzierea acestei fascicule, care vede tiparul cu mult după apariţia fasciculelor V şi VI ale acestei colecţii.

Lucrarea d-lui SERGESCU are două părţi. In partea întâia ni se dă o privire pe cât de concisă, pe atât de clară şi precisă asupra contribuţiei Franţei la desvoltarea matematicei în decursul ultimelor patru veacuri. Rezultă de aici „înalta valoare a geniului matematic Francez şi poziţia fundamentală pe care o are Franţa în creaţia matematică".

In partea a doua avem un tablou cronologic al datelor mai importante din evoluţia matematicilor franceze pe timp de aproape o mie de ani.

Datele d-lui SERGESCU sunt foarte precise şi multe din ele sunt rezultatul cercetărilor personale ale Domniei Sale. Menţionăm aici că ADELHARD DE BATH (ca. 1120) primul traducător în latineşte al *Elementelor* lui EUCLID, a fost un călugăr englez, este însă amintit, deoarece, după cum a aflat dl. SERGESCU, a fost profesor la Compiègne.

Broşura este scrisă într'un stil sobru şi se citeşte cu interes. Fiind o lucrare rezumativă ea poate servi atât cunoscătorilor materiei ajutându-i la aflarea datelor mai importante, cât şi celor neiniţiaţi în istoria matematicilor, căci le deşteaptă curiositatea şi-i antrenează în acest domeniu al cunoştinţelor, pe cât de atrăgător pe atât de util.

VICTOR MARIAN

A. AVRAMESCU: *Beiträge zur Berechnung der Kurzschlusserwärmung.* Disertaţiune Politechnica din Dresden 1937. Extr. Bul. IRE 5 (1937) Nr. 2.

A. AVRAMESCU: *Über die Zündung von Glimmteilerröhren.* Elektrotech. Zeitschr. 58 (1937) p. 343.

A. AVRAMESCU: *Über die Berechnung der Kurzschlusserwärmung.* Elektrotech. Zeitschr. 59 (1938) p. 985.

A. AVRAMESCU: *Über die Erwärmung punktförmiger Kontakte bei konstanter Strombelastung.* Arch. Elektrotechn. 33 (1939) p. 261),

A. AVRAMESCU: *Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Kupfer und Aluminium bis zum Schmelzpunkt.* Zeitschr. techn. Physik 20 (1939) p. 26.

A. AVRAMESCU: *Temperaturabhängigkeit der wahren spezifischen Wärme von Leitungskupfer und Leitungsaluminium bis zum Schmelzpunkt, Zeitschr.* techn. Physik 20 (1939) p. 213.

A. AVRAMESCU: *Über die Zündung von Entladungslampen* Extr. Compt. rend, Acad. Sci. Roum. 4 (1940) p. 429.

A. AVRAMESCU: *Eine elektrische Methode zur Messung der wahren spezifischen wärme von Metallen.* Extr. Compt. rend. Acad. Sci. Roum 4 (1940) p. 355.

A. AVRAMESCU: *Efectele termice ale curenţilor de scurt circuit în reţelele electrice.* Extr. Bul. IRE. 8 (1940) Nr. 2.

A. AVRAMESCU: *O nouă sursă de lumină electrică:* Lămpile cu mercur luminiscente. Extr. Bul. APDE 9 (1940) p. 52.

A. AVRAMESCU: *Über die Berechnung der Wärmewirkung von Ausgleich* — und *Überströmen.* Arch. Elektrotechn. 35 (1941). p. 344.

A. AVRAMESCU: *Erwärmungsberechnung elektrischer Kontakte.* Physikaliche Grundlagen und analytiche Behandlungsmethoden. Bul. Politechn. Buc. 12 (1941) Nr. 1—2.

A. AVRAMESCU: *Über die Änderung des elektrischen Widerstands-Temperatur-Koeffizienten von Kupfer und Aluminium bis zum Schmelzpunkt.* Extr. Compt. rend. Acad. Roum. 5 (1941) p. 163.

A. AVRAMESCU: *Die Wärmewirkung der Schalt — und Strosströme.* Elektrotechn. Zeitschr. 62 (1941) p. 591.

CERERI

305. In afară de Geometria lui D. MIRESCU şi unele broşuri ale lui TH. CRIVĂŢ, s'au mai incercat de Români demonstraţiuni ale postulatului lui EUCLID?

I. I.

DIVERSE

a) **Şedinţele Societăţii.**

Adunarea generală dela 28 August 1941. **Inainte de a se începe lucrările Adunării, Delegaţia ia act oficial de reîntregirea dela Nord şi dela Răsărit a României,** *Gazeta Matematică* **se înclină cu recunoştinţă în faţa bravurii Armatei române şi aşteaptă cu încredere să se rezolve definitiv simbolica ecuaţie a dreptăţii Neamului românesc.**

D-l Comandor I. LINTEŞ a prezentat şi donat Societăţii o broşură în limba rusă cuprinzând *«Tabele balistice pentru bombardamentul aerian»*, găsită în resturile unui avion sovietic doborît de armata română.

b) **Sporirea Bibliotecii.**

P. MANSION. Calcul des dérivées. Gand. 1911.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

A. MERTEN, J. NEUBERG, etc. Notes mathématiques. Bruxelles 1911.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2250. *Un tablou razemă cu muchea ramei orizontale inferioare pe un perete vertical, fiind atârnat în două puncte de nivel de pe muchile ramelor laterale, printr'un fir de un cuiu al peretelui. Să se determine condiţiile de echilibru ale tabloului.*

D. NĂSTURAŞ.

Soluţia acestei probleme este cuprinsă în soluţia ce s'a dat problemei 2353 la pag. 585, Vol. XLVI, *Gazeta Matematică.*

Problema 2250 a fost rezolvată în 1916 de D-l N. ŢUHAI.

PROBLEMA 2953. *Să se determine cea mai mică valoare a lui m, pentru ca suma*

$$S = x^m y z^2 + 2x^2 y^m z + 3xy^2 z^m$$

să fie minimă şi să se calculeze acel minim ştiind că

$$x^6 y^9 z^{12} - 3x^4 y^6 z^8 + 2x^2 y^3 z^4 = 6.$$

V. CERNAT.

Soluţie dată de D-nii V. COŞNIŢĂ (Bârlad) şi I. COŞEREANU (Timişoara).

Pentru a rezolvi această problemă ne vom servi de articolul D-lui V. ALACI: *„Aflarea directă a maximului unui produs şi minimului unei sume"*, articol publicat în G. M. XIX, pag. 401. Insemnând $x^2y^3z^4 = P$, relaţia de condiţie devine

$$P^3 - 3P^2 + 2P - 6 = 0,$$

care admite o rădăcină reală pozitivă: 3, şi două rădăcini imaginare.

Pentru problemele de maxim şi minim nu putem lua decât

$$P = x^2y^3z^4 = 3. \tag{1}$$

Aplicând teorema din articolul sus citat, pentru ca suma din enunţ să fie minimă trebue ca (G. M. XIX, 405):

$$\frac{x^m yz^2}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & m & 2 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{2x^2y^m z}{\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & m \end{vmatrix}} = \frac{3xy^2z^m}{\begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \lambda$$

$$\therefore \frac{x^m yz^2}{2m^2-10m+15} = \frac{2x^2y^m z}{3m^2-10m+6} = \frac{3xy^2z^m}{4m^2-7m+6} = \lambda. \tag{2}$$

Teorema întrebuinţată cere ca determinanţii dela numitori, cum şi determinantul

$$\delta = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 6m + 9 = (m+3)(m^2 - 3m + 3)$$

să aibă *toţi* acelaşi semn.

Deoarece trinoamele $2m^2 - 10m + 15$ şi $4m^2 - 7m + 6$ au rădăcini imaginare şi nu pot fi deci negative, trebue ca

$$3m^2 - 10m + 6 > 0 \tag{3}$$

precum şi

$$(m+3)(m^2 - 3m + 3) > 0. \tag{4}$$

Din (3), avem

$$m < \frac{5-\sqrt{7}}{3} \quad \text{şi} \quad m > \frac{5+\sqrt{7}}{3};$$

iar din (4), cum $m^2 - 3m + 3$ are rădăcini imaginare, se obţine

$$m > -3.$$

Prin urmare, rămâne numai

$$m > \frac{5+\sqrt{7}}{3} = 2{,}54$$

din care *rezultă că cea mai mică valoare întreagă a lui* m *este* 3. Aşa că relaţia (2) devine

$$\frac{x^3yz^2}{3} = \frac{2x^2y^3z}{3} = \frac{3xy^2z^3}{21} = \lambda$$

iar suma S:

$$S = x^3yz^2 + 2x^2y^3z + 3xy^2z^3$$

sau

$$S' = 3\lambda + 3\lambda + 21\lambda = 27\lambda. \qquad (5)$$

Pentru a determina pe λ, scrim relaţiunea (1) sub forma:

$$P = x^2y^3z^4 = \frac{(x^3yz^2)\,.\,(2x^2y^3z)\,.\,(3xy^2z^3)^7}{(x^2y\,z^4)^5\,.\,2\,.\,3^7} = 3$$

sau

$$\frac{3\lambda\,.\,3\lambda\,.\,21^7\,.\,\lambda^7}{3^5\,.\,2\,.\,3^7} = 3$$

$$\therefore \qquad \lambda^9 = \frac{3^4\,.\,2}{7^7} \quad \text{sau} \quad \lambda = \sqrt[9]{\frac{2\,.\,3^4}{7^7}}\,.$$

Inlocuind această valoare în (5) obţinem

$$\textit{minim}\, S = 27\sqrt[9]{\frac{2\,.\,3^4}{7^7}}\,.$$

G-L G. I. LIT.

PROBLEMA 4452 [1]). *Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$(b+c)\,(r_a - R) + (c+a)\,(r_b - R) + (a+b)\,(r_c - R) = 4S\ ^{2}).$$

V. THÉBAULT.

---

1) Inlocueşte enunţul eronat dela pag. 190, Vol. XL.

2) In enunţul dela pag. 165, Vol. XLVI membrul I trebue înmulţit cu — 1.

Soluție dată de D-șoara LYDIA M. TUDORAN (Șc. Centrală de fete, București) și de D-nii: M. NEGREA (Brăila); FL. N. IORGULESCU (Lic. „Gh. Lazăr", București); V. L. FLORESCU, C. V. PANTELIMON, M. D. STOENESCU (Șc. Of. de Aviație, București); P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar, Iași); C. D. EFTIMIE, C. M. ANDREI (Șc. Politecnică, București); FL. POPESCU (Lic. „Marele Voevod Mihai", București); CEZAR DUMITRESCU, D. GIUGLAN, C. STAICU (Lic. militar, Câmpulung); I. N. GLIGOR (Lic. Moise Nicoară, Arad); N. E. MOSCOVICI (București); GH. D. SBÂRNEA (Lic. „D. A. Sturdza", Tecuci); J. SEGAL (București); I. C. POPESCU, EM. S. MODÂLCĂ, R. P. VOINEA, C. BALTĂ, I. A. BADEA și MARIN GH. POPESCU.

Membrul I al relației de demonstrat se scrie succesiv

$$E = \Sigma (b + c) r_a - R \Sigma (b + c) = \Sigma (2p - a) r_a - 4pR$$

$$E = 2p \Sigma r_a - \Sigma a r_a - 4pR.$$

Dar în *Culegere de Probleme de Trigonometrie* de V. CRISTESCU sunt demonstrate la partea II cap. VI relațiunile

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \quad ; \quad a r_a + b r_b + c r_c = 2p (2R - r)$$

așa că E devine

$$E = 2p (4R + r) - 2p (2R - r) - 4pR = 4pr = 4S.$$

Au dat soluții foarte bune, prin relațiuni trigonometrice D-nii: I. ȘT. ANDONIE, H. M. BODNĂRESCU, ST. CETĂȚEANU, M. M. CHINTESCU, C. GH. CRUCERU, G. I. MIHAIL, I. C. NEGRESCU, M. I. ȘTEFANOVICI și E. G. VIJELIE.

PROBLEMA 4639. *Să se ducă cu preciziune tangentele dela un punct exterior unui cerc la acel cerc, când punctul dat este foarte aproape de cerc.*

I. IONESCU.

Soluție dată de D-l GABRIEL POPOVICIU (Elev-Inginer).

Fie O un cerc cu raza R și M un punct apropiat de cerc, din care voim să ducem tangentele la cercul O. Din O, cu raza 2R, descrim un cerc care taie în A și B cercul descris din M cu raza MO și OA, OB taie în A′ și B′ cercul dat O. Dreptele MA′ și MB′ sunt cele două tangente căutate, ele fiind perpendiculare pe razele OA′, OB′.

Soluții mai puțin precise de D-nii: J. S. COTHIGER și BAL LASCU. D-l ION CĂLIN DIMITRIU din Galați a dat o soluție trigonometrică și una analitică.

PROBLEMA 4675. *Să se găsească numere de trei cifre mai mici ca 10, astfel ca privind acele numere ca scrise în trei sisteme diferite de numerație, una din valori să fie media aritmetică a celorlalte două.*

I. IONESCU.

Fie a, b, c trei cifre mai mici ca 10, adică, în scrierea numerelor în sisteme cu baze superioare lui 10, nu întrebuințăm decât cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Fie $x < y < z$ bazele a trei sisteme de numerație în care scrim numărul abc, așa ca să avem:

$$(ax^2+bx+c)+(az^2+bz+c)=2(ay^2+by+c). \qquad (1)$$

Această ecuație trebuie satisfăcută pentru $a<x$, $b<x$ și $c<x$. Ea se poate pune sub forma:

$$a(2y^2-x^2-z^2)+b(x+z-2y)=0. \qquad (2)$$

Cifra c nu figurează în (2); deci ea poate fi oricare din cifrele 0, 1, ... 9, mai mică decât x. In cele ce urmează vom considera numai $c=0$, putându-l înlocui cu oricare din cifrele 1, 2, ... 9 inferioară lui x ales.

Cum $a>0$ și $b\geqq 0$, relația (2) nu poate exista dacă ambele ei parenteze au același semn. Deci, dacă lăsăm deocamdată la o parte cazul $b=0$, nu putem lua de cât:

$$\begin{array}{lll} 2y^2-x^2-z^2>0, & \text{sau} & 2y^2-x^2-z^2<0, \\ 2y-x-z>0, & & 2y-x-z<0, \end{array}$$

de unde deducem succesiv:

$$2x^2+2z^2<4y^2<x^2+z^2+2xz, \quad x^2+z^2+2xz<4y^2<2x^2+2z^2,$$
$$x^2+z^2<2xz, \quad x^2+z^2>2xz,$$
$$(z-x)^2<0 \quad , \quad (z-x)^2>0.$$

Prima relație nu este posibilă; a doua se verifică totdeauna.

Pentru cazul $x=z$ avem $y=z$, căci y este cuprins între x și z. Aceasta corespunde scrierii numerelor în același sistem de numerație. Atunci egalitatea (1) devine o identitate. Va trebui deci să luăm:

$$2y^2-x^2-z^2<0, \quad 2y-x-z>0. \qquad (3)$$

Relația (2) o putem scri astfel:

$$(2y-x-z)/(x^2+z^2-2y^2)=a/b, \qquad (4)$$

Din (3) deducem:

$$[\tfrac{1}{2}(x+z)]^2<y^2<\tfrac{1}{2}(x^2+z^2). \qquad (5)$$

De aci rezultă un mijloc de a găsi bazele x, y, z. Ne dăm pe x şi pe z şi căutăm limitele lui y, cu condiţia $x < y < z$.

Pentru a uşura cercetările să punem:

$$x = y - u \ , \ z = y + v. \tag{6}$$

Din (3) deducem:

$$2y > x + z,$$
$$2y > (y - u) + (y + v),$$
$$u > v. \tag{7}$$

Tot din (3) deducem:

$$y < \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2)/(u - v). \tag{8}$$

De aci rezultă procedeul următor pentru a găsi soluţii. Ne dăm un u şi luăm $v < u$, numere întregi. Cu relaţia (8) stabilim pe y maxim, care nu trebue să fie mai mic de cât u, căci $(y - u)$ este baza x, care este cel puţin 2 (sistemul binar). Calculăm apoi pe x şi z cu formulele (6) şi apoi fracţia a/b. Fie a'/b' fracţia ireductibilă egală cu a/b. Numărul $(ma')\ (mb')\ 0$, la care ma' şi mb' nu întrec pe x, este o soluţie în sistemele cu bazele x, y, z. Numerele ma', mb' nu trebuie să întreacă pe 9.

Iată aci un exemplu de căutare a unei soluţii. Fie $u = 4$, $v = 3$. După (8) avem $y < \frac{1}{2}(4^2 + 3^2)/(4 - 3)$ sau $y < 12$. Putem lua deci:

y	=	12,	11,	10,	9,	8,	7,	6.
x	=	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2.
z	=	15,	14,	13,	12,	11,	10,	9.
a/b	=	1/1,	1/3,	1/5,	1/7,	1/9,	1/11,	1/13.

Ne oprim la $y = 6$, căci altfel $x < 2$. Nu putem lua $b = 7$, 9, 11 sau 13 căci atunci cifra b întrece baza x. Lui $a/b = 1/1$ îi corespunde $a'/b' = 2/2$, 3/3, 4/4, 5/5, 6/6, 7/7 cu cifre mai mici ca 8 (cel mai mare x). La $a/b = 1/3$ mai avem $ma'/mb' = 2/6$. La $a/b = 1/5$ şi $a/b = 1/7$ nu mai sunt alte valori. Avem dar ca soluţii:

110, 220, 330, 440, 550, 660, 770 în sistemele cu bazele 8, 12, 15.

130, 260 în sistemele cu bazele 4, 11, 14.

150 în sistemele cu bazele 6, 10, 13.

Pentru $b = 7$ şi $b = 9$ bazele x sunt mai mici, 5 şi 4. Cifrele 11 şi 13 superioare lui 10 nu sunt admisibile după enunţ.

Pe această cale s'au găsit următoarele soluţii pentru cazul când baza mică x nu diferă de baza mijlocie y de cât cu cel mult 10

SISTEMELE			SOLUŢIILE	SISTEMELE			SOLUŢIILE
x	y	z		x	y	z	
2	10	14	100	17	25	31	$a00\ (a \leqq 9)$
2	12	17	110	19	28	35	190
3	6	8	110, 220	20	26	31	190
3	8	11	110, 220	20	27	36	170
4	13	18	210	21	27	32	170
5	11	15	140	21	30	37	150
5	15	21	140	22	28	33	150
6	10	13	150	22	31	38	130, 260, 390
6	12	16	120, 240	23	29	34	130, 260, 390
6	14	19	350	23	32	39	$aa0\ (a \leqq 9)$
6	16	22	120, 240	24	30	35	$aa0\ (a \leqq 9)$
7	11	14	130, 260	27	37	45	180
7	13	17	$a00\ (a \leqq 6)$	28	38	46	160
7	17	23	$a00\ (a \leqq 6)$	29	39	47	140, 280
8	12	15	$a00\ (a \leqq 7)$	30	40	48	120, 240, 360, 480
8	15	20	170	31	41	49	$a00\ (a \leqq 9)$
8	17	23	150	44	52	59	190
9	16	21	150	45	53	60	170
9	18	24	130, 260	46	53	61	150
10	17	22	130, 260, 390	47	55	63	130, 260, 390
10	19	25	$aa0\ (a \leqslant 9)$	48	56	63	$aa0\ (a \leqq 9)$
11	16	20	190	59	68	76	190
11	18	23	$aa0\ (a \leqq 9)$	60	69	77	170
12	17	21	170	61	70	78	150
13	18	22	150	62	71	79	130, 260, 390
13	21	27	180	63	72	80	$aa0\ (a \leqq 9)$
14	19	23	130, 260, 390	76	86	95	190
14	22	28	160	77	87	96	170
14	24	31	350	78	80	97	150
15	20	24	$aa0\ (a \leqq 9)$	79	89	98	130, 260, 390
15	23	29	140, 280	80	90	99	$aa0\ (a \leqslant 9)$
16	24	30	120, 240, 360, 480				

I. I.

D-ra ALEXANDRA VASILESCU şi D-l M. Al. VASILESCU STABU au dat altă interpretare enunţului.

PROBLEMA 5125. *Două triunghiuri* T, T′ *sunt omologice de centru* ω *şi axă* Δ. *Fie încă* α, β, γ *trei puncte pe laturile triunghiului* T; $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma$ *taie laturile corespunzătoare ale triunghiului* T′ *în* α', β', γ'.

1. *Dacă* α, β, γ *sunt coliniare pe o dreaptă* δ, α', β', γ' *sunt coliniare pe o dreaptă* δ'; δ *şi* δ' *se taie pe* Δ; *polii lor triliniari* μ *şi* μ' *sunt pe o dreaptă ce trece prin* ω.

2. *Dacă* α, β, γ *sunt picioarele cevienelor unui punct* μ, α', β', γ' *sunt picioarele cevienelor unui punct* μ'; *punctele* μ *şi* μ' *sunt pe o dreaptă ce trece prin* ω; *polarele lor triliniare* δ *şi* δ' *se taie pe* Δ.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-nii: PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. militar Iaşi) şi IULIAN PETRESCU (lic. „Gh. Lazăr", Bucureşti).

Fie încă a, intersecţia $(A\omega, BC)$ şi a' analog; avem egalitatea rapoartelor anarmonice $(a\alpha BC)$ şi $(a'\alpha' B'C')$ deci

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} : \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} : \frac{\overline{\alpha'B'}}{\overline{\alpha'C'}}$$

înmulţim cu expresiile analoage, ţinând seamă că

$$\Pi \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = \Pi \frac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} = -1$$

şi obţinem

$$\Pi \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{aC}} = \Pi \frac{\overline{\alpha'B'}}{\overline{\alpha'C'}}$$

deci, dacă α, β, γ sunt pe o dreaptă δ şi α', β', γ' sunt pe o dreaptă δ'. Considerăm triunghiurile $A\beta\gamma$, $A'\beta'\gamma'$ omologice de centru ω; cum două perechi de laturi omoloage se taie pe Δ şi δ, δ' se taie pe Δ.

Fie α_1 conjugatul lui α faţă de BC; avem

$$(\alpha\alpha_1 BC) = (\alpha'\alpha_1' B'C') = -1,$$

deci $\omega\alpha_1$ taie pe B′C′ în α_1' conjugatul lui α' faţă de B′, C′. Triunghiurile $BC\beta_1$, $B'C'\beta_1'$ sunt omologice de centru ω, deci $B\beta_1$, $B'\beta_1'$ se taie pe Δ; analog $C\gamma_1$ şi $C'\gamma_1'$. Triunghiurile $BC\mu$ şi $B'C'\mu'$ sunt deci omologice de axă Δ; rezultă că $\mu\mu'$ trece prin ω.

Punctul 2 rezultă ca o polaritate triliniară din primul.

Observare. Considerăm o piramidă triunghiulară de vârf ω şi o tăiem cu două plane P, P' care se taie după dreapta Δ. Triunghiurile T = ABC şi T' = A'B'C' determinate în piramidă sunt omologice de centru ω şi axă Δ. Fie $\delta = \alpha\beta\gamma$ în planul P. Planul (ω, δ) taie planul P' după dreapta δ'; ω, α, α' în acelaşi timp în planele BCB'C', $\delta\delta'$ sunt coliniare, etc. Planele P, P', $\delta\delta'$ au un punct comun deci δ, δ' se taie pe Δ. In planul BCB'C', α_1 şi α_1' (conjugatele punctelor α, α') sunt pe o dreaptă ce trece prin ω. $A\alpha_1$, $A'\alpha_1'$ sunt într'un plan ce trece prin ω; acelaşi lucru despre dreptele omoloage; cele trei plane au comune punctele ω, μ, μ' care sunt deci coliniare, etc.

PROBLEMA 5214. *Fie* α, β, γ *un sistem de puncte coliniare şi* a, b, c *picioarele a trei ceviene concurente pe laturile triunghiului* ABC.

1°. *Dreptele* αa, αc *taie pe* AB, AC *în* C_a, B_a *şi dreapta* $B_a C_a$ *taie pe* BC *în* A'. A' *şi analoagele sunt coliniare.*

2°. *Dreptele* $a\beta$, $a\gamma$ *taie pe* AB, AC *în* B_c, B_b *şi* $B_c C_b$ *taie pe* BC *în* A_1. A_1 *şi analoagele sunt coliniare.*

N. N. MIHĂILESCU.

Soluţie dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (Politehnica, Bucureşti), PAUL P. DRĂGHICESCU (cl. VI-a, lic. militar Iaşi), CONSTANTIN V. PANTELIMON (lic. militar Iaşi), IULIAN PETRESCU (lic. Lazăr, Bucureşti), MIRCEA D. POPA (lic. militar Iaşi), MIREL D. STOENESCU (şc. ofiţeri aviaţie, Bucureşti).

1. Triunghiul ABC tăiat de transversalele $\alpha a C_a$ şi $\alpha c B_a$ dă

$$\frac{\overline{C_a B}}{\overline{C_a A}} = \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}}, \quad \frac{\overline{B_a A}}{\overline{B_a C}} = \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}}$$

considerând şi transversala $A'B_a C_a$

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{B_a A}}{\overline{B_a C}} \cdot \frac{\overline{C_a B}}{\overline{C_a A}} = \left(\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\right)^2 \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = -\left(\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\right)^2 \cdot \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}$$

considerăm şi analoagele şi multiplicăm; avem

$$\Pi \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = 1, \quad \Pi \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = -1 \quad \therefore \Pi \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = 1.$$

2°. Tot în triunghiul de referinţă, considerăm succesiv transversalele $a\gamma B_c$, $a\beta C_b$ şi $B_c C_b A_1$. Avem

$$\frac{\overline{B_cA}}{\overline{B_cC}} = \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}, \quad \frac{\overline{C_bB}}{\overline{C_bA}} = \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}$$

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{B_cA}}{\overline{B_cC}} \cdot \frac{\overline{C_bB}}{\overline{C_bA}} = \left(\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}\right)^2 \cdot \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}$$

deci

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

Observare. Sugestia problemei o formează generalizarea problemei 18.XI. din C. d. P. Geometrie (Iulie, 1932).

PROBLEMA 5259. ABCDEF *fiind un exagon înscris în cercul* O, *şi cu diagonalele* AD, BE, CF *concurente în* I *se consideră perpendicularele ridicate pe mijlocul razelor* OA, OB, OC. *Aceste perpendiculare intersectează perpendicularele coborîte din* O *pe* AD, BE, CF *respectiv în* M, N *şi* P. *Să se arate că punctele* M, N, P *sunt coliniare, dreapta* MNP *fiind perpendiculară pe* OI.

THEODOR G. COCEA.

Soluţie dată de D-nii: PAUL DRĂGHICESCU (clasa VI-a), MIRCEA D. POPA, PANTELIMON CONSTANTIN (lic. militar Iaşi).

Observăm că punctele M, N, P sunt centrele cercurilor AOD, BOE, COF fiindcă se găsesc la intersecţia mediatoarelor triunghiurilor înscrise. Pe de altă parte, scriind puterea lui I faţă de cercul (O)

$$\overline{IA} \cdot \overline{ID} = \overline{IB} \cdot \overline{IE} = \overline{IC} \cdot \overline{IF}$$

şi observând că cele trei cercuri trec prin O, punctele I, O au aceeaşi putere faţă de toate cercurile care au deci axa radicală comună IO şi centrele coliniare pe o dreaptă perpendiculară pe IO.

Observare. Problema este o imediată aplicație a principiului *transformării prin polare inverse*[1]; în adevăr la dreptele concurente AD, BE, CF corespund polii coliniari M, N, P, polul fiind definit ca centrul cercului AOD, etc. MNP este atunci polara inversă a lui I, perpendiculară pe OI.

PROBLEMA 5308. *Prin punctul* P *de pe diagonala* BD *a unui paralelogram* ABCD *ducem două drepte oarecare* Δ *și* Δ' *care taie laturile paralelogramului în opt puncte. Aceste puncte unite convenabil două câte două formează un paralelogram* $A_1B_1C_1D_1$ *care are o diagonală, diagonala* AC *a paralelogramului* ABCD, *iar cealaltă diagonală trece prin punctul* P.

Laturile paralelogramului $A_1B_1C_1D_1$ *taie laturile paralelogramului* ABCD *în încă opt puncte, care unite convenabil două câte două formează un paralelogram având laturile paralele cu dreptele* Δ *și* Δ' *iar centrul în punctul* P.

MIRCEA D. POPA.

Soluție. 1. Fie *a, b, c, d, e, f, g, h* cele opt puncte în care Δ și Δ' taie laturile paralelogramului ABCD[2]. Avem

$$\frac{\overline{Pf}}{\overline{Pg}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{Pc}}{\overline{Pb}}$$

deci *fc* este paralelă cu *bg* adică C_1D_1 cu A_1D_1; analog $ae \parallel dh$ sau $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ și figura $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram. Triunghiurile ecD_1 și hbB_1 au laturile paralele deci sunt omologice și B_1D_1 trece prin P, intersecția *eh, bc.* Triunghiurile *b*Bg și *a*De sunt omologice de centru P deci A_1, A, C sunt coliniare. Analog C_1, A, C.

2. Fie $a', b', c', d', e', f', g', h'$, intersecțiile $a' = (DC, B_1C_1)$, $b' = (AD, B_1C_1)$, $c' = (AB, A_1D_1)$, $d' = (BC, A_1D_1)$, $e' = (AB, D_1C_1)$, $f' = (BC, D_1C_1)$, $g' = (AD, A_1B_1)$, $h' = (DC, A_1B_1)$.

---

1) TH. COCEA: *Asupra unei transformări* (Pitagora V: 226).

2) Pentru precizare: *a, f* pe AD; *b, h* pe AB; *d, g* pe BC; *c, e* pe CD; *a, d* opuse față de P. La fel *b* cu *c*, *e* cu *h f* cu *g*.

Avem

$$\frac{\overline{ce}}{\overline{ca'}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{cf}}{\overline{cf'}}$$

deci $a'f'$ sau C_2D_2 este paralelă cu $efgh$ sau Δ', etc.; am demonstrat că figura $A_2B_2C_2D_2$ formată de dreptele $c'g'$, $d'h'$, $a'f'$, $b'e'$ ca laturi în ordinea A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2 este un paralelogram cu laturile paralele cu $abcd = \Delta$ şi $efgh = \Delta'$. Triunghiurile $D_2b'a'$ şi Pae au laturile paralele deci sunt omologice şi D e centrul de omologie; rezultă că D_2 P trece prin D şi analog prin B. In concluzie $D_2B_2 \equiv DB$ şi trece prin P. Triunghiurile Pce şi $A_2e'c'$ au laturile paralele, deci sunt omologice de centru D_1 şi PA_2 trece prin D_1 şi analog prin B_1. Rezultă $A_2C_2 \equiv D_1B_1$ care trece prin P

PAUL P. DRĂGHICESCU
clasa VII-a, liceul militar Iaşi.

PROBLEMA 5328. *Să se demonstreze că într'un triunghiu oarecare există relaţia*

$$a^2\text{tgA} + b^2\text{tgB} + c^2\text{tgC} = 2S\ (\text{secA secB secC} - 2).$$

T. STOICESCU.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila); H. M. BODNĂRESCU, C. D. EFTIMIE şi EM. S. MODÂLCĂ (elevi ingineri); CONST. PANTELIMON şi M. D. POPA (elevi ofiţeri); M. TREFILOV şi M. F. VĂDUVA (bacalaureaţi); GH. GR. BOGDAN, FL. CĂRUNTU, P. P. DRĂGHICESCU, C. C. MILEA, I. I. PINTILIE, GH. T. PUCHIU şi A. I. ROHR (elevi lic. mil. Iaşi); M. M. CHINTESCU şi EUG. GH. VIJELIE (lic. mil. Predeal); FL. N. IORGULESCU şi CONST. GR. NICOLAU (lic. Lazăr, Buc.); MINEA V. ALDEA (Buzău); C. BAKONYI (Timişoara); C-TIN GH. CRUCERU (Tr. Severin); I. N. GLIGOR (Arad); şi GH. D. SBÂRNEA (Tecuci).

Folosind formulele:

$$a = 2R\sin A, \ldots;\ \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C;$$

$$\text{tgA} + \text{tgB} + \text{tgC} = \text{tgA tgB tgC},$$

prima parte a relației din enunț se scrie succesiv

$$a^2 \text{tgA} + b^2 \text{tgB} + c^2 \text{tgC} =$$

$$4R^2 [(1 - \cos^2 A) \text{tgA} + (1 - \cos^2 B) \text{tgB} + (1 - \cos^2 C) \text{tgC}]$$

$$= 4R^2 \left[(\text{tgA} + \text{tgB} + \text{C}) - \frac{1}{2} (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \right]$$

$$= 4R^2 (\text{tgA tgB tgC} - 2 \sin A \sin B \sin C)$$

$$= 4R^2 \sin A \sin B \sin C (\sec A \sec B \sec C - 2)$$

care nu este altceva decât partea a doua a relației din enunț în baza formulei care dă suprafața unui triunghiu în funcție de raza cercului circumscris și de unghiurile triunghiului.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5350. *Să se găsească toate progresiile întregi*

$$\div z_1 u_1 . \; z_2 u_2 .... \; z_n u_n$$

cu termenii de două cifre, știind că în întreaga progresie nu este nici o cifră întrebuințată de două ori.

G-l GH. BUICLIU.

Considerăm numai sistemul zecimal, altfel numărul soluțiilor este infinit de mare și problema nu mai prezintă nici un interes. In sistemul zecimal progresia va avea cel puțin 3 și cel mult 5 termeni.

Fie $z_1 u_1 = 10$, atunci cea mai mică valoarea a lui $z_2 u_2$ poate fi 23, iar $z_3 u_3$ ar fi dat de

$$z_3 u_3 = 23 + 13 = 36$$

care nu este acceptabil având cifra 3, deja întrebuințată. Considerăm pentru $z_2 u_2$ pe 24, 26,... și determinăm care sunt valorile convenabile pentru $z_3 u_3$ iar din $z_3 u_3$ se deduc pe aceeași cale $z_4 u_4$, $z_5 u_5$ când sunt.

In căutarea acestor soluțiuni se pot face mari simplificări de calcule observând că dacă $z_2 u_2$ crește cu 1, 2... atunci $z_3 u_3$ crește cu 2, 4.... Deoarece 3 termeni consecutivi ai progresiei trebue să fie din 3 decade diferite, urmează că $z_1 u_1 \leqslant 76$.

Procedând pe această cale şi dând lui $z_1 u_1$ succesiv toate valorile numerelor de 2 cifre diferite şi mai mici ca 77, inclusiv numerele 01, 02...09, formal de 2 cifre, se găseşte că problema are următoarele 423 soluţiuni, scrise în ordinea crescândă a primului termen:

÷ 01.23.45.67.89
÷ 01.25.49.73
÷ 01.26.51
÷ 01.27.53
÷ 01.29.57
÷ 01.34.67
÷ 01.35.69
÷ 01.38.75
÷ 01.42.83
÷ 01.43.85
÷ 01.45.89
÷ 01.47.93
÷ 01.48.95
÷ 02.18.34
÷ 02.19.36
÷ 02.35.68
÷ 02.38.74
÷ 02.39.76
÷ 03.14.25
÷ 03.15.27
÷ 03.16.29
÷ 03.25.47.69
÷ 03.26.49
÷ 03.27.51
÷ 03.41.79
÷ 03.42.81
÷ 03.45.87
÷ 03.46.89
÷ 03.47.91
÷ 04.15.26.37
÷ 04.16.28
÷ 04.18.32
÷ 04.21.38
÷ 04.31.58
÷ 04.38.72
÷ 04.51.98
÷ 05.14.23
÷ 05.16.27.38.49
÷ 05.17.29
÷ 05.21.37
÷ 05.23.41
÷ 05.26.47
÷ 05.27.49
÷ 05.37.69
÷ 05.38.71
÷ 05.42.79
÷ 05.43.81
÷ 05.46.87
÷ 05.47.89
÷ 05.48.91
÷ 06.15.24
÷ 06.17.28.39
÷ 06.19.32
÷ 06.27.48
÷ 06.32.58
÷ 06.39.72
÷ 06.42.78
÷ 06.52.98
÷ 07.15.23
÷ 07.16.25.34
÷ 07.18.29
÷ 07.21.35.49
÷ 07.25.43.61.79
÷ 07.26.45
÷ 07.28.49
÷ 07.29.51
÷ 07.34.61
÷ 07.38.69
÷ 07.45.83
÷ 07.46.85
÷ 08.16.24
÷ 08.17.26.35
÷ 08.21.34
÷ 08.27.46
÷ 08.31.54
÷ 08.32.56
÷ 08.35.62
÷ 08.42.76
÷ 08.51.94
÷ 08.52.96
÷ 09.16.23
÷ 09.17.25
÷ 09.18.27.36.45
÷ 09.25.41
÷ 09.26.43
÷ 09.27.45.63.81
÷ 09.28.47
÷ 09.35.61.87
÷ 09.37.65
÷ 09.38.67
÷ 09.41.73
÷ 09.42.75
÷ 09.45.81
÷ 09.46.83
÷ 09.47.85
÷ 10.24.38
÷ 10.28.46
÷ 10.29.48.67
÷ 10.32.54.76.98
÷ 10.34.58
÷ 10.37.64
÷ 10.39.68
÷ 10.43.76
÷ 10.46.82
÷ 10.52.94
÷ 10.53.96
÷ 10.54.98
÷ 12.34.56.78
÷ 12.38.64.90
÷ 12.40.68
÷ 12.45.78
÷ 12.46.80
÷ 12.49.86
÷ 12.53.94
÷ 12.54.96
÷ 13.29.45
÷ 13.40.67
÷ 13.46.79
÷ 13.49.85
÷ 13.50.87
÷ 14.25.36
÷ 14.26.38.50
÷ 14.32.50.68
÷ 14.36.58
÷ 14.37.60
÷ 14.38.62
÷ 14.50.86
÷ 14.52.90
÷ 14.53.92
÷ 14.56.98
÷ 15.26.37.48
÷ 15.27.39
÷ 15.29.43
÷ 15.32.49
÷ 15.42.69
÷ 15.49.83
÷ 16.25.34
÷ 16.27.38.49
÷ 16.28.40
÷ 16.32.48
÷ 16.34.52.70
÷ 16.37.58
÷ 16.43.70
÷ 16.49.82
÷ 16.50.84
÷ 16.53.90
÷ 16.54.92
÷ 16.57.98
÷ 17.26.35
÷ 17.28.39.50
÷ 17.38.59
÷ 17.40.63
÷ 17.43.69
÷ 17.50.83
÷ 17.53.89
÷ 18.24.30

÷ 18.26.34
÷ 18.27.36.45
÷ 18.29.40
÷ 18.30.42
÷ 18.32.46
÷ 18.34.50
÷ 18.36.54.72.90
÷ 18.37.56
÷ 18.39.60
÷ 18.40.62
÷ 18.45.72
÷ 18.54.90
÷ 18.56.94
÷ 18.57.96
÷ 19.27.35
÷ 19.28.37.46
÷ 19.38.57
÷ 19.42.65
÷ 19.43.67
÷ 19.46.73
÷ 19.53.87
÷ 20.37.54
÷ 20.38.56.74
÷ 20.39.58
÷ 20.48.76
÷ 20.49.78
÷ 20.53.86
÷ 20.57.94
÷ 20.58.96
÷ 21.35.49
÷ 21.39.57
÷ 21.40.59.78
÷ 21.43.65.87
÷ 21.45.69
÷ 21.48.75
÷ 21.50.79
÷ 21.54.87
÷ 21.57.93
÷ 23.40.57
÷ 23.41.59
÷ 23.45.67.89
÷ 23.49.75
÷ 23.51.79
÷ 23.56.89
÷ 23.57.91
÷ 23.60.97

÷ 24.37.50
÷ 24.50.76
÷ 24.51.78
÷ 24.57.90
÷ 24.61.98
÷ 25.36.47.58
÷ 25.37.49.61
÷ 25.43.61.79
÷ 25.47.69
÷ 25.48.71
÷ 25.49.73
÷ 25.61.97
÷ 26.37.48.59
÷ 26.38.50
÷ 26.43.60
÷ 26.47.68
÷ 26.48.70
÷ 26.50.74.98
÷ 26.53.80
÷ 27.36.45
÷ 27.38.49.60
÷ 27.39.51
÷ 27.40.53
÷ 27.43.59
÷ 27.45.63.81
÷ 27.48.69
÷ 27.54.81
÷ 27.60.93
÷ 27.61.95
÷ 28.37.46
÷ 28.39.50.61
÷ 28.49.70
÷ 28.51.74
÷ 28.61.94
÷ 29.35.41
÷ 29.37.45
÷ 29.38.47.56
÷ 29.40.51
÷ 29.41.53
÷ 29.43.57
÷ 29.45.61
÷ 29.47.65.83
÷ 29.48.67
÷ 29.50.71
÷ 29.51.73
÷ 29.56.83

÷ 30.41.52
÷ 30.42.54
÷ 30.49.68
÷ 30.51.72
÷ 30.52.74.96
÷ 30.54.78
÷ 30.56.82
÷ 30.57.84
÷ 30.61.92
÷ 30.62.94
÷ 30.64.98
÷ 31.48.65
÷ 31.49.67.85
÷ 31.50.69
÷ 31.59.87
÷ 31.60.89
÷ 31.64.97
÷ 32.41.50
÷ 32.50.68
÷ 32.51.70.89
÷ 32.54.76.98
÷ 32.56.80
÷ 32.59.86
÷ 32.61.90
÷ 32.65.98
÷ 34.51.68
÷ 34.52.70
÷ 34.56.78
÷ 34.57.80
÷ 34.62.90
÷ 35.48.61
÷ 35.61.87
÷ 35.62.89
÷ 36.43.50
÷ 36.47.58
÷ 36.54.72.90
÷ 36.59.82
÷ 37.48.59
÷ 37.49.61
÷ 37.59.81
÷ 37.61.85
÷ 37.64.91
÷ 38.47.56
÷ 38.49.60.71
÷ 38.50.62.74
÷ 38.51.64

÷ 38.54.70
÷ 38.56.74.92
÷ 38.64.90
÷ 38.65.92
÷ 39.48.57
÷ 39.50.61.72
÷ 39.56.73
÷ 39.60.81
÷ 39.62.85
÷ 40.51.62.73
÷ 40.56.72
÷ 40.58.76
÷ 40.59.78
÷ 40.61.82
÷ 41.52.63
÷ 41.60.79
÷ 41.62.83
÷ 41.63.85
÷ 41.65.89
÷ 41.67.93
÷ 41.68.95
÷ 42.51.60
÷ 42.56.70
÷ 42.59.76
÷ 42.60.78
÷ 42.61.80
÷ 42.70.98
÷ 43.52.61.70
÷ 43.61.79
÷ 43.62.81
÷ 43.65.87
÷ 43.67.91
÷ 45.62.79
÷ 45.63.81
÷ 45.67.89
÷ 45 68.91
÷ 46.58.70
÷ 46.59.72
÷ 46.72.98
÷ 47.58.69
÷ 47.65.83
÷ 48.59.70
÷ 48.60.72
÷ 48.70.92
÷ 48.72.96
÷ 49.58.67

÷ 49.60.71.82	÷ 52.73.96	÷ 59.71.83	÷ 67.81.95
÷ 49.61.73.85	÷ 52.74.96	÷ 60.71.82.93	÷ 69.75.81
÷ 49.62.75	÷ 53.62.71.80	÷ 60.72.84	÷ 70.81.92
÷ 49.65.81	÷ 53.67.81	÷ 61.72.83.94	÷ 70.82.94
÷ 49.67.85	÷ 53.71.89	÷ 61.73.85	÷ 70.83.96
÷ 50.61.72.83.94	÷ 53.72.91	÷ 61.75.89	÷ 71.82.93
÷ 50.62.74	÷ 54.62.70	÷ 61.78.95	÷ 71.83.95
÷ 50.64.78.92	÷ 54.63.72.81.90	÷ 62.71.80	÷ 72.81.90
÷ 50.67.84	÷ 54.67.80.93	÷ 62.73.84.95	÷ 72.83.94
÷ 50.71.92	÷ 54.70.86	÷ 62.78.94	÷ 72.84.96
÷ 50.72.94	÷ 54.72.90	÷ 63.72.81.90	÷ 73.82.91
÷ 50.73.96	÷ 54.73.92	÷ 63.74.85	÷ 73.84.95
÷ 50.74.98	÷ 54.76.98	÷ 63.80.97	÷ 74.82.90
÷ 51.62.73	÷ 56.70.84	÷ 64.72.80	÷ 74.83.92
÷ 51.67.83	÷ 56.73.90	÷ 64.73.82.91	÷ 74.85.96
÷ 51.69.87	÷ 56.74.92	÷ 64.78.92	÷ 75.83.91
÷ 51.70.89	÷ 57.69.81	÷ 65.73.81	÷ 75.84.93
÷ 51.72.93	÷ 58.64.70	÷ 65.74.83	÷ 76.83.90
÷ 52.61.70	÷ 58.74.90	÷ 65.78.91	÷ 76.84.92
÷ 52.63.74	÷ 58.76.94	÷ 65.81.97	÷ 76.85.94
÷ 52.71.90	÷ 59.70.81	÷ 67.80.93	

Notă. 1°. D-şoara LYDIA M. TUDORAN (Cl. VI-a, Şc. Centrală de fete „Maria Brâncoveanu", Bucureşti) a dat o soluţie foarte bună găsind 370 din cele 423 de soluţiuni. D-sa a dat diferitele valori succesive pe care le poate avea raţia progresiei cerute şi apoi a căutat a determina valorile lui u_1 şi zi prin încercări. Soluţia D-şoarei L. TUDORAN este impecabilă din punct de vedere al prezentării, acurateţei şi ordinei, cum de altfel am mai observat şi cu ocazia altor probleme trimise de d-sa.

D-şoara TUDORAN a căutat şi progresiile geometrice cu aceleaşi caracteristice ca cele aritmetice cerute în enunţul acestei probleme şi a găsit următoarele 12 soluţii:

∺ 02.14.98	∺ 07.14.28.56	∺ 09.18.36.72	∺ 17.34.68
∺ 03.12.38	∺ 07.21.63	∺ 09.27.81	∺ 18.36.72
∺ 04.12.36	∺ 08.16.32.64	∺ 14.28.56	∺ 19.38.76

2°. D-l P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar, Iaşi) a dat o soluţie parţială găsind numai 6 progresii.

3°. Am căutat şi am găsit *toate* progresiile aritmetice şi geometrice scrise cu cifre diferite, progresii pe care le voiu publica cu alt prilej.

GH. B.

PROBLEMA 5414. *Fie* A', B', C' *picioarele înălțimilor triunghiului* ABC; M *mijlocul lui* BB'; N *intersecția lui* BC *cu* AM. *Paralela din* N *la* AB *întâlnește pe* BB' *în* Q, *iar* AQ *întâlnește pe* BC *în* P_a *și paralela din* Q *la* BC *întâlnește pe* AC *în* Q'. *Să se arate că:*

$$1^0. \qquad \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{\overline{AH}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CH}} = \frac{\overline{AB'}\cdot\overline{BC'}\cdot\overline{CA'}}{\overline{A'H}\cdot\overline{B'H}\cdot\overline{C'H}}$$

H *fiind ortocentrul triunghiului* ABC;

2^0. *Punctele* A, B', Q', C *formează o diviziune armonică.*

$$3^0. \qquad 2\,\overline{Q'C}\cdot\overline{B'A} = \overline{Q'A}\cdot\overline{B'C}.$$

4^0. *Punctele* P_a *și analoagele lui* P_b, P_c *sunt picioarele a trei ceviene*[1]).

D. D. BUZNEA.

Soluție dată de D-l MARIN GH. POPESCU (Lic. „Brătianu", Pitești).

1^0. Pe figură se vede că

$$\overline{AB'} = \overline{AB}\cos A \quad ; \quad \overline{A'H} = \overline{CH}\cos B.$$

Scriind și celelalte relațiuni analoage și înmulțindu-le se găsește egalitatea de demonstrat la 1^0.

2^0. Aplicând teorema lui CEVA triunghiului BAP_a și cevienelor AN, BQ, $P_a M'$ găsim

$$(1) \qquad \frac{NB}{NP_a}\cdot\frac{QP_a}{QA}\cdot\frac{M'A}{M'B} = -1$$

dar QN fiind paralelă cu AB

$$\frac{NB}{NP_a} = \frac{QA}{QP_a}$$

și ducând în (1) se găsește că

$$\overline{M'A} = \overline{M'B}$$

și deci $MM'P_a$, unind mijloacele laturilor BB', BA în triunghiul

1) Punctul 4^0 este rectificat, față de enunțul de la pagina 223.

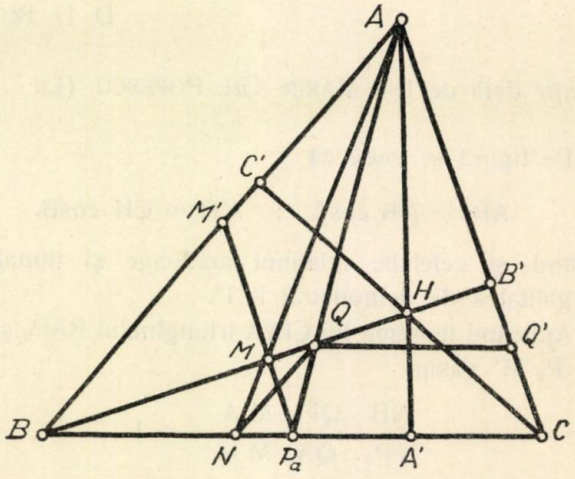
BB'A, este paralelă cu AC şi trece prin mijlocul lui BC. Punctul P_a fiind mijlocul lui BC, care este paralelă cu raza QQ' a fascicolului Q (AQQ'C) înseamnă, după o teoremă bine cunoscută că acest fascicol este armonic, ceea ce demonstrează punctul 2° al problemei.

3°. Din 2° rezultă

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'Q'}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CQ'}}$$

care se mai poate scrie

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{B'A}} = \frac{2}{\overline{Q'A}}$$



de unde se deduce succesiv

$$\overline{Q'A}\,(\overline{CA} + \overline{B'A}) = 2\,\overline{CA}\cdot\overline{B'A}$$

$$\overline{Q'A}\,(2\,\overline{B'A} + \overline{CB'}) = 2\,\overline{CA}\cdot\overline{B'A}$$

$$\overline{Q'A}\cdot\overline{CB'} = 2\,\overline{B'A}\,(\overline{CA} - \overline{Q'A}) = 2\,\overline{B'A}\cdot\overline{Q'C}$$

4°. Rezultă imediat din faptul că AP_a, BP_b, CP_c sunt medianele triunghiului ABC.

Notă. 1°. D-l M. GH. POPESCU, observă că demonstrarea proprietăţilor 2°, 3°, 4° nu a făcut uz de faptul că AA', BB', CC' sunt înălţimi, deci aceste proprietăţi subzistă oricare ar fi cevienele AH, BH, CH.

2°. Pentru proprietăţile 2° şi 3° nici nu-i nevoie de considerat 3 ceviene, ci o dreaptă oarecare BB', mijlocul ei M, etc.

3°. Au rezolvat foarte bine problema pe căi analoage rectificând punctul 4° al enunţului D-nii P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar Iaşi) şi R. P. VOINEA (Lic. „Fraţii Buzeşti", Craiova).

G-l GH. B.

PROBLEMA 5417. *Se consideră conica cu un focar* $F(\frac{1}{2}p, 0)$, *directoarea corespunzătoare* $D(x = -\frac{1}{2}p)$ *şi de excentricitate* e. *Dacă* M *este un punct arbitrar în planul conicei şi perpendiculara din* M *pe polara lui taie axa focală în* N, *iar* M *se proiectează pe aceeaşi axă în* P, *avem*

$$\overline{ON} - e^2\,\overline{OP} = \text{const.} = \frac{1}{2}p(1+e^2).$$

Să se deducă o proprietate a parabolei.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-l C. D. EFTIMIE (elev-inginer Bucureşti). Conform definiţiei, conica va avea ecuaţia

$$\left(x-\frac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = e^2\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2.$$

Fie $M(x_0, y_0)$. Ecuaţia perpendicularei din M pe polară

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0 - \frac{1}{2}p - e^2\left(x_0 + \frac{1}{2}p\right)}(x - x_0)$$

taie axa Ox în

$$N\left[e^2x_0 + \frac{1}{2}p(1+e^2),\ 0\right]$$

deci

$$\overline{ON} - e^2\,\overline{OP} = \frac{1}{2}p(1+e^2).$$

Pentru parabolă, $e = 1$ şi obţinem $NP = p$ [1].

1) PITAGORA, V, 212.

Observare. D-l MARIN F. VĂDUVA (elev-inginer Bucureşti) a interpretat O drept un vârf al conicei — dintre F şi D — adică

$$O\left[\frac{1}{2}p \cdot \frac{1-e}{1+e}, 0\right]$$

şi a aflat

$$\overline{ON} - e^2 \overline{OP} = pe = \text{constant}$$

ceea ce constitue o generalizare mai naturală a proprietăţii parabolei.

PROBLEMA 5480. *Un rezervor cilindric descoperit, de rază r, umplut cu apă până la un nivel a deasupra fundului, este transportat cu un autocamion. La un moment dat, când autocamionul se află în mişcare rectilinie orizontală cu iuţeala v_0, şoferul debreiază motorul şi blochează roţile. In urma acestei manevre, apa din rezervor se ridică în partea dinainte a vasului la o înălţime h ($h > a$).*

Să se determine lungimea pe care va derapa autocamionul şi timpul în care are loc deraparea. Să se calculeze coeficientul de frecare dintre cauciucuri şi şosea, coeficient presupus constant în tot timpul mişcării.

Aplicaţie pentru:

$r = 0{,}60$ m; $a = 0{,}70$ m; $h = 0{,}90$ m; $v = 30$ km/oră.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de Domnii: C. D. EFTIMIE şi M. STĂNCULESCU (elevi ai Şcoalei Politechnice din Bucureşti).

Să notăm cu G şi M *greutatea totală*, respectiv *masa totală* a autocamionului inclusiv încărcătura şi ocupanţii, cu G_1 şi G_2 *greutăţile transmise prin roţile dinainte şi dinapoi*, cu f *coeficientul de frecare* dintre cauciuc şi şosea şi cu w *acceleraţie* în mişcarea autocamionului.

Frecările ce se vor desvolta sunt:

$$F_1 = fG_1 \quad ; \quad F_2 = fG_2$$

a căror rezultantă este:

$$F = F_1 + F_2 = f(G_1 + G_2) = fG.$$

Acceleraţia de întârziere în mişcarea autocamionului va fi:

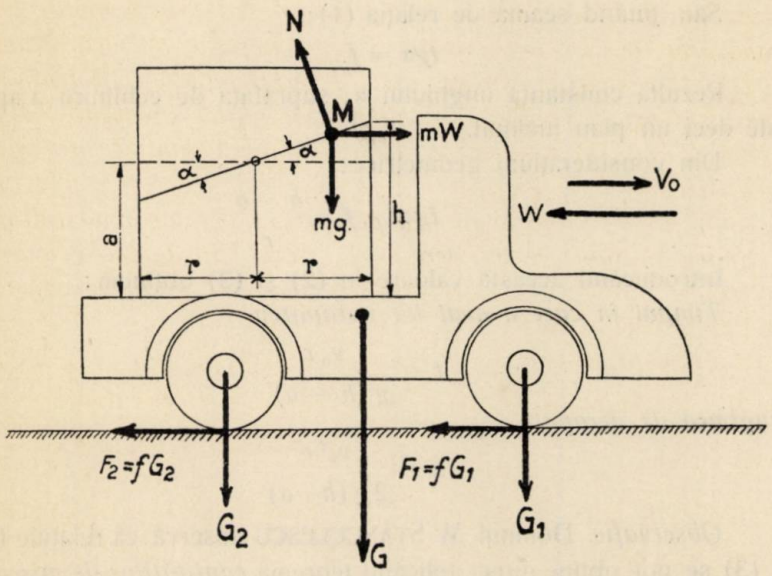
$$w = \frac{F}{M} = \frac{fG}{\frac{G}{g}} = fg \qquad (1)$$

iar *ecuaţia mişcării:*

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} wt^2 = v_0 t - \frac{1}{2} fgt^2.$$

Rezultă:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - fgt.$$



Autocamionul se va opri pentru:

$$v = 0 \ , \ t = \frac{v_0}{fg} \qquad (2)$$

după ce va străbate distanţa:

$$x = v_0 \frac{v_0}{fg} - \frac{1}{2} fg \left(\frac{v_0}{fg}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2fg}. \qquad (3)$$

Să considerăm acum o *moleculă* M, de masă *m*, situată la suprafaţa lichidului.

Această moleculă este în *echilibru relativ* în raport cu autocamionul sub acţiunea următoarelor forţe: greutatea moleculei *mg*, *forţe de inerţie mw* şi reacţiunea N a lichidului îndreptată după normala la suprafaţă.

Fie α unghiul făcut de planul tangent la suprafaţa apei cu orizontala.

Avem prin proiecţiuni:

$$N = mg\cos\alpha + mw\sin\alpha \quad ; \quad mw\cos\alpha = mg\sin\alpha.$$

De unde:

$$tg\alpha = \frac{w}{g}.$$

Sau, ţinând seama de relaţia (1):

$$tg\alpha = f.$$

Rezultă constanţa unghiului α; suprafaţa de echilibru a apei este deci un plan înclinat.

Din consideraţiuni geometrice:

$$tg\alpha = f = \frac{h - a}{r}.$$

Introducând această valoare în (2) şi (3) obţinem:

Timpul în care a avut loc deraparea

$$t = \frac{v_0 r}{g(h - a)};$$

lungimea de derapare

$$x = \frac{v_0^2 r}{2g(h - a)}.$$

Observaţie. Domnul M. STĂNCULESCU observă că relaţiile (2) şi (3) se pot obţine direct aplicând teorema *cantităţilor de mişcare* şi teorema *energiei cinetice* între poziţia iniţială când iuţeala este v_0 şi poziţia finală de iuţeală nulă. Astfel avem:

$$-Mv_0 = -Ft = -fGt$$

$$\therefore \quad t = \frac{v_0}{fg}$$

$$-\frac{1}{2}Mv_0^2 = -Fx = -fGx$$

$$x = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

In cazul *aplicației:*

$$f = tg\alpha = \frac{1}{2} 0{,}333 \qquad \alpha \sphericalangle 18^0 26'$$

$t =$ 2,55 secunde

$x =$ 10,62 metri.

AL. ST.

EXERCIȚII

1. r și p fiind prime, numărul $r^p - 1$ nu poate fi putere r perfectă.

IULIAN PETRESCU.

R. Conform unei proprietăți cunoscute numărul $\frac{r^p - 1}{r - 1}$ are toți factorii primi de forma $kp + 1$.

Va trebui deci ca:

$$\frac{r^p - 1}{r - 1} = (kp + 1)^r$$

$$r^p = (kp + 1)^r (r - 1) + 1 = Qr + k^r p^r$$

de unde rezultă: $k = k'r$ și înlocuind:

$$r^p (k'pr + 1)^r (r - 1) + 1 = Qr^2 + (r - 1) + 1 = r(Qr + 1)$$

ceea ce este imposibil.

2. Fie O un punct în planul unui triunghiu oarecare ABC iar D, E, F punctele unde AO, BO, CO taie laturile opuse. Se cere să se determine punctul O astfel ca să avem:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OF}} = k$$

VICTOR FLORESCU.

R. Relația:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BO}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CO}}{\overline{CF}} = 2.$$

devine

$$3\frac{k}{k+1} = 2$$

deci $k = 2$ și O este centrul de greutate al triunghiului.

PROBLEME PROPUSE

5542. Se dau două dreptunghiuri şi se aşează unul peste altul. Care este suprafaţa cea mai mare cu care unul din ele poate acoperi pe celălalt?

I. IONESCU.

5543. Un mocan murind lasă pe limbă de moarte, ca oile sale să fie împărţite între copiii săi, după cum urmează: Primul copil să ia 10 oi şi $\frac{1}{9}$ din oile, ce-au mai rămas; al doilea copil să ia 20 oi şi $\frac{1}{9}$ din oile, ce-au mai rămas; al treilea copil să ia 30 oi şi $\frac{1}{9}$ din oile, ce-au mai rămas şi aşa mai departe. Câţi *copii* şi câte *oi* a avut mocanul, ştiind că fiecare copil a luat acelaşi număr de oi.

(Să se dea o soluţie aritmetică).

ION S. ANTONIU.

5544. Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din ele *zece* cifre ale sistemului zecimal, să se formeze *patru* numere aşa încât

$$a + bc + def = ghij,$$

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ fiind cifre.

G-L GH. BUICLIU.

5545. Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 să se formeze un patrat perfect a cărui rădăcină să fie de forma *abocd.*

V. THÉBAULT.

5546. Să se determine cifrele a şi b, astfel ca expresia:

$$E \equiv 1941^{1940+a} + 1942^{1941+b}$$

divizată cu 11 să dea restul 3, iar divizată cu 13 să dea restul 1.

Care ar trebui să fie restul diviziunii prin 11 sau prin 13 pentru ca să avem cel puţin o valoare comună pentru cifrele a şi b?

COMANDOR I. LINTEŞ.

5547. Să se studieze seria cu termenul general

$$U_n = \frac{1}{1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}}$$

după diverse valori ce poate lua a.

GH. TH. GHEORGHIU.

5548. Ce condiţie trebue să îndeplinească m, pentru ca ecuaţia algebrică

$$(x+1)^m - x^m - 1 = 0$$

să aibă rădăcini multiple? Să se determine apoi aceste rădăcini.

TH. ANGHELUŢĂ.

5549. Să se construiască geometriceşte şi numai prin consideraţii geometrice un romb căruia i se cunoaşte un unghiu şi suprafaţa k^2.

VIRGIL GHIŢESCU.

5550. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct mobil M şi se consideră mijloacele B' şi C' ale segmentelor MB şi MC. Perpendicularele în B' şi C' întâlnesc pe AB şi AC respectiv în B_1 şi C_1. Să se afle locul centrului cercului AB_1C_1.

P. TROFIM.

5551. Fie o piramidă cu vârful S şi baza un patrulater plan ABCD. Se ştie că o astfel de piramidă se poate tăia cu un anumit plan după un paralelogram $A_1B_1C_1D_1$. Să se calculeze laturile paralelogramului în funcţie de $SA_1 = x$.

Să se găsească condiţiile în care paralelogramul $A_1B_1C_1D_1$ este un romb.

ADRIAN GHEORGHIU.

5552. Se consideră un punct M pe cercul O, circumscris triunghiului ABC. Fie P şi Q extremităţile diametrului cercului O, paralel cu *dreapta lui Simson* a punctului M în raport cu triunghiul ABC. Să se demonstreze:

1. Dreptele MP şi MQ sunt tangentele, în M, la cele două parabole înscrise în triunghiul ABC şi trecând prin M.

2. Aceleaşi drepte sunt paralele cu axele conicilor circumscrise patrulaterului ABCM.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5553. Să se construiască un triunghiu căruia îi sunt date:
a) lungimile bisectoarelor unui unghiu,
b) unghiul format de mediana și înălțimea adiacente bisectoarelor considerate.
Discuție.

O. N. ȚINO.

5554. Un punct material M alunecă fără frecare pe o elipsă invariabilă care se rotește uniform în jurul unuia din vârfuri, presupus fix. Să se studieze mișcarea punctului M și să se determine reacția elipsei, știind că asupra punctului M nu lucrează nicio forță dată.

M. GHERMĂNESCU.

5555. Un punct material parcurge un cerc orizontal de rază R cu viteza constantă v. Centrul cercului parcurge în același timp un cerc într'un plan vertical, având aceeași rază R, cu aceeași viteză v.
Să se afle traiectoria punctului material.

GABRIELA ȚIȚEICA.

5556. Patru tunuri antiaeriene identice putând asvârli proiectile cu iuțeala $v_0 = 560^m/_{sec}$ sunt așezate în colțurile unui patrat de latură $a = 7$ km. Un avion inamic, având iuțeala maximă $v = 600$ km/oră, sburând la înălțimea constantă $h = 9000$ km vrea să bombardeze un obiectiv militar situat în centrul patratului.
Să se determine *regiunile de sbor periculoase pentru avion* și să se cerceteze dacă avionul *poate să lovească obiectivul, fără a intra într'o regiune periculoasă.* Gurile tunurilor vor fi presupuse situate *în același plan orizontal;* rezistența aerului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La problema 5437 rezolvată la pag. 668, Vol. XLVI, în valoarea finală a lui S dela prima soluție se va înlocui $\sin C$ prin $\sin^2 C$.

BURSE ŞI PREMII DIN FONDURILE SOCIETĂŢII „GAZETA MATEMATICĂ“

REGULAMENTUL FONDULUI « ANGHEL SALIGNY »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea D-lui *I. Ionescu*, constitue — în conformitate cu dorinţa donatorului — un fond denumit fondul „*Anghel Saligny*“ al cărui venit să servească la publicarea de cărţi tehnice conform art. 6 din actul de donaţie şi în consecinţă înfiinţează o „*Bibliotecă tehnică a Gazetei Matematice*“.

Art. 2. — Toate cărţile tipărite din acest fond vor purta pe copertă în frunte următoarea titulatură: „*Biblioteca tehnică a Gazetei Matematice*“ (tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“).

Art. 3. — Biblioteca va avea formatul 120×185 sau 175×260 mm., după felul şi întinderea manuscriselor. Dimensiunile se înţeleg pentru cărţile broşate şi tăiate.

Art. 4. — Volumele se vor da în comerţ legate în pânză de culoare cenuşiu închis şi vor avea imprimate în auriu, inscripţiunile ce se vor stabili pentru fiecare publicaţiune în parte.

Art. 5. — Manuscrisele se adresează delegaţiunii, care convoacă o Adunare generală extraordinară pentru a alege o Comisiune de 3 membri, care se completează cu casierul şi care dă în mod definitiv avizul dacă lucrarea poate să fie tipărită din fondul „*Anghel Saligny*“; aceasta atât din punct de vedere financiar cât şi din punct de vedere al valorii ştiinţifice a lucrării.

Art. 6. — Comisiunea nu ia în considerare decât lucrările complete de matematici aplicate sau cuprins tehnic în legătură cu aceste ştiinţe.

Art. 7. — Dacă la prezentarea manuscrisului nu sunt sume disponibile din venitul fondului „*Anghel Saligny*“ pentru tipărire şi dacă Comisiunea însărcinată cu cercetarea lui opinează că e bine să fie tipărit, atunci delegaţiunea Societăţii va putea împrumuta cu dobândă de 5% cu aprobarea unei Adunări generale suma necesară tipăririi, din numerarul disponibil al „*Gazetei Matematice*“.

Art. 8. — Odată cu depunerea manuscrisului, autorul este obligat să declare în scris că se va supune dispoziţiilor acestui

regulament şi ale actului de donaţie al fondului şi că nu va tipări o a doua ediţie înainte de epuizarea ediţiei tipărită în această bibliotecă.

Art. 9. — In regulă generală se preferă lucrările membrilor Societăţii „*Gazeta Matematică*".

Art. 10. — Comisiunea pentru cercetarea lucrării, hotărăşte pentru fiecare ediţiune tipărită conform acestui regulament numărul volumelor, formatul (conform art. 3), inscripţiunile (conform art. 4) şi preţul. De asemenea Comisia va urmări tipărirea şi va lua la timp dispoziţii speciale necesare.

Art. 11. — (art. 4 din actul de donaţie al fondului „*Anghel Saligny*"). — Sumele ce se încasează din vânzarea cărţilor după ce se scot din ele cheltuelile de cost, comision şi expediţie, se distribue în modul următor:

a) 10% autorului respectiv;

b) 20% Societăţii „*Gazeta Matematică*" pentru sporirea capitalului ei;

c) 20% fondului „*Anghel Saligny*" pentru sporirea lui continuă, şi

d) 50% drept venit al fondului „*Anghel Saligny*", întrebuinţându-se prin urmare pentru noui publicaţiuni.

Art. 12. — Autorul primeşte gratuit câte 10 volume din lucrările lui, la fiecare ediţie.

REGULAMENTUL BIBLIOTECII « GEORGE ŢIŢEICA »

Art. 1. — Pentru cinstirea memoriei Profesorului GEORGE ŢIŢEICA, Societatea *Gazeta Matematică*, primind donaţiunea făcută de către familia lui, a hotărît înfiinţarea unei biblioteci de Matematici Elementare, care să permită elevilor să-şi completeze şi să-şi desvolte cunoştinţele de matematici căpătate în şcoli.

Art. 2. — Biblioteca va purta numele de „*Biblioteca Matematică George Ţiţeica*" şi va fi alcătuită din broşuri cu formatul 120×183 mm., fiecare broşură conţinând 50 până la cel mult 100 pagini, inclusiv titlurile şi tabla de materii, cuprinzând monografii cu diferite chestiuni de matematici elementare cu referinţe istorice şi aplicaţii teoretice şi practice.

Art. 3. — Toate broşurile din această bibliotecă vor purta titulatura:

GAZETA MATEMATICĂ

BIBLIOTECA MATEMATICĂ „GEORGE ŢIŢEICA"

şi vor avea un număr de ordine.

Art. 4. — Pentru pregătirea broşurilor din această bibliotecă Delegaţia Societăţii se va adresa la membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, fixându-le subietul ce urmează a trata.

Conform dorinţei donatorilor, prima monografie va trata un subiect de geometrie elementară.

Art. 5. — Manuscrisele pregătite pentru tipărire se vor da în cercetare unei comisii compusă dintr'un delegat şi doi membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, de specialitatea chestiunilor tratate în manuscris.

Comisiunea îşi va da avizul, printr'un raport colectiv prezentat Delegaţiei, asupra admisibilităţii tipărirei şi a eventualelor modificări, pe care le-ar găsi necesare.

Această comisiune, completată cu autorul manuscrisului, se va îngriji de tipărire.

Art. 6. — Comisiunea prevăzută la art. 5, precedent se alege în Adunările Generale, sau în şedinţele lunare, alegerea punându-se expres la oridea zilei.

Art. 7. — Fondul pentru tipărirea Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA poate să fie sporit şi prin alte donaţii în afară de prevederile dela art. 1.

Art. 8. — Când venitul fondului, completat eventual cu alte sume donate sau cu disponibil din fondurile Societăţii *Gazeta Matematică*, va putea acoperi cheltuelile de tipărire a unei broşuri, Delegaţia Societăţii va îngriji pregătirea unui manuscris în conformitate cu acest regulament.

Art. 9. — Pentru a se începe cât mai neîntârziat tipărirea Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA, donatorii au oferit a suporta cheltuelile tipăririi primei monografii.

Art. 10. — Manuscrisele pentru Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA vor fi înaintate Societăţii *Gazeta Matematică* în trei exemplare.

Art. 11. — Din sumele realizate din vânzarea broşurilor, se vor acoperi cheltuelile de tipărire, expediere, taxe, comision de vânzare, etc. Din rest se va lua de către Societatea *Gazeta Matematică*, pentru acoperirea cheltuelilor de administrarea fondului, cota prevăzută de regulamentul general al administrării fondurilor Societăţii *Gazeta Matematică*. Restul va constitui venitul net al Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA.

Art. 12. — Din venitul net se dă autorului 10% pentru cheltuelile făcute cu alcătuirea manuscriselor, scrierea la maşină, desemnarea figurilor, etc.

Art. 13. — Din restul venitului net, jumătate se dă pentru sporirea fondului Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA şi jumătate pentru sporirea sumelor destinate tipăririi noilor broşuri.

Art. 14. — Autorii monografiilor nu vor primi nici-o remuneraţie pentru dreptul de autor. Ei vor primi 10 broşuri gratuite.

Art. 15. — Autorii monografiilor vor da, odată cu prezentarea manuscriselor, o scrisoare prin care se declară complet de acord cu prevederile prezentului regulament şi prin care se obligă a nu tipări, ei şi urmaşii lor, noi exemplare şi a nu publica monografia în alte reviste române sau străine, până când Societatea *Gazeta Matematică* nu va fi terminat vânzarea broşurilor ce posedă, sau a ediţiilor următoare, dacă Societatea hotărăşte publicarea de noi ediţii.

Numai printr'o renunţare în scris a Societăţii *Gazeta Matematică*, autorul sau urmaşii lui sunt deslegaţi de această obligaţie.

Art. 16. — La publicarea unei noi ediţii, Societatea *Gazeta Matematică* se poate adresa pentru revederea monografiei unui alt membru al Societăţii *Gazeta Matematică*, atunci când autorul monografiei nu mai este în vieaţă sau când fiind în vieaţă declară înscris că nu doreşte să se ocupe de revederea sau tipărirea unei noi ediţii a monografiei sale.

Art. 17. — Când Societatea *Gazeta Matematică* nu va mai putea îndeplini cerinţele acestui regulament, fondul Bibliotecii Matematice GEORGE ŢIŢEICA se va da Academiei Române, cu rugămintea de a continua publicarea bibliotecii, conform cu acest regulament, dacă va fi posibil, în caz contrar, fondul va rămâne la dispoziţia Academiei Române.

Art. 18. — In fiecare an, la prima Adunare Generală, Comisia prevăzută la art. 11 din Regulamentul General al administrării fondurilor *Gazetei Matematice*, va face darea de seamă asupra veniturilor şi cheltuelilor făcute şi asupra realizărilor din cursul anului.

REGULAMENTUL FONDULUI BURSEI «PROFESOR ION IONESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primeşte să administreze fondul instituit de un grup de foşti elevi ai D-lui Profesor *Ion Ionescu*, reprezentat prin D-nii *Gh. Em. Filipescu*, *A. Ioanovici*, *H. Theodoru* şi *D. Stan*, membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*, din venitul căruia să se acorde o bursă anuală elevilor „Politehnicei“ din Bucureşti.

Bursa va purta numele: *Bursa Profesor Ion Ionescu* şi este menită, în conformitate cu dorinţa donatorilor, să perpetueze tradiţia muncii şi disciplinei introduse de D-nul Prof. *Ion Ionescu* în vechea Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele şi continuate în „Politehnică“.

Art. 2. — Fondul iniţial este constituit din efecte publice 3% (Renta consolidării) în valoare nominală de 1.000.000 lei.

Art. 3. — Venitul acestui fond, micşorat cu cotele prevăzute la art. 7 din Regulamentul general al Administrării Fondurilor *Gazetei Matematice*, se acordă sub formă de bursă, plătită lunar, în rate egale, timp de 9 luni, unuia din elevii cei mai merituoşi ai Secţiei de Construcţii dela „Politehnica“ din Bucureşti, care satisface următoarele condiţii:

a) Să fie român.

b) Să fi fost cel puţin 2 ani corespondent al *Gazetei Matematice*.

c) Să fie elev în anul III sau IV al Şcoalei.

d) Să fi promovat anii anteriori în timpul minim regulamentar.

Art. 4. — Bursa este unică şi indivizibilă.

Art. 5. — Dacă într'un an nu se poate acorda bursa, ea se va acorda în anii următori elevilor care urmează în îndeplinirea condiţiilor dela art. 3. In nici un caz venitul fondului nu se capitalizează.

Art. 6. — In cazul când elevul care a avut bursa în anul III, termină toate îndatoririle din programul Şcoalei înainte de începerea cursurilor anului IV, el va continua să primească bursa, în mod automat, şi în anul IV.

Bursa poate fi suprimată în cursul anului, dacă elevul căruia i s'a atribuit, dă vădite dovezi că nu-şi mai îndeplineşte toate îndatoririle şcolare. In acest caz bursa poate fi acordată altui elev pentru restul anului.

Art. 7. — Bursa se acordă de o Comisiune, compusă din: 2 membri ai *Gazetei Matematice* dintre care unul trebue să facă parte din Delegaţie, desemnaţi de prima Adunare generală anuală; toţi profesorii şi conferenţiarii Şcoalei Politehnice dela Secţia Construcţiilor, activi şi onorari, care sunt membri ai *Gazetei Matematice*.

Aceeaşi Comisiune va hotărî şi asupra cazurilor de retragere a bursei, prevăzute la art. 6.

Art. 8. — Bursa se achită de Casierul *Gazetei Matematice* direct elevului, la 15 a fiecărei luni, începând cu 15 Octomvrie şi terminând cu 15 Iunie.

Art. 9. — Fondul iniţial poate fi mărit prin donaţiuni ulterioare, acceptate de Societatea *Gazeta Matematică*, conform cu prevederile ei statutare. Veniturile produse de aceste sporiri, se vor capitaliza până ce vor permite acordarea unei burse de valoare egală, în condiţiunile acestui Regulament.

Art. 10. — In caz de disolvare a Societăţii *Gazeta Matematică*, fondul se va trece în Administrarea „Politehnicei" din Bucureşti, cu acelaşi regulament.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ARITMETICĂ

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual de aritmetică în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la aritmetică dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulți ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri și un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 7 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna Martie.

REGULAMENTUL PREMIULUI «GHEORGHE ȚIȚEICA»

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui *„Profesor Gheorghe Țițeica“*, Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă un premiu anual de geometrie elementară în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil și se decerne autorului unor lucrări referitoare la geometrie elementară, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din țară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulți ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri și un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 11 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna Iulie.

REGULAMENTUL PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă un premiu anual de algebră în valoare de 5.000 (cinci mii) lei, din venitul fondului său general de premii.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unor lucrări referitoare la algebră, dintre cele publicate în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiunii se publică în Nr. 9 al „*Gazetei Matematice*“, care apare în luna Mai.

REGULAMENTUL PREMIULUI « VASILE CONTA »

Art. 1. — In dorinţa de a permanentiza acordarea unui premiu anual pentru lucrări de filosofia matematicilor, în memoria ilustrului filosof român *Vasile Conta*, premiu instituit de către *Ana Conta Kernbach*, sora ilustrului filosof, în timpul vieţii ei, prin o contribuţie viageră anuală la Societatea „*Gazeta Matematică*“, aceasta va acorda în continuare, în fiecare an, un premiu denumit „*Vasile Conta*“ în valoare de 4.000 (patru mii) lei.

Art. 2. — Premiul se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Dacă până la acea dată nu se prezintă nicio lucrare, se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Art. 3. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din doi membri şi un delegat, care examinează lucrările; mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an, chiar dacă nu se acordă premiul.

Art. 4. — Comisiunea prezintă celei de-a doua Adunări generale din acel an, un raport prin care propune spre premiere una din lucrările prezentate, justificând alegerea.

Art. 5. — In cazul neacordării premiului într'un an sau în mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se, după propunerea Comisiunii şi aprobarea Adunării generale, unul sau mai multe premii de valoare minimă dela art. 1.

Art. 6. — Autorii lucrărilor trebue să fie români şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Art. 7. — Raportul Comisiunii se publică în numărul din Noemvrie al *„Gazetei Matematice“*.

REGULAMENTUL PREMIULUI « SPIRU HARET »

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria marelui profesor şi reformator al învăţământului, *Spiru Haret*, primul român doctor în ştiinţele matematice, Societatea *„Gazeta Matematică“* acordă în fiecare an un premiu denumit *„Spiru Haret“*, în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor adunate pentru fondul *„Spiru Haret“*, completat eventual de noi donaţii sau de Societatea *„Gazeta Matematică“* din venitul fondului său general de premii, până la suma de mai sus.

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări de mecanică sau astronomie, dintre cele publicate în *„Gazeta Matematică“*, în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul când într'unul sau mai mulţi ani de-a-rândul premiul n'ar putea fi decernat, valoarea lui pe acel an sau pe acei ani, se va adăuga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune, compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor, raportul indicând lucrările ce se propun spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 12 al *„Gazetei Matematice“*, care apare în luna August.

REGULAMENTUL PREMIULUI «V. CRISTESCU»

Art. 1. — Pentru a cinsti memoria Inginerului *V. Cristescu*, membru fondator al „*Gazetei Matematice*", în jurul căreia a animat şi activat intens şi neîntrerupt peste 33 ani, Societatea „*Gazeta Matematică*" acordă un premiu anual denumit „*Vasile Cristescu*" în valoare de 5.000 (cinci mii) lei.

Acest premiu va fi constituit din venitul sumelor donate de D-nii: *Gheorghe, Miron* şi *Alexandru Niculescu* şi din venitul altor eventuale donaţiuni, completate până la suma de mai sus, din venitul fondului general de premii al Societăţii „*Gazeta Matematică*".

Art. 2. — Premiul este indivizibil şi se decerne autorului unei lucrări referitoare la trigonometrie dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*" în ultimul volum apărut.

Art. 3. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de Şcoală Militară, de Şcoală Politehnică, sau student la o Facultate de ştiinţe din ţară.

Art. 4. — In cazul neacordării premiului într'un an, sau mai mulţi ani consecutivi, valoarea premiului acelui an sau acelor ani, se va adăoga la premiul anului sau anilor următori, distribuindu-se unul sau mai multe premii de valoarea minimă dela art. 1.

Art. 5. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând lucrarea ce se propune spre premiare.

Art. 6. — Raportul Comisiei se publică în Nr. 10 al „*Gazetei Matematice*" care apare în luna naşterii Inginerului *V. Cristescu*.

Art. 7. — In cazul când Societatea nu şi-ar mai putea îndeplini obligaţiunea acordării premiului de mai sus, atunci sumele donate de D-nii *Alexandru, Miron* şi *Gheorghe Niculescu* şi alţi eventuali donatori, se vor remite Liceului Naţional din Iaşi, care a avut pe *V. Cristescu* ca elev, iar dacă acest liceu n'ar mai exista, Liceului cel mai vechi din Iaşi, în funcţiune. In acest caz, din venitul sumelor acestea se va acorda un premiu anual, celui mai bun elev la matematici al liceului.

REGULAMENTUL PREMIULUI « INGINER H. CAPRIEL »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ acordă un premiu în valoare de 1000 lei, din venitul fondului „*Inginer H. Capriel*“, adunat în urma propunerii dela 2 Iunie 1912 a *Inginerului Ştefan Mirea* şi din venitul fondului general de premii.

Art. 2. — Premiul se acordă din 5 în 5 ani celei mai bune lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, ce se va prezenta Societăţii de către studenţii Universităţilor, de către elevii Şcolilor Politehnice, sau de către elevii Şcolilor Militare pregătitoare şi de aplicaţie din ţară.

Art. 3. — Lucrarea se propune de o Comisiune aleasă în acest scop şi va consta dintr'o chestiune de matematici pure sau de matematici aplicate, din programele Facultăţilor de Ştiinţe şi Şcolilor speciale de Ingineri şi Ofiţeri.

Art. 4. — Comisiunea se compune din doi membri şi un delegat şi se alege de către prima Adunare generală din anul în care începe o perioadă de 5 ani. Această Comisiune pregăteşte chestiunile până în luna Mai a anului următor când se vor publica în „*Gazeta Matematică*“.

Aceleaşi chestiuni se vor publica în fiecare an în numărul „*Gazetei Matematice*“ din luna Mai, până la expirarea anului al 4-lea din perioada de 5 ani pentru care au fost propuse.

Art. 5. — Lucrările — semnate de autor — se trimit Societăţii cel mai târziu până la 1 Mai al anului care precede decernarea premiului. Decernarea se face de a doua Adunare generală a celui al 5-lea an, în urma raportului Comisiunii dela art. 4, publicându-se rezultatul în numărul din Octomvrie următor.

Art. 6. — Premiul este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă, valoarea lui se adaugă la premiul perioadei sau perioadelor următoare de 5 ani, până la decernare.

REGULAMENTUL
FONDULUI «GENERAL SC. PANAITESCU»

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea *Generalului Scarlat Panaitescu*, înfiinţează un fond denumit fondul „*General Scarlat Panaitescu*“, din venitul căruia, şi în confor-

mitate cu dorința donatorului, să se acorde un premiu celei mai bune lucrări de matematică aplicată la științele militare, publicată *în decurs de 5 ani.*

Art. 2. — Studiile în manuscris care se aduc la cunoștiința Societății pe orice cale, se iau și ele în considerație la acordarea premiului.

Art. 3. — Premiul poartă numele: *„Premiu pentru lucrări de matematică aplicată la științele militare“.*

Art. 4. — Autorii publicațiilor prezentate trebue să fie români și să-și fi făcut cultura matematică în țară.

Art. 5. — Premiul este indivizibil și se acordă neapărat la fiecare 5 ani. In cazul când nu se găsește nicio lucrare de premiat sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voiește a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică și chestiuni de matematică aplicată la științele militare.

Art. 6. — Prima Adunare generală din fiecare an alege o Comisiune compusă dintr'un delegat al Societății și doi membri, între care cel puțin un ofițer, Comisiune care examinează lucrările apărute în cursul anului. Mandatul acestei Comisiuni este limitat la un an chiar când premiul nu se decerne.

Art. 7. — Comisiunea prezintă celei de a doua Adunări generale un raport asupra lucrărilor publicate în cursul anului expirat sau asupra manuscriselor aduse la cunoștința Societății în același timp. Comisiunea anului în care se face decernarea premiului, trebue să propună în raportul său, spre premiare, lucrarea cea mai meritoasă ajunsă la cunoștința Societății în cursul ultimilor 5 ani; această Comisiune va avea deci să țină seamă de cele patru rapoarte anterioare.

Art. 8. — Raportul Comisiunii din anul în care se face decernarea premiului, se publică în numărul *„Gazetei Matematice“* din Septemvrie următor Adunării generale care a aprobat decernarea.

REGULAMENTUL
FONDULUI « LT.-COLONEL GH. A. TĂNĂSESCU »

Art. 1. — Societatea *„Gazeta Matematică“* primind legatul decedatului *Al. Tănăsescu*, înființează un fond denumit fondul *„Lt.-Colonel G. A. Tănăsescu“*, în memoria fiului său.

Art. 2. — Din venitul acestui fond se vor da cărţi de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice.*

Art. 3. — In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile vor mări fondul.

REGULAMENTUL PREMIULUI « NICOLAE G. BOTEA »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“ primind donaţiunea D-lui Profesor *G. Botea,* pentru a cinsti memoria fiului său *Nicolae G. Botea,* fost distins corespondent al *Gazetei* şi membru al Societăţii, constitue un fond denumit fondul „*Nicolae G. Botea*“, din al cărui venit să se acorde un premiu anual, constând din cărţi de ştiinţă, autorului celei mai bune lucrări (articol, notă, problemă rezolvată) de *geometria triunghiului şi a tetraedrului,* dintre cele publicate în „*Gazeta Matematică*“, în ultimul volum apărut.

Art. 2. — Autorul lucrării premiate trebue să fie român, elev de liceu, de şcoală militară, de Politehnică sau student de Facultate din ţară.

Art. 3. — Fondul se poate mări atât de donator cât şi de alte persoane. Toate sumele atribuite fondului se transformă în rente de Stat sau efecte garantate de Stat.

Art. 4. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 5. — Prima Adunare generală anuală alege o Comisie compusă din doi membri şi un delegat, care prezintă celei de-a doua Adunări generale din acelaşi an raportul indicând autorul şi lucrarea ce se propune spre premiare. In acelaşi raport se vor specifica şi cărţile ce vor constitui premiul.

Art. 6. — Raportul Comisiei, aprobat de Adunarea generală se publică în Nr. 5 al *Gazetei Matematice,* care apare în luna Ianuarie.

Art. 7. — In cazul când Societatea nu s'ar mai putea obliga cu realizarea dorinţei donatorului, atunci fondul adunat până în acel moment, va fi trecut Comitetului şcolar al Colegiului Naţional Sft. Sava din Bucureşti, pentru ca din venit să se dea la finele fiecărui an şcolar, cărţi de ştiinţă, celui mai silitor elev din clasa III-a A a acelui colegiu.

REGULAMENTUL PREMIULUI « INGINER ALEXANDRU ROȘU »

Art. 1. — Societatea „*Gazeta Matematică*“, primind donațiunea D-lui *Alexandru A. Roșu*, pentru a cinsti memoria tatălui său Inginer *Alexandru Roșu*, fost corespondent neobosit și fost membru activ al *Gazetei Matematice*, constitue un fond denumit fondul „*Inginer Al. Roșu*“ din al cărui venit să se acorde un premiu anual, în numerar.

Art. 2. — Premiul este indivizibil și se decerne *celui mai harnic corespondent* al *Gazetei Matematice*, elev de liceu, pentru activitatea depusă în cursul ultimului volum apărut.

Art. 3. — Premiul se va acorda în orice caz în fiecare an.

Art. 4. — A doua Adunare generală anuală alege o Comisiune compusă din 2 membri și un delegat care prezintă primei Adunări generale a anului următor raportul indicând elevul premiat.

Art. 5. — Raportul Comisiunei se publică în Nr. 8 al *Gazetei Matematice*, care apare în luna decesului Inginerului *Alexandru Roșu*.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Badea A. I. (4452); *Bakonyi C.* (5374); *Bodnărescu M. H.* (5486); *Cruceru Gh. C.* (5486); *Drăghicescu P. P.* (5205, 300); *Eftimie D. C.* (5374, 510); *Georgescu D.* (N.); *Ionescu Corn.* (5399); *Mareş I. Em.* (3965); *Margulius M.* (2539); *Mihăilescu C. C.* (5475); *Modâlcă S. Em.* (5510); *Musceleanu I.* (5282); *Negrea A. M.* (5486); *Niculescu C. M.* (5390, 95); *Pantelimon C.* (5486); *Popa D. M.* (5176); *Popescu F.* (5366); *Popescu Gh. Marin* (4452, 5434, 86); *Pupezescu G. I.* (5486); *Reischer H.* (5369); *Sbârnea D. G.* (5116, 300).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, III, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa :

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon : 3-9803).

C. 73.375

BIBLIOTECA CENTRALĂ
BIBLIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1941

SUMARUL

1. Relativ la o configuraţie din triunghiu . *Iulian Petrescu.*
2. Concursul „Gazetei Matematice" din 1942. *Delegaţia Societăţii.*
3. Note Matematice: 3 — 5.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3920, 4280, 4931, 5119, 5231, 5313, 5316, 5319, 5346, 5361, 5372, 5428.
9. Exerciţii: 3 — 4.
10. Probleme propuse: 4991, 5557 — 5568.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **55**42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

Avem plăcerea a anunţa că dela 18 Septemvrie a. c. mai face parte din Societatea noastră şi D-l EUG. I. BALLAN, inginer.

RELATIV LA O CONFIGURAȚIE DIN TRIUNGHIU

In planul triunghiului ABC se consideră două puncte P_1 și P_2, triunghiurile lor pedale $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, polarele lor triliniare $\overline{\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'}$ (Δ_1), $\overline{\alpha_2'\beta_2'\gamma_2}$ (Δ_2) și punctele $\alpha_1'', \beta_1'', \gamma_1''$ și $\alpha_2'', \beta_2'', \gamma_2''$ unde triunghiurile $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ întâlnesc respectiv Δ_1, Δ_2. Fie de asemenea A_1', B_1', C_1' și A_2', B_2', C_2' punctele în care Δ_2 și Δ_1 întâlnesc respectiv P_1A, P_1B, P_1C; P_2A, P_2B, P_2C iar A_1, B_1, C_1 și A_2, B_2, C_2 conjugatele armonice ale lor în raport cu P_1A, P_1B, P_1C; P_2A, P_2B, P_2C. Se poate demonstra că:

1. *Punctele* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ *sunt pe o aceeași conică* Γ.

2. *Triunghiurile* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *și* $A_2B_2C_2$; $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ *și* $A_1B_1C_1$ *sunt respectiv omologice de axe* $\overline{\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'}$, $\overline{\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'}$, *centrele lor de omologie* ω_1, ω_2 *fiind respectiv polurile axelor* Δ_1, Δ_2 *în raport cu* Γ; *dreptele* PASCAL *respectiv ale exagoanelor* $\alpha_1C_2\beta_1A_2\gamma_1B_2$ *și* $\alpha_2C_1\beta_2A_1\gamma_2B_1$ *sunt* $\overline{A_2'B_2'C_2'}$ și $\overline{A_1'B_1'C_1'}$.

3. *Punctele* $P_1, P_2, \omega_1, \omega_2$ *sunt colineare pe o aceeași dreaptă* D *polara în raport cu* Γ *a intersecției* (Δ_1, Δ_2).

4. *Polurile dreptelor* $\alpha_1A_2, \beta_1B_2, \gamma_1C_2$ *și* $\alpha_2A_1, \beta_2B_1, \gamma_2C_1$ *în raport cu* Γ *sunt respectiv punctele* $\alpha_1'', \beta_1'', \gamma_1''$ *și* $\alpha_2'', \beta_2'', \gamma_1''$ *și prin urmare centrul conicei se află la intersecția comună a dreptelor ce trec prin aceste puncte și prin mijloacele segmentelor corespunzătoare* $\alpha_1A_2, \beta_1B_2, \gamma_1C_2$ *și* $\alpha_2A_1, \beta_2B_1, \gamma_2C_1$, *fie acest punct* ω.

Pentru aceasta vom proiecta figura astfel ca Δ_2 să fie aruncată la infinit; $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ devine triunghiul complimentar al lui ABC iar $A_1B_1C_1$ mijloacele segmentelor P_1A, P_1B, P_1C.

Deducem în primul rând din noua figură că $\alpha_2A_1, \beta_2B_1, \gamma_2C_1$ se întâlnesc în mijlocul lor, întru cât $\beta_2\gamma_2B_1C_1, \gamma_2\alpha_2CA, \alpha_2\beta_2AB$ sunt paralelograme ($\beta_2\gamma_2 \parallel B_1C_1 \parallel BC, \beta_2C_1 \parallel \gamma_2B_1 \parallel P_1A$ etc.) și prin urmare diagonalele lor trebue să se taie la jumătate.

Există deci o conică Γ care trece prin $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, A_1, B_1, C_1$ cu centrul în ω_2, centrul de omoteție al triunghiurilor omotetice $\alpha_2\beta_2\gamma_2, A_1B_1C_1$.

Se poate arăta de asemenea că punctele $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, B_1, C_1, \alpha_1$ sunt pe o conică, această conică, trebuind să fie în acest caz chiar Γ, deoarece o conică este determinată de cinci puncte.

In adevăr, bazându-ne pe proprietatea diametrilor conjugați unei direcții și observând că $\beta_2\gamma_2 \parallel B_1C_1 \parallel \alpha_2\alpha_1$, rezultă că pentru ca

punctele $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, A_1, B_1, C_1$ să fie pe o conică trebue ca mijloacele segmentelor $\beta_2\gamma_2, B_1C_1, \alpha_2\alpha_1$ să fie coliniare, ceea ce se obţine imediat dacă se ţine seama de faptul că $P_1B_1\alpha_2C_1$ este paralelogram şi deci B_1C_1 şi α_2P_1 se întâlnesc în mijlocul lor; o paralelă prin mijlocul lui B_1C_1 la P_1A trece şi prin mijloacele segmentelor $\beta_2\gamma_2, \alpha_2\alpha_1$.

Analog se arată că şi β_1, γ_1 sunt pe conica Γ.

O altă proiecţie asupra figurii de referinţă astfel ca de rândul acesta Δ_1 să fie aruncată la infinit ne conduce la concluzia că şi $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, sunt pe Γ şi deci (1) este demonstrată.

In ceea ce priveşte (2) s'a arătat în prima proiecţie că triunghiurile $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $A_1B_1C_1$ sunt omotetice, sau cu alte cuvinte omologice având ca axă dreapta dela infinit care este tocmai polara triliniară a lui $P_2 \equiv G$ centrul de greutate al triunghiului ABC, şi au centrul de omoteţie în centrul conicei Γ, sau cu alte cuvinte polul dreptei dela infinit în raport cu Γ. De asemenea $\beta_2\gamma_2 \parallel B_1C_1 \parallel P_1A$ etc. Analog din a doua proiecţie.

Pentru (3) se va observa că în prima proiecţie punctele $P_1, \omega_2, P_2 \equiv G$ satisfac relaţia lui MENELAUS relativ la triunghiul $AA_1\alpha_2$ de exemplu, căci:

$$\frac{P_1A_1}{P_1A} = \frac{1}{2}, \quad \frac{P_2A}{P_2\alpha_2} = 2 \cdot \frac{\omega_2\alpha_2}{\omega_2A_1} = 1$$

şi deci P_1, P_2, ω_2 sunt coliniare.

Analog din cea de a doua proiecţie se obţine coliniaritatea P_1, P_2, ω, şi deci (3).

De asemenea, dacă în aceeaşi proecţie se consideră figura $P_1ABC\beta_1\gamma_1$ ca un patrulater complet, diagonalele P_1A, BC, $\beta_1\gamma_1$ trebue să aibă mijloacele în linie dreaptă; diametrul α_2A_1 al conicei taie deci coarda $\beta_1\gamma_1$ în mijlocul ei şi prin urmare $\beta_1\gamma_1$ este direcţia conjugată diametrului α_2A_1.

Rezultă că tangentele în α_2 şi A_1 la conică sunt paralele la $\beta_1\gamma_1$; ele se întâlnesc prin urmare în punctul α_2'' proiectat la infinit odată cu Δ_2.

Analog se obţin polurile dreptelor β_2B_1, γ_2C_1, iar din cea de-a doua proiecţie, cele ale dreptelor $\alpha_1A_2, \beta_1B_2, \gamma_1C_2$, şi în cele din urmă (4).

Să obținem acum și câteva cazuri remarcabile.

Deosebim în primul rând cazul când ω, centrul conicei se află pe D. Pentru aceasta e suficient și necesar ca Δ_1, Δ_2 să aibă punctul lor comun la infinit, după cum rezultă din (3). Distingem:

I. $\Delta_1 \parallel \Delta_2$. D este diametru conjugat direcției $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.

II. Δ_2 la infinit. Acest caz s'a studiat mai sus. Mai precizez că D este diametru conjugat direcției Δ_1.

Când $P_1 \equiv H$, ortocentrul triunghiului se obține cercul lui EULER. Voiu mai remarca pentru această configurație:

a) *Dreptele care unesc picioarele înălțimilor cu punctele corespunzătoare în care medianele taie a doua oară cercul lui* EULER *sunt trei drepte concurente pe dreapta lui* EULER.

b) *Polara triliniară a ortocentrului este perpendiculară pe dreapta lui* EULER.

Un alt caz particular interesant este:

III. $\Delta_1 \equiv \Delta_2$; $P_1 \equiv P_2 \equiv P$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1 \equiv \alpha_2\beta_2\gamma_2 \equiv \alpha\beta\gamma$, $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1' \equiv \alpha_2'\beta_2'\gamma_2' \equiv \alpha_1''\beta_1''\gamma_1'' \equiv \alpha_2''\beta_2''\gamma_2'' \equiv \alpha'\beta'\gamma'$, $A_1'B_1'C_1' \equiv A_2'B_2'C_2' \equiv A_0'B_0'C_0'$, $A_1B_1C_1 \equiv A_2B_2C_2 \equiv A_0B_0C_0$.

Obținem:

Conica înscrisă într'un triunghiu ABC *trece prin conjugatele armonice ale intersecțiilor polarei triliniare a punctului lui* GERGONNE *al conicei* P, *cu* PA, PB, PC *în raport cu* PA, PB, PC.

Polara triliniară a lui P *coincide cu polara în raport cu conica.*

Dreapta PASCAL *a exagonului* $\alpha C_0 \beta A_0 \gamma B_0$ *este* $\overline{A_0'B_0'C_0'}$.

Diametrul care trece prin P *este conjugat direcției* Δ.

Dreptele care trec prin α', β', γ' *și prin respectiv mijloacele segmentelor* αA_0, βB_0, γC_0 *se întâlnesc în centrul conicei.*

Pentru $P \equiv G$ se obține elipsa a doua a lui STEINER.

Pentru $P \equiv \gamma$ punctul lui GERGONNE se obține cercul înscris (I). Deducem din cele spuse mai sus:

a) *Polara triliniară a lui* γ *este perpendiculară pe* $\overline{\gamma I}$.

b) *Cevienele punctului lui* GERGONNE *sunt perpendiculare pe respectiv dreptele ce unesc centrul cercului înscris cu punctele în care polara triliniară a punctului lui* GERGONNE *întâlnește laturile triunghiului.*

Propozițiile II b, III a și III b pot fi prezentate și sub altă formă.

Astfel dacă în II b considerăm ca triunghiu fundamental triunghiul ortic, deoarece înălţimile sunt bisectoarele acestui triunghiu, iar centrul cercului lui EULER al triunghiului ABC este centrul cercului său circumscris şi se află pe dreapta lui EULER a lui ABC, avem:

II b') *Polara triliniară a lui* I *este perpendiculară pe* OI.

De asemenea dacă în III a şi III b considerăm ca triunghiu fundamental triunghiul pedal al punctului lui GERGONNE şi observăm că cevienele acestui punct sunt simediane în noul triunghiu, obţinem:

III a') *Polara triliniară a lui* K, *punctul lui* LEMOINE *este perpendiculară pe* OK.

III b') *Simediana este perpendiculară pe dreapta ce uneşte centrul cercului circumscris cu piciorul tangentei corespunzătoare la acest cerc.*

IULIAN PETRESCU
Lic. Gh. Lazăr, Bucureşti

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN 1942

1. Societatea *Gazeta Matematică*, în Adunarea generală dela 25 Septemvrie a. c., a hotărît ţinerea concursului tradiţional de matematici în anul 1942, între elevii liceelor civile şi militare din întreaga ţară.

Totodată se va ţine un concurs şi între studenţii anului I ai Politehnicei din Bucureşti.

Concursul va avea loc după sărbătorile Paştelui, înainte de reînceperea cursurilor. Dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidaţii, el se va ţine în Bucureşti, unde se va da examen scris şi oral; în caz contar se va ţine în diferite centre din ţară, într'o Duminică din luna Mai, dându-se numai examen scris.

Hotărîrea în această privinţă se va publica în numărul din Februarie 1942.

2. Elevii, cari doresc să se înscrie la concurs, sunt obligaţi să candideze la *două materii de matematici dintre acele menţionate aici pentru clasa în care urmează:*

Clasa IV-a: Algebra, geometria în spaţiu;

Clasa V-a: Aritmetica raţionată, algebra, geometria plană;

Clasa VI-a: Teoria numerelor, algebra, trigonometria, geometria în spaţiu;

Clasa VII-a: Algebra, geometria descriptivă şi proiectivă;

Clasa VIII-a: Mecanica, algebra, geometria analitică.

3. Societatea *Gazeta Matematică*, socotind că o temeinică pătrundere a aritmeticei, teoriei numerelor şi mecanicei este absolut necesară unui bun absolvent de liceu, deci unui candidat la concurs, hotărăşte, că pentru elevii claselor V, VI, VIII, una dintre cele două materii de concurs să fie *obligatorie* şi anume:

Aritmetica raţionată, pentru candidaţii clasei V-a;

Teoria numerelor, pentru candidaţii clasei VI-a;

Mecanica, pentru candidaţii clasei VIII-a.

4. Candidaţii vor da: *a) o probă scrisă teoretică* la una dintre materiile pentru care se prezintă la concurs, *b) o probă scrisă practică* la cealaltă materie, *c) un examen oral din ambele materii*, în cazul ţinerii concursului în Bucureşti.

Sub niciun motiv nu se acordă Candidaţilor scuze de nepregătirea unora dintre capitolele trecute în programul clasei lor, pentru obiectele la care trece concursul.

5. *Inscrierea la concurs* se face numai prin cerere individuală, scrisă personal de candidat şi se va trimete în plic recomandat, cel mai târziu până la 1 Ianuarie 1942, pe adresa Societăţii *Gazeta Matematică. Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2.*

Nu se primesc cereri trimese de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli, fiecare candidat fiind obligat a-şi face singur cererea.

6. Pentru a fi luată în considerare cererea de înscriere la concurs, candidatul trebue să răspundă pe puncte, în ordinea de mai jos, la următoarele date:

a) Numele (de familie) şi pronumele.

b) Şcoala şi clasa în care urmează candidatul. (Cei pregătiţi în particular vor arăta şcoala la care au urmat în anul precedent sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă).

c) Adresa personală:

— în timpul şcolii;

— în timpul vacanţei de Paşte.

d) Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut în timpul concursului sau dacă unul dintre aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea *Gazeta Matematică.*

(Cel care are nevoie de bani pentru drum, va arăta gara de unde va lua trenul pentru a veni în Bucureşti, precum şi gara la care se înapoiază după concurs).

e) Materia la care se înscrie să treacă proba scrisă teoretică şi materia la care se înscrie să treacă proba scrisă practică.

f) Activitatea depusă la *Gazeta Matematică* şi *Suplimentul cu Exerciţii al Gazetei Matematice,* arătând numerele de ordine ale problemelor şi ale exerciţiilor rezolvate şi publicate sau menţionate, precum şi activitatea la alte reviste de matematici din ţară sau din străinătate.

6. Candidaţii înscrişi la concurs, cari din diferite motive nu mai pot sau nu mai vor să se prezinte, sunt obligaţi să anunţe din timp Societatea printr'o scrisoare.

Părăsirea sălilor de concurs este interzisă înainte de predarea lucrărilor scrise.

In numărul 6 din Februarie 1942 al *Gazetei Matematice,* se va publica felul cum se va ţine concursul, localitatea, orele de prezentare, precum şi numele candidaţilor admişi să ia parte la concurs.

Numărul celor admişi la concurs se va hotărî ţinând seama de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică* pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia o vor arăta şi dovedi în cererile ce vor face.

7. Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi diplome, recompense, premii sau menţiuni.

Primul reuşit dintre toţi candidaţii liceelor va primi premiul „LT.-COL. G. TĂNĂSESCU", în cărţi, aşa cum se arată în numărul 1 din acest an, în articolul: *Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică".*

Primul reuşit dintre studenţii anului I al Politechnicei din Bucureşti va primi premiul „ANGHEL SALIGNY", de 1000 lei, oferit de un membru al Societăţii noastre.

Comisia examinatoare se va compune din membri ai Societăţii *Gazeta Matematică,* cari nu au rude sau elevi printre candidaţi.

8. **Programa analitică a concursului.**

Clasa IV-a: 1. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus: Rezolvarea ecuațiilor de gradul I cu una și două necunoscute, cu coeficienți literali.

2. *Geometria în spațiu.* Toată materia prevăzută în programa analitică.

Clasa V-a: 1. *Aritmetica rațională.* (obiect obligator). Operațiile aritmetice. Divizori. Numere prime. Cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun. Fracții ordinare, zecimale. Rădăcini pătrate. Rapoarte. Proporții. Regula de trei. Dobânzi simple. Sconturi. Asociații. Amestecuri.

2. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

La radicali se va face raționalizarea numitorilor cari cuprind radicali de ordinul al doilea și superior.

La sistemele de ecuații de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare. Sisteme reductibile la gradul I și II.

Transformarea expresiilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

3. *Geometria plană.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Teorema lui MENELAUS și CEVA și reciprocele lor.

Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulatere inscriptibile.

Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte. Axă și centru radical.

Relația metrică a lui STEWART. Aplicații.

Clasa VI-a: 1. *Teoria numerelor* (obiect obligator).

Divizori; numărul, suma și produsul divizorilor. Numere amiabile.

Indicatori. Teoremele lui FERMAT, EULER, WILSON.

2. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică.

3. *Trigonometria.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Aria unui triunghiu în funcție de elementele lui.

Razele cercurilor: circumscris, înscris, exînscrise.

Identități, ecuații și sisteme trigonometrice.

Problema hărții.

4. *Geometria în spaţiu.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Unghiuri triedre. Cazurile de egalitate ale triunghiurilor sferice şi aria triunghiului sferic. Volumul produs de un sector poligonal plan, care se roteşte în jurul unei axe.

Volumul segmentului sferic (mărginit de zonă sau calotă).

Clasa VII-a: 1. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Serii cu termeni pozitivi, seria numărului *e*. Principalele criterii de convergenţă. Logaritmi neperieni.

Derivata funcţiei logaritmice şi exponenţiale.

Nedeterminări. Regula lui HÔSPITAL.

2. *Geometria descriptivă şi proiectivă.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Metode: Schimbarea planelor de proiecţie, rotaţia şi rabaterea.

Inversiunea. Diviziuni şi fascicole anarmonice şi armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu şi în raport cu un cerc. Polare reciproce. Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complete.

Clasa VIII-a: 1. *Mecanica* (obiect obligator). Toată materia prevăzută în programa analitică pentru clasa VIII-a şi Cinematica prevăzută pentru clasa VII-a.

2. *Geometria analitică.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Pol şi polară.

Studiul geometric elementar al conicelor.

3. *Algebra.* Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Cantităţi complexe. Teorema lui MOIVRE. Ecuaţii binoame.

Anul I al Politechnicei din Bucureşti.

Candidaţii vor fi examinaţi din materia predată până la vacanţa Paştelui la două din materiile:

Algebră şi Analiză matematică, Geometrie analitică, Mecanică.

*

Orice candidat trebue să cunoască toată materia respectivă a claselor precedente, cu adăogirile prevăzute în prezenta programă.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

3. *Asupra problemei 5109.* Enunțul problemei este:

Se dă triunghiul ABC *și* A', B', C' *trei puncte pe laturile* BC, CA, AB — Δ *axul radical al cercurilor* ABC, A'B'C' — A_1, B_1, C_1 *punctele în care* Δ *întâlnește dreptele* B'C', C'A', A'B' — $\alpha(BB_1, CC_1)$, $\beta(CC_1, AA_1)$, $\gamma(AA_1, BB_1)$. *Să se arate că dreptele* $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$ *sunt concurente.*

In soluția dată în Gazeta Matematică, Vol. XLVI, pag. 47 s'a arătat că triunghiurile A'B'C' și $\alpha\beta\gamma$ sunt omologice, Δ fiind ax de omologie, iar ω — punctul de întâlnire al dreptelor $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$ — centrul de omologie.

Să arătăm concurența dreptelor $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$ pe o altă cale, punând în evidență și altă proprietate a punctului ω.

B'C' este ax radical al cercurilor A'B'C', AB'C' — Δ ax radical al cercurilor A'B'C', ABC, deci A_1 (B'C', Δ) este centrul radical al acestor trei cercuri. Rezultă că prin A, trece axul radical al cercurilor ABC, AB'C' — deci axul lor radical este AA_1.

Analog se arată că BB_1 este ax radical al cercurilor ABC, BC'A'. $\gamma(AA_1, BB_1)$ este astfel centrul radical al cercurilor ABC, AB'C', BC'A', deci $\gamma C'$ este ax radical al cercurilor AB'C', BC'A'.

De asemenea $\alpha A'$ este ax radical al cercurilor BC'A', CA'B', iar $\beta B'$ este ax radical al cercurilor CA'B', AB'C'.

Concluzia: $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$ *sunt concurente în centrul radical al cercurilor* AB'C', BC'A', CA'B'.

Așa dar problema 5109 se mai poate enunța astfel:

Dându-se un triunghiu ABC fie A', B', C' trei puncte pe laturile BC, CA, AB, Δ axul radical al cercurilor ABC, A'B'C' — A_1, B_1, C_1 punctele în care Δ întâlnește dreptele B'C', C'A', A'B' — $\alpha(BB_1, CC_1)$, $\beta(CC_1, AA_1)$, $\gamma(AA_1, BB_1)$.

Triunghiurile A'B'C', $\alpha\beta\gamma$ sunt omologice, având ca axă de omologie axul radical al cercurilor ABC, A'B'C' și centrul de omologie, centrul radical al cercurilor AB'C', BC'A', CA'B'.

C. IONESCU-BUJOR.

4. *Asupra problemei 4971.* (G. M., August 1939, pag. 662).

Problema poate fi generalizată astfel:

Să se determine pozițiile de echilibru ale unui punct M, *de greutate neglijabilă, situat pe suprafața lucie* S *dată de ecuațiunea:*

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

şi atras de n puncte $A_i(x_i, y_i, z_i)$ *respectiv cu forţele* $F_i = k_i \cdot \overline{MA_i}$; $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Notând cu x_p, y_p, z_p coordonatele poziţiei de echilibru P a punctului avem:

$$\varphi(x_p, y_p, z_p) = 0 \qquad (1)$$

deoarece punctul trebueşte să se găsească pe suprafaţa S.

Prin proiecţiuni, obţinem componentele X, Y, Z ale rezultantei R care acţionează punctul

$$X = \sum_1^n k_i (x_i - x_p) = \sum_1^n k_i x_i - x_p \sum_1^n k_i$$

$$Y = \sum_1^n k_i y_i - y_p \sum_1^n k_i$$

$$Z = \sum_1^n k_i z_i - z_p \sum_1^n k_i .$$

Intru cât pentru echilibru rezultanta trebue să fie îndreptată după normala la suprafaţă:

$$\frac{x - x_p}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}} = \frac{y - y_p}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_p}} = \frac{z - z_p}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_p}}$$

rezultă:

$$\frac{X}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}} = \frac{Y}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_p}} = \frac{Z}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_p}}$$

sau:

$$\frac{\Sigma k_i x_i - x_p \Sigma k_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}} = \frac{\Sigma k_i y_i - y_p \Sigma k_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_p}} = \frac{\Sigma k_i z_i - z_p \Sigma k_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial z_p}} . \qquad (2)$$

Ecuaţiunile (1) şi (2) formează un sistem de trei ecuaţiuni cu trei necunoscute x_p, y_p, z_p care rezolvat ne dă soluţiile problemei.

In cazul unei sfere:

$$x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 = r^2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_p} = 2x_p \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_p} = 2y_p \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_p} = 2z_p .$$

Introducând aceste valori în (2) şi aplicând proprietăţi simple ale proporţiilor, obţinem :

$$x_p = \frac{\pm r \sum k_i x_i}{\sqrt{(\sum k_i x_i)^2 + (\sum k_i y_i)^2 + (\sum k_i z_i)^2}} \text{ etc.}$$

(două soluţii).

Un studiu interesant prezintă *mişcarea pe sferă* a punctului M *sub acţiunea celor n forţe date.* Presupunând că punctul are *o masă m* şi este lăsat liber fără iuţeală în $A_0(x_0, y_0, z_0)$ se obţin uşor următoarele rezultate :

a) traiectoria este un *cerc mare al sferei.*

b) mişcarea este *pendulară*, mobilul plecând din A_0, *trecând prin poziţia de echilibru stabil* P *cu iuţeala maximă* şi oprindu-se într'un punct A_0' simetric cu A_0 în raport cu P.

Din A_0' punctul se reîntoarce în A_0 şi aşa mai departe.

c) iuţeala maximă, v_m este dată de relaţia (teorema energiei cinetice) :

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = r\sqrt{(\sum k_i x_i)^2 + (\sum k_i y_i)^2 + (\sum k_i z_i)^2} - x_0 \sum k_i x_i - y_0 \sum k_i y_i - z_0 \sum k_i z_i .$$

Propun tinerilor corespondenţi ai G. M. stabilirea acestor rezultate şi studierea lor mai amănunţită.

ALEXANDRU STOENESCU.

5. *O nouă soluţie a problemei 4232* [1]). Dau în cele ce urmează problemei 4232, o soluţie diferită de cea publicată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 198. Enunţul problemei cere să se determine *n* astfel încât expresiunea

$$E = (x + y)^n + (-x)^n + (-y)^n$$

să se dividă

1). Prin $x^2 + xy + y^2$

2). Prin $(x^2 + xy + y^2)^2$.

Fie *a, b, c* rădăcinile ecuaţiei

$$u^3 - s_1 u^2 + s_2 u - s_3 = 0 \qquad (1)$$

în care

$$s_1 = a + b + c \quad , \quad s_2 = ab + bc + ca \quad , \quad s_3 = abc.$$

1) A se vedea şi nota matematică de la pag. 638, Vol. XLVI, asupra acestei probleme.

Inlocuind în (1) pe u prin a, b, c se vede că

$$a^{3+n} - s_1 a^{2+n} + s_2 a^{1+n} - s_3 a^n = 0$$

$$b^{3+n} - s_1 b^{2+n} + s_2 b^{1+n} - s_3 b^n = 0$$

$$c^{3+n} - s_1 c^{2+n} + s_2 c^{1+n} - s_3 c^n = 0$$

şi dacă notăm

$$Q_n = a^n + b^n + c^n$$

atunci

$$Q_{n+3} - s_1 Q_{n+2} + s_2 Q_{n+1} - s_3 Q_n = 0.$$

Fie acum

$$a = x + y \quad , \quad b = -x \quad , \quad c = -y$$

$$\therefore \quad s_1 = 0 \quad , \quad s_2 = -(x^2 + xy + y^2) \quad , \quad s_3 = xy(x + y)$$

şi deci

$$P_{n+3} - xy(x + y) P_n = (x^2 + xy + y^2) P_{n+1} \qquad (2)$$

unde

$$P_n = E = (x + y)^n + (-x)^n + (-y)^n .$$

Din (2) deducem că dacă P_α se divide cu $(x^2 + xy + y^2)$ şi $P_{\alpha+3}$, $P_{\alpha+6}$, $P_{\alpha+9}, \ldots$, $P_{\alpha+3n}$ se divide cu $(x^2 + xy + y^2)$. Ori $P_1 = (x + y) - x - y = 0$, $P_2 = (x+y)^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + xy)$

$$P_3 = (x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y).$$

In concluzie: *Expresiunea* E *se divide prin* $x^2 + xy + y^2$ *când* **n este prim cu 3.**

Prin aplicarea succesivă a relaţiei (2) deducem

$$P_{3t+1} = (x^2 + xy + y^2) \sum_{i=0}^{t-1} x^i y^i (x + y)^i P_{3(t-i)-1} \qquad (3)$$

$$P_{3t+2} = (x^2 + xy + y^2) \sum_{i=0}^{t-1} x^i y^i (x + y)^i P_{3(t-i)} + x^t y^t (x+y)^t P_2 . \qquad (4)$$

Din (3) se deduce că P_{3t+1} este întotdeauna divizibil prin $(x^2 + xy + y^2)$, iar din (4), ţinând seamă de congruenţa

$$P_{3t} \equiv x^t y^t (x + y)^t P_0 \equiv 3x^t y^t (x + y)^t \mod (x^2 + xy + y^2)$$

se deduce relaţia

$$\frac{P_{3t+2}}{x^2+xy+y^2} \equiv (3t + 2) x^t y^t (x + y)^t \qquad (5)$$

deci P_{3t+2} se divide prin $(x^2 + x + y^2)$, dar nu prin patratul său.

In concluzie: *Expresiunea* E *se divide prin* $(x^2+xy+y^2)^2$ *când* **n este de forma 3m + 1.**

In fine din (3), ţinând seamă de (5) avem

$$\frac{P_{3t+1}}{(x^2+xy+y^2)^2} \equiv \sum_{i=0}^{t-1} x^{t-1}\,y^{t-1}\,(x+y)^{t-1}\,[3\,(t-i)-1] \quad \text{mod. } (x^2+xy+y^2)$$

$$\equiv \frac{(3t+1)\,t}{2}\,x^{t-1}\,y^{t-1}\,(x+y)^{t-1} \quad \text{mod. } (x^2+xy+y).$$

Deci E nu se divide prin $(x^2+xy+y^2)^3$ pentru nicio valoare a lui n.

I. B. FLORESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

Examenul de admitere în Şcoala de Ofiţeri activi de artilerie contra aeronavelor — Bucureşti (Iulie 1941)

I. GEOMETRIE

1. In triunghiul oarecare ABC se consideră înălţimea AA' şi o dreaptă oarecare (d) trecând prin punctul A. Fie respectiv B' şi C' proiecţiile vârfurilor B şi C pe dreapta (d).

Să se arate că oricare ar fi dreapta (d), triunghiul A'B'C' este asemenea cu triunghiul ABC.

Din rezultatul precedent să se deducă locul geometric al mijlocului segmentului B'C' când dreapta (d) variază.

2. Se consideră un cilindru circular drept cu raza r şi cu înălţimea h. Printr'un punct A al bazei se duce o generatoare AB pe prelungirea căreia se ia un punct S, astfel încât $AS = k$, $(k > h)$.

Să se calculeze volumul V comun cilindrului dat şi conului cu aceeaşi bază cu cilidrul şi cu vârful în S.

Să se determine k astfel încât V să fie $\frac{7}{12}$ din volumul cilindrului.

3. Se dau punctele:

$$A\,(0,2) \quad , \quad B\,(1,0) \quad , \quad C\,(-1,0)$$

şi se ia pe axa Ox un punct M $(\alpha, 0$ cuprins între B şi C, α fiind un parametru variabil. Fie P piciorul perpendicularei scoborîte din M pe AB şi Q piciorul perpendicularei scoborîte din M pe AC.

Să se calculeze coordonatele punctelor P şi Q şi să se arate apoi că triunghiul OPQ este isoscel (OP = OQ).

Să se arate că punctele O, A, M, P, Q sunt pe un cerc şi să se scrie ecuaţia acestui cerc.

(Timp acordat: 4 ore).

II. ALGEBRĂ ŞI TRIGONOMETRIE

Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei

$$(\alpha - 1)\, x^2 - 2\,(\alpha + 1)\, x + 2\,\alpha + 5 = 0$$

când parametrul α variază dela $-\infty$ la $+\infty$.

Să se determine α astfel ca să avem:

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{8}$$

x' şi x'' fiind rădăcinile trinomului dat.

Inlocuind pe α cu valoarea găsită mai sus, să se reprezinte grafic variaţiunea funcţiunii

$$y = \frac{1}{(\alpha - 1)\, x^2 - 2\,(\alpha + 1)\, x + 2\,\alpha + 5}$$

2. Se dă funcţiunea:

$$y = 10\, x^3 - 27\, x^2 + px + q$$

şi se cere să se determine p şi q astfel ca y să aibă pentru $x = 2$ un maxim sau minim egal cu -50.

Să se spună apoi dacă pentru $x = 2$ avem maxim sau minim.

Să se rezolve ecuaţia $y = 0$, ştiind că admite rădăcini fracţionare.

3. Un avion sboară în linie dreaptă la o altitudine constantă, cu viteza de 140 m/sec. La un moment dat t, el este prins de două proiectoare B şi C situate în planul vertical al drumului avionului, sub un unghiu drept. După 10 secunde este iarăşi prins sub un unghiu drept.

Ştiindu-se că distanţa dintre cele două proiectoare este de 5 km, să se afle altitudinea la care sboară avionul.

Să se determine unghiul sub care avionul este prins de cele două proiectoare la momentul $(t + 5)$ secunde.

Observare. Fascicolele luminoase ale celor două proiectoare vor fi presupuse fără grosime, reduse la linii drepte.

(Timp acordat: 4 ore)

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Ano XIV. No. 6, Mayo de 1941. Buenos Aires 1941. Note. Diverse.

Idem. No. 8 Iunio.

Buletinul Politehnicei din Bucureşti. Anul XII. 1941. No. 1 şi 2 (Ianuarie şi Aprilie). Bucureşti.

Această publicaţiune este o continuare a fostei reviste *«Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'Ecole Polytechnique de Bucarest»*. Abonamentul de 500 lei pentru particulari şi 1000 pentru Instituţiuni se face la Politehnica din Bucureşti. Redacţia Buletinului, Calea Griviţei No. 132.

Numărul prezent conţine ca materie matematică: Théorème de fermeture, par N. RACLIŞ. Sur les géodésiques de longueur nulle de certains éléments linéaires finslériens, par N. THÉODORESCO. Contribution à l'étude de la perspective aéronautique, par S. FOTINO. Une propriété des coniques, par I. CÂRSTOIU. Sur les paraboles inscrits à un triangle, par C. COŞNIŢA. Quelques formules de moyenne et quelques inégalités entre les valeurs moyennes des fonctions monotones, par N. CIORĂNESCU. Quelques nomogrammes à points alignés pour la technique de la combustion, par AL. GUTZU. Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications, par GR. C. MOISIL. Untersuchungen ueber einen wichtigen Fehler der Aerotriangulation, von A. I. CORPACIU. Sur le mouvement d'un solide dans un milieu résistant, par AL. STOENESCU. Essai d'une théorie élémentaire des déformations et des efforts intérieurs d'un fluide incompressible, par D. GERMANI.

Deutsche Mathematik. Anul V. Caietul IV. Lipsca 1940. Asupra unei teoreme din Teoria Restului bicuadratic, de G. KANTZ. Figuri de tăieturi prin funcţii raţionale, de L. BIEBERBACH. Polinoame ortogonale cu 3 polinoame, de W. HAHN. Domeniu sprijinit în reprezentarea complexă a lui FOURIER, de H. GERICKE. Reprezentarea conformă a planului iperbolic şi a sferei pe sfera limită, de E. ROESER. Poliedre cu muchii simetrice egale, de H. UNKELBACH. Anaglife din părţi de figuri prin proiectare paralelă, de U. GRAF. Funcţii de masă în calculul vectorial, de A. KLOSE. Prognosticuri teoretice de ereditate şi alegerea soţilor, de O. MITTMANN. Din o scrisoare a lui KUMMER către SCHWARZ din 15 Martie 1872. Reîntoarcerea unei serii de puteri, de G. HAMEL.

Asupra legii fundamentale a Algebrei, de R. IGLISCH. Numerele pitagorice, de G. IUNGE. Seria lui MERCATOR logaritmică în Anglia, de J. C. HOFMANN.

Idem. Anul V. No. 5. Lipsca 1941, Ianuarie. Ecuaţiile diferenţiale ale unui curent de gaz adiabatic şi izbituri de curente, de F. RINGLEB. Raporturi de schimb între ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale, de A. KNESCHKE. Noua tratare a reprezentării a sumei puterilor rădăcinilor unui polinom de gradul n normalizat, de x prin coeficienţii săi, de G. KANTZ. Despre legea înălţimilor, în geometria absolută, de H. TOEPKEN. Determinarea diametrului cilindrului, prin construcţii pe suprafaţa lui, cu rigla şi cu compasul,

de J. G. HOFMANN. Intemeierea calculului triunghiurilor sferice de P. LUCKEY. Rolul lui DESARGUES în Geometria proiectivă, de M. ZACHARIAS.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI, No. 7, Septemvrie, Timişoara. O oră de seminar matematic, de P. SERGESCU. O proprietate a bisectoarei într'un triunghiu, de O. N. ŢINO.

Revista de la Facultad de Ciencias Fisicomatematicas. Universidad Nacional de La Plata, Seria I. No. 5. La Plata. 1940.

Gazeta Matematică. *Enunţurile Problemelor nerezolvate propuse în Anii I—XLIV.* Bucureşti 1941.

Pentru a pune la îndemâna cititorilor *Gazetei Matematice* enunţurile problemelor propuse rămase nerezolvate şi răspândite în primele 44 volume ale *Gazetei Matematice*, s'a tipărit, pentru a doua oară, o broşură de 58 pagini, formatul *Gazetei Matematice*, în care s'au reprodus enunţurile acestor probleme. Inainte de tipărirea broşurii, o comisiune de redactori ai *Gazetei Matematice*, timp de mai bine de doi ani, a examinat din nou acele enunţuri, a corectat pe cele eronate, a lămurit expunerea unora din enunţurile care nu erau prea clare sau dădeau loc la ambiguităţi şi a suprimat pe cele ce s'au găsit imposibile.

Numărul problemelor este de 238.

Cheltuiala pentru tipărirea broşurii a fost în total achitată de D-l Inginer D. STOICA, căruia îi exprim şi aci mulţumiri pentrucă a pus la îndemâna cercetătorilor problemele nesoluţionate încă din *Gazeta Matematică*. Scumpetea de azi a tiparului nu ar fi permis Societăţii ca din veniturile ei proprii să mai poată suporta cheltuieli suplimentare în afară de tipărirea Revistei. Este nevoie de bune voinţe şi de entusiaşti ca D-l D. STOICA pentru ca să se poată face îmbunătăţiri la *Gazeta Matematică* şi printre acestea se simţea de mult şi tipărirea acestei broşuri. Mă fac interpretul corespondenţilor Revistei exprimându-i şi aci vii mulţumiri şi din partea lor.

I. IONESCU.

CAIUS IACOB. *Sur le passage du régime infrasonore à celui ultrasonore au cas de la double-source.* (Extras din Buletinul Şedinţelor Academiei de ştiinţe din România, Bucureşti 1941).

CAIUS IACOB. *Sur l'écoulement lent d'un fluide parfait, compressible, autour d'un cylindre circulaire.* (Extras din *Mathematica*, Vol. XVII). Timişoara 1941.

CAIUS IACOB. *Considérations élémentaires sur la double-source* (Publicat în *Publicaţiile Institutului Regal de cercetări ştiinţifice al României*). Bucureşti 1941.

GH. NICHIFOR. *Antemergătorul Invăţăturii Architecturii:* ALEXANDRU ORĂSCU. Bucureşti. 1941.

PETRE PUIU. *Cuantificarea spațiului și teoria cuantelor.* București 1941.

P. SERGESCU. *Notă asupra curbelor osculatoare staționare,* (Extras din «*Pozitiva*», No. 9—10, Mai-lunie 1941).

CERERI

Răspuns la Cererea Nr. 269, Anul XLIII, pag. 34.

Se cerea ce Societăți științifice au purtat sau poartă numele unor matematicieni sau profesori de matematici.

O astfel de Societate Științifică-Literară, cu numele „ASACHI", a existat în orașul Piatra, înființată la 6 Decemvrie 1880, care nu știu dacă mai există azi. Primul ei Președinte a fost Dr. D. CANTIMIR. Societatea a scos Revista „ASACHI" cu începere din 10 Aprilie 1881. Am avut în mână Numerele apărute până la Februarie 1885 (Anul III No. 10) dar nu știu dacă a mai continuat în urmă. Ea a avut un cuprins interesant și conține mai multe articole ale lui I. NEGRE, despre „*Viața, lucrările și scrierile lui* GHEORGHE ASACHI". Revista a contribuit mult la ridicarea Statuii lui ASACHI dela Iași. Cu ocazia aniversării a II-a a Societății, G. I. LAZARIU a scris o poezie «*Umbrii lui Asachi*» pe care o vom reproduce aci în *Suplimentul cu Recreații* când va reapare.

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

THÉODORE DE TRIPOLI. *Les sphériques.* Traducere *de* PAUL VER EECKE. Bruges 1927.

Donată de D-l Inginer M. PORTOCALĂ.

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE. *Les six livres d'arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Tradusă de PAUL VER EECKE. Bruges 1926.

Donată de D-l Inginer M. PORTOCALĂ.

C. SERVOIS. *Sur les centres de courbures principaux de trois quadriques homofocales.* Gand.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

J. NEUBERG. *Sur certains goupes de trois cercles coaxiaux.* Bruxelles.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3920. 1°. *Să se găsească ecuaţia conicelor care au un vârf în originea* O *şi care trec prin punctul dat* A $(0, 2a)$.

2°. *Să se scrie ecuaţia parabolelor care au aceste proprietăţi.*

3°. *Să se scrie ecuaţia focală a acestor parabole şi să se afle coordonatele focarului şi ecuaţia directoarei.*

4°. *Să se găsească locul focarelor.*

5°. *Să se afle înfăşurătoarea directoarelor.*

6°. *Să se determine locul intersecţiei directoarei cu axa parabolei.*

7°. *Să se afle locul polului dreptei* OA *în raport cu aceste parabole.*

N. ABRAMESCU.

1°. Pentru a exprima că un punct P este un vârf al unei conice, vom scrie că diametrul conjugat coardelor paralele cu tangenta în P la conică este perpendicular pe această tangentă. Fie [1])

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = mx - y = 0$$

ecuaţia unei conice care trece prin origine. Scriind că trece prin punctul A $(0, 2a)$, avem

$$4Ca^2 - 4a = 0, \quad C = \frac{1}{2a}.$$

Ecuaţia conicei este

$$(1) \quad f(x, y) = 2aAx^2 + 4aBxy + y^2 + 2a(mx - y) = 0.$$

Tangenta în origine este dată de grupul termenilor de gradul întâi, $y = mx$, şi are coeficientul unghiular m. Diametrul conjugat coardelor paralele cu direcţia $f'_x + mf'_y = 0$,

$$2aAx + 2aBy + am + m(2aBx + y - a) = 0,$$

$$2a(A + Bm)x + (2aB + m)y = 0,$$

şi are coeficientul unghiular

$$m' = -2a\frac{A + Bm}{2aB + m}.$$

1) Pentru a exprima că o dreaptă dată este axă, se recomandă N. ABRAMESCU, Lecţiuni de Geometrie analitică (Cursul universitar, 1937, p. 168).

Scriind că acest diametru este perpendicular pe direcţia m a tangentei în origine, avem

$$-2a\frac{A+Bm}{2aB+m}m+1=0,\quad 2aB=\frac{m(1-2aA)}{m^2-1}.$$

Ecuaţia (1) a conicelor cu un vârf în origine este

$$2aAx^2+2m\frac{1-2aA}{m^2-1}xy+y^2+2a(mx-y)=0.$$

2^0. Condiţia ca aceste conice să fie parabole este

$$m^2\left(\frac{1-2aA}{m^2-1}\right)^2=2aA\ ,\ 4a^2m^2A^2-2a(m^4+1)A+m^2=0.$$

Această ecuaţie dă pentru A valorile

$$A_1=\frac{m^2}{2a},\quad A_2=\frac{1}{2am^2}.$$

Pentru A_1 conicele se reduc la dreptele paralele

$$(mx-y)(mx-y+2a)=0.$$

Pentru A_2, avem parabole

(2) $$(x+my)^2+2am^2(mx-y)=0,$$

cu tangenta în vârf (origine) $mx-y=0$ şi cu axa $x+my=0$.

3^0. Focarul $F(\alpha,\beta)$ fiind pe axă, avem

(3) $$\alpha+\beta m=0,$$

iar directoarea fiind perpendiculară pe axă, are ecuaţia

(4) $$mx-y+\lambda=0.$$

Ecuaţia focală a parabolelor este

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{(mx-y+\lambda)^2}{m^2+1}.$$

Desvoltând, observând (3), obţinem

$$(x+my)^2+2[\beta(m^2+1)-\lambda](mx-y)+\beta^2(m^2+1)^2-\lambda^2=0.$$

Comparând această ecuaţie cu (2), rezultă

$$\beta^2(m^2+1)^2-\lambda^2=0,\qquad (5)\quad \beta(m^2+1)-\lambda=am^2.$$

Din prima obţinem numai

$$\beta(m^2+1) = -\lambda, \tag{6}$$

căci $\beta(m^2+1) = \lambda$ ar da în (5) $am^2 = 0$. Inlocuind în (5) pe $\beta(m^2+1) = -\lambda$ din (6), avem

$$\lambda = -\frac{1}{2}am^2, \tag{7}$$

astfel că ecuaţia (4) a directoarei este

$$mx - y - \frac{1}{2}am^2 = 0.$$

Inlocuind în (6) pe λ din (7), avem

$$\beta = \frac{am^2}{2(1+m^2)} \tag{8}$$

iar din (3), obţinem

$$\alpha = -\frac{am^3}{2(1+m^2)}$$

care dau coordonatele focarului.

4°. Locul focarului se obţine eliminând pe m între coordonatele α şi β aflate, sau între (3) şi (8). Obţinem $2\beta(\alpha^2+\beta^2) = a\alpha^2$, sau înlocuind pe α şi β cu x şi y,

$$x = \pm y\sqrt{\frac{2y}{a-2y}}, \tag{9}$$

care este o cisoidă, cu punctul de întoarcere în origine şi cu asimptota o paralelă la Oy la distanţa $\frac{a}{2}$.

5°. Ecuaţia directoarei se poate scrie

$$am^2 - 2mx + 2y = 0$$

şi înfăşurătoarea se obţine eliminând pe m între ecuaţia şi derivata în raport cu m. Sau, fiind de gradul al doilea în m, se obţine scriind că realizantul ecuaţiei de gradul al doilea este nul, $x^2 - 2ay = 0$. Deci este o parabolă cu focarul în $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ şi directoarea $y = -\frac{a}{2}$.

6°. Intersecția directoarei cu axa este simetricul focarului în raport cu vârful (originea). Deci locul se obține înlocuind în (9) pe x și y cu $-x$ și $-y$ și este o cisoidă simetrică cu cea găsită, în raport cu originea (sau în raport cu Ox),

$$x = \pm \sqrt{\frac{-2y^3}{a+2y}}.$$

7°. Fie (X, Y) coordonatele polului dreptei OA în raport cu parabola (2). Dreapta OA are ecuația $x = 0$ și trebue să fie aceeași ca polara lui (X, Y)

$$xX + m(xY + yX) + m^2 yY + am^3(x + X) - am^2(y + Y) = 0.$$

Rezultă să fie zero coeficienții lui y și cel liber,

$$X + mY - am = 0, \quad Y - mX = 0,$$

de unde eliminând pe m, obținem $X^2 + Y^2 - aY = 0$, adică un cerc cu centrul $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ pe OA tangent axei Ox în O.

Au rezolvat problema D-rele ANA CHECIAN, ILEANA MANG (studente) și D-l MIRCEA L. RUSU (student Politehnică, București).

D-l TEODOR A. ȘERBAN (Student inginer) a luat ecuația $y^2 = 2p'x + qx^2$ a conicelor cu vârful în origine și axa Ox ca axă, care sunt parabole când $q = 0$. A făcut rotația axelor de unghiul $\varphi = \operatorname{arc\,tg} m$, și ecuația devine

$$(y - mx)^2 = 2p(x + my) + q(x + my)^2, \quad p = p'\sqrt{1 + m^2}.$$

Scriind că trece prin A(0, 2a),

$$p = \frac{a(i - m^2 q)}{m},$$

și ecuația conicelor este

$$(y - mx)^2 = \frac{2a(1 - m^2 q)}{m}(x + my) + q(x + my)^2.$$

Pentru parabole $q = 0$, și a urmat ca mai sus.

D-l PAUL P. DRĂGHICESCU (elev cl. VII-a, Liceul Militar, Iași) a considerat $x + my = 0$ ca axă; $y = mx - p$, $y = mx - q$ două drepte perpendiculare pe axă; cercul $x^2 + y^2 = r^2$ cu centrul în origine (un punct pe axă). Conica

$$(y - mx + p)(y - mx + q) + \lambda(x^2 + y^2 - r^2) = 0,$$

care trece prin intersecţiile cercului cu dreptele considerate are ca axă $x + my = 0$. A scris că trece prin origine (vârful considerat), $pq = \lambda r^2$; a scris că trece prin A$(0, 2a)$, de unde

$$r^2 = -\frac{2apq}{p+q+2a}, \quad p+q = -2a(\lambda+1).$$

Ecuaţia conicei devine

$$(m^2+\lambda)x^2 - 2mxy + (\lambda+1)y^2 - 2a(\lambda+1)(y-mx) = 0.$$

Pentru parabolă, $m^2 - (m^2+\lambda)(\lambda+1) = 0$, deci $\lambda = 0$, $\lambda = -(m^2+1)$. Apoi a urmat ca mai sus [1]).

N. A.

PROBLEMA 4280. *După laturile* BC, CA *şi* AB *ale unui triunghiu* ABC *lucrează respectiv, în sensul indicat de ordinea literelor forţele :*

$$F_a = k(h_b - h_c) \; ; \quad F_b = k(h_c - h_a) \; ; \quad F_c = k(h_a - h_b)$$

în care h_a, h_b, h_c *sunt înălţimile triunghiului iar* k *un coeficient de proporţionalitate.*

Să se arate că rezultanta sistemului trece prin punctele de intersecţie al bisectoarelor şi al medianelor şi să se calculeze mărimea rezultantei.

ALEXANDRU STOENESCU.

I. *Soluţie* dată de Domnul MIRCEA STĂNCULESCU (elev-inginer al Şcoalei Politechnice din Bucureşti).

Fie G punctul de întâlnire al medianelor şi O punctul de întâlnire al bisectoarelor, distanţele forţelor F_a, F_b şi F_c, la aceste puncte sunt respectiv

$$\left(\frac{h_a}{3}; r\right) \; ; \quad \left(\frac{h_b}{3}; r\right) \; ; \quad \left(\frac{h_c}{3}; r\right).$$

---

1) Problema a fost propusă pentru a se vedea prima metodă pentru exprimarea că o dreaptă este axă, sau că un punct este vârf.

Notând cu R rezultanta lor şi aplicând teorema momentelor în raport cu O şi G avem:

$$M_G R = F_a \cdot \frac{h_a}{3} + F_b \frac{h_b}{3} + F_c \frac{h_c}{3}$$

$$= \frac{k}{3}[(h_b - h_c) h_a + (h_c - h_a) h_b + (h_a - h_b) h_c] = 0$$

$$M_0 R = F_a r + F_b r + F_c r = kr[(h_b - h_c) + (h_c - h_a) + (h_a - h_b)] = 0.$$

Deci R trece prin punctele O şi G. Pentru determinarea valorii rezultante, ţinem seama că:

$$\sphericalangle (F_a, F_b) = \pi - C; \quad \sphericalangle (F_b, F_c) = \pi - A; \quad \sphericalangle (F_c, F_a) = \pi - B.$$

Dar:

$$R^2 = F_a^2 + F_b^2 + F_c^2 + 2F_a F_b \cos(F_a, F_b) + 2F_b F_c \cos(F_b, F_c) + 2F_c F_a \cos(F_c, F_a).$$

Rezultă:

$$R^2 = k^2 (h_b - h_c)^2 + k^2 (h_c - h_a)^2 + k^2 (h_a - h_b)^2 - 2k^2 (h_b - h_c)(h_c - h_a) \cos C - 2k^2 (h_c - h_a)(h_a - h_b) \cos A - 2k^2 (h_a - h_b)(h_b - h_c) \cos B$$

$$R = k \sqrt{\Sigma (h_b - h_c)^2 - 2\Sigma (h_c - h_a)(h_a - h_b) \cos A}.$$

II. *Soluţie* dată de Domnul TEODOR A. ŞERBAN (elev-inginer al Şcoalei Politechnice Bucureşti).

Fie $M(\alpha, \beta, \gamma)$ un punct oarecare situat pe suportul rezultantei, α; β; γ fiind coordonantele triliniare între care există relaţia:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S$$

a, b, c fiind lungimile laturilor triunghiului şi S suprafaţa lui.

Suma momentelor forţelor F_a, F_b, F_c faţă de M este egal cu momentul rezultantei R deci este nulă:

$$\alpha F_a + \beta F_b + \gamma F_c = 0$$

sau:

$$\alpha (h_b - h_c) + \beta (h_c - h_a) + \gamma (h_a - h_b) = 0. \qquad (1)$$

Ecuaţiunea (1) reprezintă tocmai ecuaţia suportului rezultantei.

Coordonatele punctelor de întâlnire ale medianelor şi bisectoarelor sunt:

$$G\left(\frac{h_a}{3}, \frac{h_b}{3}, \frac{h_c}{3}\right) \quad ; \quad O(r, r, r).$$

Aceste valori introduse în ecuaţia suportului o verifică. Rezultă că punctele G şi O se găsesc pe direcţia rezultantei.

Pentru determinarea mărimii rezultantei să considerăm vectorii:

$$\vec{a} = \vec{BC} \quad ; \quad \vec{b} = \vec{CA} \quad ; \quad \vec{c} = \vec{AB}.$$

Avem vectorial:

$$\vec{R} = \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = k\,\frac{h_b - h_c}{a}\,.\,\vec{a} + k\,\frac{h_c - h_a}{b}\,.\,\vec{b} +$$

$$+ k\,\frac{h_a - h_b}{c}\,.\,\vec{c}.$$

Ridicând această relaţie la patrat (scalar) şi ţinând seama că:

$$\vec{R}\,.\,\vec{R} = R^2 \quad ; \quad \vec{a}\,.\,\vec{a} = a^2 \quad ; \quad \vec{b}\,.\,\vec{b} = b^2 \quad ; \quad \vec{c}\,.\,\vec{c} = c^2$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = -\,ab\cos C \quad ; \quad \vec{b}\,.\,\vec{c} = -\,bc\cos A \quad ; \quad \vec{c}\,.\,\vec{a} = -\,ca\cos B$$

obţinem:

$$R^2 = k^2\,(h_b - h_c)^2 + k^2\,(h_c - h_a)^2 + k^2\,(h_a - h_b)^2$$

$$- 2k^2\,(h_b - h_c)\,(h_c - h_a)\cos C - 2k^2\,(h_c - h_a)\,(h_a - h_b)\cos A$$

$$- 2k^2\,(h_a - h_b)\,(h_b - h_c)\cos B$$

$$R = k\sqrt{\Sigma\,(h_b - h_c)^2 - 2\,\Sigma\,(h_c - h_a)\,(h_a - h_c)\cos A}\,.$$

AL. ST.

PROBLEMA 4931. *In triunghiul* ABC *dreptunghic în* A, *se ia pe latura* AB *segmentul* $\overline{AD}$ *sau* $\overline{BD}$, *egal cu latura* $\overline{AC}$. *Care este locul punctului* D *când variind triunghiul,* BC *rămâne constant?*

LT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Generalizare: Să considerăm de rezolvat problema mai generală:

Prin vârful A *sau* B *al unui triunghiu oarecare* ABC *se duce o dreaptă* (Δ) *ce face cu latura* AB *unghiul constant* α *şi se ia pe această dreaptă un punct* D *aşa că* $\overline{AD} = \overline{AC}$ *sau* $\overline{BD} = \overline{AC}$.

Se cere locul geometric al punctului D *când triunghiul* ABC *variază, unghiul* A *rămânând constant, iar vârfurile* B *şi* C *fixe.*

1°. *Când* $\overline{AD} = \overline{AC}$: Unghiul CAB rămânând constant, vârful A va descrie arcul CAB din cercul circumscris triunghiului ABC. Cum unghiul α este constant, dacă (Δ) taie a doua oară cercul în punctul P avem:

$$\text{măs.} \sphericalangle BAP = \alpha = \frac{1}{2} \text{arc. PB},$$

deci dreapta (Δ) trece printr'un punct fix P şi

$$\text{arc . PB} = 2\alpha.$$

Această situaţie rămâne reală atât timp cât vârful A descrie arcul CAB; iar când A descrie arcul CHB, atunci (Δ) trece prin punctul fix P' simetricul lui P faţă de OB; O fiind centrul cercului ABC, deoarece unghiul α ce-l face (Δ) cu AB este în exteriorul triunghiului, aşa cum arată figura.

In aceste condiţii avem:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle CDA = 90^0 - \frac{A + \alpha}{2} = \text{const.}$$

$$\sphericalangle CDP = 180^0 - \sphericalangle CD\,A = 90^0 + \frac{A + \alpha}{2} = \text{const.}$$

Relaţii cari spun că punctul D va descrie un arc de cerc — când A va descrie arcul CPB — care începe din C, trece prin P şi sfârşeşte în D_1. Locul lui D începe din C, căci aici vârful A se confunda cu C. Punctul P aparţine locului căci dacă se ridică o perpendiculară pe mijlocul lui CP, aceasta taie arcul CPB într'un punct — fie el A' — şi atunci avem:

$$\overline{A'C} = \overline{A'P} \text{ şi } \sphericalangle BA'P = \alpha.$$

Punctul D_1 se obţine când se ajunge cu A în B şi deci:

$$\overline{BD_1} = \overline{BC}.$$

Pentru a găsi centrul cercului din care face parte locul punctului D, observăm că în acest cerc avem două coarde fixe $\overline{CP}$ şi $\overline{CD_1}$, aşa că perpendicularele pe mijloacele lor vor da la intersecţie centrul cercului; însă perpendiculara pe mijlocul lui $\overline{CP}$ taie a doua oară cercul în H mijlocul arcului CP'BP, dar şi perpendiculara ridicată pe mijlocul lui $\overline{CD_1}$ trece prin H, căci ea este bisectoarea unghiului CBD_1, deoarece triunghiul CBD_1 este isoscel şi avem:

$$\text{măs.} \sphericalangle CBD_1 = \frac{1}{2}(\text{arc. } CH + \text{arc } HB + \text{arc } BP)$$

însă

$$\text{arc } CH = \text{arc } HBP$$

în virtutea celor de mai sus. Aşa fiind avem:

$$\text{măs.} \sphericalangle CBD_1 = \text{arc } CH$$

sau bisectoarea unghiului CBD_1 trece prin punctul H.

Cu alte cuvinte centrul cercului din care face parte arcul CPD_1 este mijlocul arcului CP'BP.

Când A va descrie arcul BP'HC locul punctului D va fi un arc de cerc $CP'D_1'$ cu centrul în H' mijlocul lui CPB; demonstraţia este în totul aceeaşi ca cea de mai sus.

Să arătăm acum că cel de al doilea punct comun al cercurilor H şi H' şi care face parte din cele două locuri — fie el D'' — se află situat pe dreapta CB.

Dreapta CD'' este axul radical al celor două cercuri H şi H', iar puterile punctului B faţă de cele două cercuri sunt respectiv:

$$\overline{BP} \cdot \overline{BD_1} \quad \text{şi} \quad \overline{BP'} \cdot \overline{BD_1'}$$

însă prin construcţie avem:

$$\overline{BP} = \overline{BP'} \quad ; \quad \overline{BD_1} = \overline{CB} = \overline{BD_1'}$$

deci

$$\overline{BP} \cdot \overline{BD_1} = \overline{BP'} \cdot \overline{BD_1'}$$

ceeace însemnează că B se află pe coarda comună celor două cercuri — t. c. c. e. d. d.

2°. *Când* $\overline{BD} = \overline{AC}$:

Vârful A se va mişca pe cercul ABC, iar dreapta (Δ) trece prin punctul fix B; dacă dreapta BD ar face cu AB un unghiu de zero grade. Atunci pe tangenta în B la cercul ABC luăm un punct D_2 aşa că $\overline{BD_2} = \overline{BC}$, iar pentru un punct curent A de pe arcul CAB corespunde pe AB punctul D, în acest caz avem:

$$\Delta CAB = \Delta BDD_2$$

căci

$$\overline{BC} = \overline{BD_2} \quad , \quad \overline{CA} = \overline{BD}$$

conform enunţului şi încă:

$$\sphericalangle DBD_2 = \sphericalangle ACB$$

având ca măsură jumătatea arcului AB.

Considerându-ne în cazul enunţului extins va trebui să rotim punctele D şi D_2 de un unghiu α cu centrul în B şi în acelaşi sens, adică în exteriorul dreptelor faţă de cercul ABC; dar în atari condiţiuni avem:

$$\Delta ACB = \Delta BD'D_2'$$

căci rotaţia n'a modificat triunghiul DBD_2, aşa că:

$$\sphericalangle D_2'D'B = \sphericalangle CAB = \text{const.},$$

ceeace ne spune că punctul D' va descrie un arc de cerc, însă cum în acest arc de cerc toate triunghiurile înscrise $BD'D_2'$ sunt egale cu triunghiurile ABC corespunzătoare, rezultă că cercul $BD'D_2'$ este egal cu cercul ABC. Dacă nu am fi avut rotaţia de unghiul α şi dacă F era mijlocul arcului CAB, atunci centrul cercului BDD_2 ar fi fost simetricul centrului O al cercului ABC faţă de BF; aşa încât în acest caz pentru aflarea centrului cercului locului găsit vom roti simetricul lui O faţă de BF de un unghiu α cu centrul în B.

Când vârful A va descrie cel de al doilea arc CB, vom obţine prin consideraţiuni identice ca loc geometric arcul de cerc $BD''D_2''$, care face parte din cercul $BD''D_2''$ cu centrul în simetricul lui O faţă de BF' — unde F' este mijlocul arcului CB — şi apoi rotit de unghiul α cu centrul în B.

Observaţiuni. 1°. Enunţul problemei 4931 aşa cum a fost propus poate fi interpretat în mai multe feluri, deoarece impune numai că BC este constantă.

a) Vârfurile B şi C fixe şi $\overline{BC}$ constant, caz ce am tratat mai sus.

b) Vârful A fix şi direcţiile AC şi AB fixe, $\overline{BC}$ = constant iar B şi C mobile.

c) Vârfurile B şi C fixe pe direcţiile laturilor iar triunghiul se roteşte în jurul lui A fix.

In oricare alte cazuri am da prea multă libertate figurii şi problema nu ar mai avea sens.

b) In acest caz, când luăm $\overline{BD} = \overline{AC}$ locul va fi segmentul:

$$D_1A + AD_2 + D_2D'_1$$

unde scrierea indică şi sensul în care s'a deplasat D. Punctul D_1 obţinându-se când B s'ar afla în A şi apoi urcând pe AB până la maximum, când $BC \perp AC$ şi se are D_2, apoi coborând până în D'_1 când C a ajuns în A — dacă am fi luat ca în cazul mai general de mai sus atunci se rotea D_1D_2 de unghiu α în jurul lui A. Pentru cazul când se ia $\overline{AD} = \overline{AC}$ locul va fi format din două puncte situate pe AB deoaparte şi de alta a lui A — sau rotite de unghiul α.

c) Triunghiul rotindu-se în jurul lui A punctul D care este fix pe AB va descrie un cerc cu centrul în A şi de rază $\overline{AD} = \overline{AC}$. Când se ia $\overline{BD} = \overline{AC}$ punctul D va descrie un cerc cu centrul în A şi de rază $|\overline{AB} - \overline{AC}|$ — adică se ia valoarea absolută a diferenţei.

2°. Venind acum la cazul studiat, pentru problema 4931 înseamnă că am avea $\alpha = 0°$, $\alpha = 180°$ şi $A = 90°$, ori în atari cazuri cele două locuri dela (I) sunt egale şi simetrice faţă de BC şi deci $B \equiv D''$. Analog pentru cazul (II). Când $\alpha = 180°$ avem aceeaşi situaţie numai că trebue să rotim soluţiile pentru $\alpha = 0°$ cu 180°.

3°. Soluţia analitică nu am mai trecut-o pentru că nu conduce la lucruri prea simple. In coordonate carteziene conduce la o ecuaţie de gradul VI care se descompune în trei ecuaţii de gradul al II-lea cari reprezintă trei cercuri dintre care numai două corespund în parte problemei.

4°. Dintre toţi corespondenţii numai D-l ORIGEN MĂRCULESCU (Craiova) a observat că enunţul problemei 4931 poate fi interpretat în mai multe feluri şi tratează cazul *b)* dela 1° şi rezolvă complet problema pentru un triunghiu oarecare ocupându-se de ambele sensuri în cari pot fi considerate segmentele $\overline{AD}$ şi $\overline{BD}$, fără a observa că rezolvarea unui caz conduce prin rotirea cu 180° la soluţia celuilalt. In aceleaşi condiţiuni D-l ALEX. I. ROHR (lic. milit. Iaşi) considerând tot un triunghiu oarecare găseşti pentru fiecare din cazurile studiate mai sus câte un cerc în loc de un arc de cerc.

5°. D-nii VASILE C. BÂRZU, ACHILE PETRESCU (lic. milit. Iaşi) şi M. AL. VASILESCU-STABU (lic. Mihai Viteazu, Alba Iulia) rezolvă complect problema propusă considerând B şi C fixi, iar D-l JOE SEGAL dă în aceleaşi condiţiuni o bună soluţie analitică. D-l EMIL BOIAN dă o soluţie analitică fără a controla dacă rezultatele răspund în întregime problemei.

H. P. I.

PROBLEMA 5119. *Se face o înmulțire de două numere întregi și se observă că la factori, la produsele parțiale și la produsul total nu se află aceeași cifră de două ori. Cari sunt factorii?*

I. IONESCU.

Cele două numere întregi căutate nu pot fi mai mari ca 100, căci atunci factorii ar avea mai mult ca $(2+2)=4$ cifre; produsele parțiale ar avea mai mult ca $(2+2)=4$ cifre, iar produsul total cel puțin 3 cifre. Prin urmare operația cere în total peste $(4+4+3)=11$ cifre, și deci ele nu ar putea să fie toate diferite. Unul din factori are dar neapărat numai o cifră. Fie n acest număr de o cifră pe care îl vom considera ca înmulțitor. In acest caz înmulțirea se face direct, fără să mai avem nevoie de produse parțiale.

Deînmulțitul nu poate avea mai mult de 4 cifre, căci de ar avea peste 4, produsul ar avea și el peste 4 și deci operația ar cere cel puțin $(5+1+5)=11$ cifre, care nu ar putea fi toate diferite. Deînmulțitul nu ar putea deci să fie decât de una din formele a, ba, cba, $dcba$. De aci rezultă următoarele 8 tipuri de înmulțiri:

$$a \times n = p; \quad a \times n = qp; \quad ba \times n = qp; \quad ba \times n = rqp;$$

$$cba \times n = rqp; \quad cba \times n = srqp; \quad dcba \times n = srqp; \quad dcba \times n = tsrqp$$

în care a, b, c, d sunt cifre ale deînmulțitului și p, q, r, s, t cifre ale produsului.

Să facem mai întâi câteva observațiuni generale.

Inmulțitorul n nu poate fi 0, căci atunci $a=0$ și cifrele nu ar mai fi toate diferite. De asemenea a nu poate fi 0 căci atunci $p=0$ și iarăși cifrele nu ar mai fi toate diferite. Apoi, nu putem lua $n=1$ căci iese $p=a$, nici $a=1$ căci iese $p=n$ și nu am mai avea toate cifrele diferite.

Cifrele a, b, c, d, n, p, q, r, s, t sunt toate diferite. Intre ele există oarecare incompatibilități. Astfel nu putem lua pe n sau a egal cu 6 și pe celălalt 2, 4, sau 8 căci iese p respectiv 2, 4, sau 8. Nu putem lua pe n sau a egal cu 5 și pe celălalt o cifră diferită nepereche (3, 7 sau 9) căci atunci iese și $p=5$.

Să examinăm acum diferitele tipuri de înmulţiri.

1. $a \times n = p$. Ţinând seama de observaţiunile de mai sus, unul din factorii a sau n trebue să fie 2, căci altfel cel mai mic produs ar fi $3 \times 4 = 12$, care este produs de două cifre. De aci ies numai două soluţii:

$$2 \times 3 = 6, \qquad 2 \times 4 = 8.$$

Aceste soluţiuni au fost date de D-nii ST. CETĂŢIANU şi ACHILLE V. PETRESCU.

2. $a \times n = qp$. Ţinând seamă de observaţiile de mai sus şi privind pe o tablă a lui PITAGORA, deducem uşor următoarele 20 de soluţii:

$2\times5=10$, $2\times7=14$, $2\times8=16$, $2\times9=18$, $3\times4=12$, $3\times6=18$,
$3\times7=21$, $3\times8=24$, $3\times9=27$, $4\times5=20$, $4\times7=28$, $4\times8=32$,
$4\times9=36$, $5\times6=30$, $5\times8=40$, $6\times7=42$, $6\times9=54$, $7\times8=56$,
$7\times9=63$, $8\times9=72$.

Aceste soluţii au fost date de D-nii ST. CETĂŢIANU şi ACHILLE V. PETRESCU.

3. $ba \times n = qp$. Pentru ca ba înmulţit cu n să dea un produs de două cifre trebue ca

pentru

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

să avem

$$ba < 50,\ 34,\ 25,\ 20,\ 17,\ 15,\ 13,\ 12.$$

Se vede că $n = 9$ nu convine căci ar cere $a = 0$ sau $a = 1$.

Pentru ca să găsim soluţii, la una din soluţiile dela No. 1 şi 2, scriem o cifră înaintea unuia din factori, diferită de a, n, p şi dacă produsul prin n are drept q o altă cifră, avem o soluţie. Se găsesc cu modul acesta următoarele 31 de soluţii:

$2\times15=30$, $2\times17=34$, $2\times18=36$, $2\times19=38$, $2\times34=68$, $2\times35=70$,
$2\times38=76$, $2\times39=78$, $2\times43=86$, $2\times45=90$, $2\times48=96$, $3\times16=48$,
$3\times18=54$, $3\times19=57$, $3\times26=78$, $3\times27=81$, $3\times29=87$, $4\times13=52$,
$4\times15=60$, $4\times17=68$, $4\times18=72$, $4\times19=76$, $5\times12=60$, $5\times14=70$,
$5\times16=80$, $5\times18=90$, $6\times13=78$, $6\times15=90$, $7\times12=84$, $7\times14=98$,
$8\times12=96$.

Aceste soluţii au fost găsite de D-nii ST. CETĂŢIANU şi ACHILLE V. PETRESCU.

4. $ba \times n = rqp$. Procedarea este la fel cu cea dela No. 3 cu singura deosebire că pentru *ba* luăm limitele date pentru *ba* sau valori superioare lor, bine înţeles nedepăşind numerele de două cifre. Se găsesc astfel soluţiile următoare în număr de 76:

$2\times53=106$, $2\times54=108$, $2\times65=130$, $2\times67=134$, $2\times69=138$,
$2\times73=146$, $2\times78=156$, $2\times79=158$, $2\times85=170$, $2\times93=186$,
$3\times54=162$, $3\times58=174$, $3\times64=192$, $3\times67=201$, $3\times68=204$,
$3\times69=207$, $3\times87=261$, $3\times89=267$, $4\times27=108$, $4\times38=152$,
$4\times39=156$, $4\times59=236$, $4\times78=312$, $4\times79=316$, $4\times89=356$,
$4\times92=368$, $4\times95=380$, $5\times26=130$, $5\times28=140$, $5\times32=160$,
$5\times34=170$, $5\times36=180$, $5\times38=190$, $5\times46=230$, $5\times62=310$,
$5\times64=320$, $5\times68=340$, $5\times72=360$, $5\times76=380$, $5\times78=390$,
$5\times82=410$, $5\times86=430$, $5\times92=460$, $5\times96=480$, $6\times29=174$,
$6\times35=210$, $6\times43=258$, $6\times45=270$, $6\times57=342$, $6\times89=534$,
$6\times97=582$, $7\times24=168$, $7\times28=196$, $7\times52=364$, $7\times56=392$,
$7\times58=406$, $7\times59=413$, $7\times69=483$, $7\times89=623$, $7\times93=651$,
$7\times94=658$, $8\times37=296$, $8\times45=360$, $8\times52=416$, $8\times59=472$,
$8\times63=504$, $8\times64=512$, $8\times74=592$, $8\times79=632$, $8\times92=736$,
$8\times94=752$, $8\times95=760$, $9\times42=378$, $9\times52=468$, $9\times72=648$,
$9\times84=756$,

Aci D-l ST. CETĂŢIANU a pierdut 4 soluţii şi D-l ACHILLE V. PETRESCU a pierdut 6 soluţii.

5. $cba \times n = rqp$. Calea de urmat este ca la No. 3. Limitele lui *cba* sunt:

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$$
$$cba < 500,\ 334,\ 250,\ 200,\ 167,\ 143,\ 125,\ 112.$$

Problema admite următoarele 50 de soluţii:

$2\times154=308$ $2\times178=356$, $2\times179=358$, $2\times185=370$, $2\times307=614$,
$2\times309=618$, $2\times345=690$, $2\times354=708$, $2\times358=716$, $2\times359=718$,
$2\times415=830$, $2\times435=870$, $2\times453=906$, $2\times458=916$, $2\times465=930$,
$2\times478=956$, $2\times485=970$, $3\times168=504$, $3\times169=507$, $3\times176=528$,
$3\times182=546$, $3\times189=567$, $3\times192=576$, $3\times194=582$, $3\times218=654$,
$3\times219=657$, $3\times267=801$, $3\times269=807$, $4\times127=508$, $4\times152=608$,
$4\times157=628$, $4\times158=632$, $4\times173=692$, $4\times189=756$, $4\times192=768$,
$4\times195=780$, $4\times209=836$. $4\times215=860$, $4\times219=876$, $5\times128=640$,
$5\times134=670$, $5\times138=690$, $5\times146=730$, $5\times164=820$, $5\times172=860$,
$5\times184=920$, $5\times186=930$, $6\times145=870$, $6\times157=942$, $7\times136=952$.

D-l ST. CETĂŢIANU a pierdut aci 7 soluţii. D-l ACHILLE V. PETRESCU nu a examinat acest caz.

(Va urma). I. I.

PROBLEMA 5231. *Fie* O′ *un punct pe înălțimea din* A *a triunghiului* ABC *înscris în cercul* O. *Cercul de centru* O′, *trecând prin* A, *taie laturile* AC, AB *în* C′, B′; *dreptele* BC, B′C′ *se taie în* U *și cercurile* ABC, AB′C′ *în* U′. *Să se arate că invers,* AO *este perpendiculară pe* B′C′ *și punctele* A, U, U′ *sunt coliniare.*

Să se observe că această configurație este invariantă într'o inversiune de pol A.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: PAUL P. DRĂGHICESCU (clasa VI-a lic. militar Iași), MIRCEA D. POPA (lic. militar Iași), MIRCEA L. RUSSU (student, București), GHEORGHE D. SBÂRNEA (lic. Tecuci) și MIHAIL I. TROFILOV (lic. Brăila).

In inversiunea de centru A, AB, AC sunt invariante; BC devine un cerc ce trece prin A cu diametrul corespunzător perpendicular pe BC, fie AB′C′; B′, C′ sunt inversele punctelor B, C; inversa lui B′C′ este cercul ABC. U fiind intersecția dreptelor BC, B′C′ și U′ a cercurilor AB′C′, ABC inverse lor, U′ este inversul lui U deci A, U, U′ coliniare. AO este ortogonală cercului ABC deci în inversiune AO (invariant) este perpendiculară pe B′C′, inversul cercului ABC.

Observare. Ca demonstrație directă, 1°) fie V diametral opus lui A în cercul O′; B′C′ unește proiecțiile lui V pe laturi, deci este perpendiculară pe isogonala AO a cevianei AV. 2°) U′ este punctul MIQUEL al patrulaterului BB′CC′ inscriptibil (fiindcă B′C′ perpendiculară pe AO este antiparalelă la BC) și se știe că este situat pe diagonala a treia AU.

PROBLEMA 5313. *Se dau ecuațiile de gradul al doilea în* y:

(1) $y^2 + yf(x) + f'(x) = 0$; (2) $y^2 + y\varphi(x) + \varphi'(x) = 0$.

1°. *Să se determine funcțiunile* $f(x)$ *și* $\varphi(x)$ *astfel încât rădăcinile ecuației* (2) *să fie inversele rădăcinilor ecuației* (1).

2°. *Intre funcțiunile* $f(x)$ *și* $\varphi(x)$ *astfel determinate există relația:*

$$f(x) - \varphi(x) = c\, f(x).\varphi(x);$$

c fiind o constantă.

C. MIHU.

Soluţie dată de D-l POPA D. MIRCEA-Lic. Milit. Iaşi.

Ecuaţia care admite rădăcinile inverse ecuaţiei a doua este:

$$y^2\varphi'(x) + y\varphi(x) + 1 = 0;$$

Deoarece ecuaţiile:

$$y^2 + yf(x) + f'(x) = 0 \quad y^2\varphi'(x) + y\varphi(x) + 1 = 0;$$

trebue să aibă aceleaşi rădăcini, coeficienţii lor trebue să fie proporţionali:

$$(1) \qquad \frac{\varphi'(x)}{1} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

eliminând pe $f(x)$ şi $f'(x)$, găsim ecuaţia diferenţială:

$$(2) \qquad \varphi'^2 - \varphi\varphi'' - \varphi' = 0$$

substituţia:

$$(3) \qquad \varphi' = p;$$

$$\varphi'' = p \cdot \frac{dp}{d\varphi}$$

ne conduce la ecuaţia:

$$(2') \qquad p^2 - p\varphi\frac{dp}{d\varphi} - p = 0 \; ; \; (p \neq 0).$$

Integrând ecuaţia (2') obţinem:

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{dp}{p-1}$$

$$(4) \qquad \varphi = A(1-p) \quad [A = \text{const}];$$

iar

$$(5) \qquad f = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{A(1-p)}{p} = A\left(\frac{1}{p} - 1\right).$$

Substituţia (3) ne dă:

$$p = -Ap';$$

sau:

$$\frac{p'}{p} = -\frac{1}{A}; \quad p = B \cdot e^{-\frac{x}{A}}; \quad [B = \text{const}].$$

Deci

$$\boxed{\varphi(x) = A\left(1 - B.e^{-\frac{x}{A}}\right)} \quad ; \quad \boxed{f(x) = \frac{A\left(1 - B.e^{-\frac{x}{A}}\right)}{B.e^{-\frac{x}{A}}}}.$$

2°. Din (1) deducem:

$$f - \varphi = A(1-p).\left(\frac{1}{p} - 1\right);$$

$$f.\varphi = A^2(1-p).\left(\frac{1}{p} - 1\right);$$

sau:

$$\boxed{f - \varphi = A.f.\varphi}$$

c. c. t. d.

Au mai trimis soluţii foarte bune D-nii: EMIL S. MODÂLCĂ şi TEODOR ŞERBAN dela Politehnica din Bucureşti, MIRCEA A. NEGREA (Brăila), GHEORGHIU E. OCTAV (Tulcea), PANTELIMON C-TIN, Lic. Milit.-Iaşi.

C. MIHU.

PROBLEMA 5316. *Se consideră o placă în formă de semicerc, de centru* O, *care se compune din trei jumătăţi de coroane concentrice omogene, razele cercurilor ce le separă fiind r, 2r, 3r. Ştiind că densităţile plăcilor corespunzătoare coroanelor sunt în progresie aritmetică, să se determine poziţia centrului de greutate al plăcii. Să se generalizeze la cazul a n jumătăţi de coroane şi apoi, făcând pe n să crească la infinit, să se determine poziţia centrului de greutate al unei plăci heterogene în formă de semicerc a cărei densitate variază uniform dela centru spre periferie, materia fiind constant repartizată dealungul fiecărui semi-cerc cu centrul în* O. *Să să verifice rezultatul cu ajutorul Calculului integral.*

RADU BĂDESCU.

Fie Ox axa de simetrie a plăcii. Notând cu $r_i = i.r$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ razele cercurilor ce separă coroanele C_i (în particular $r_n = n.r = R$, unde R e raza plăcii date) vom putea pune

$d_i = d_0 + (i-1)\,d$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, şi $D = d_0 + (n-1)\,d$, D fiind densitatea coroanei celei mai îndepărtate de centru. Suprafeţele S_i ale coroanelor considerate fiind

$$S_i = \frac{\pi}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ şi } r_0 = 0$$

abscisa X a centrului de gravitate G va fi dată de relaţia

$$X \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i S_i = \sum_{i=1}^{n} d_i X_i S_i \qquad (1)$$

unde X_i este abscisa centrului de gravitate G_i al coroanei C_i. Pentru calculul lui X_i se scoate din semi-cercul omogen de raxa r_i, semi-cercul de aceeaşi densitate şi de rază r_{i-1}, ceea ce echivalează cu compunerea a două forţe paralele, însă de sensuri contrarii. Cum centrul de greutate al unui semi-cerc omogen e dat de $X = \frac{4R}{3\pi}$, găsim

$$X_i = \frac{4}{3\pi} \frac{r_i^3 - r_{i-1}^3}{r_i^2 - r_{i-1}^2} = \frac{4}{3\pi} \frac{r_i^2 + r_i r_{i-1} + r_{i-1}^2}{r_i + r_{i-1}}$$

aşa că relaţia (1) devine

$$X \cdot \sum_{i=1}^{n} [d_0 - d + id]\,[i^2 - (i-1)^2] = \frac{4R}{3n\pi} \sum_{i=1}^{n} [d_0 - d + id]\,[i^3 - (i-1)^3].$$

Această relaţie se mai scrie sub forma

$$X \cdot \left[2d \sum_{i=1}^{n} i^2 + (2d_0 - 3d) \sum_{i=1}^{n} i - n\,(d_0 - d)\right]$$

$$= \frac{4R}{3n\pi}\left[3d \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\,(d_0 - 2d) \sum_{i=1}^{n} i^2 - (3d_0 - 4d) \sum_{i=1}^{n} i + n\,(d_0 - d)\right]$$

astfel că, înlocuind sumele cu valorile lor cunoscute, găsim

$$X = \frac{2R}{\pi} \frac{3dn^2 + 2\,(2d_0 - d)\,n - d}{4dn^2 + 3\,(2d_0 - d)\,n - d} = \frac{2R}{\pi} \frac{d\,(3n^2 - 2n - 1) + 4nd_0}{d\,(4n^2 - 3n - 1) + 6nd_0}$$

sau după substituirea lui d prin $\frac{D - d_0}{n - 1}$,

$$X = \frac{2R}{\pi} \frac{D\,(3n+1) + d_0\,(n-1)}{D\,(4n+1) + d_0\,(2n-1)}.$$

Se observă imediat că $X < R$.

In particular, pentru $n = 3$, găsim

$$X = \frac{4R}{\pi} \cdot \frac{5D + d_0}{13D + 5d_0}$$

iar pentru $n = 1$, $D = d_0$, când placa întreagă e omogenă, obţinem expresia cunoscută

$$X = \frac{4R}{3\pi}.$$

Pentru n tinzând spre infinit, se găseşte la limită

$$X = \frac{R}{\pi} \cdot \frac{3D + d_0}{2D + d_0}. \tag{2}$$

Verificarea se poate face cu ajutorul formulei

$$X \cdot \int d_i \cdot ds_i = \int d_i \cdot X_i \cdot ds_i$$

în care ds_i este suprafaţa unei semi-coroane elementare, d_i densitatea corespunzătoare şi X_i abscisa centrului de gravitate al acestei coroane omogene. Din cauza simetriei, integralele sunt simple.

In cazul nostru, x fiind un număr cuprins între r_i şi r_{i-1}, vom putea scrie, neglijând infiniţi mici de ordinul al II-lea,

$$ds_i = \frac{\pi}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2) = \frac{\pi}{2}(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1}) \sim \pi x\, dx$$

iar abscisa X_i calculată mai sus, va putea fi înlocuită prin $\frac{2x}{\pi}$.

Densitatea coroanei elementare creşte uniform dela d_0 la D când x creşte dela 0 la R. Ea e deci o funcţie lineară de x: $Ax + B$, unde $A + \frac{D - d_0}{n - 1}$ şi $B = d_0$.

Formula de mai sus devine

$$X \cdot \int_0^R (Ax + B)\, x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^R (Ax + B)\, x^2\, dx$$

aşa că, după calculul integralelor, se verifică imediat relaţia (2).

Soluţii analoage date de D-nii: ŞERBAN TEODOR, RIPIANU DUMITRU. D-l POPA D. MIRCEA a studiat numai cazul particular $d_0 = 0$. D-l RIPIANU a tratat şi cazul densităţilor în progresie geometrică.

R. B.

PROBLEMA 5319. *Fie* O *centrul cercului circumscris triunghiului* ABC. *Se iau pe razele* OA, OB, OC *punctele* A', B', C' *care le împart în același raport. Se cere:*

a) *Să se arate că perpendicularele scoborâte din* A', B', C', *respectiv pe* BC, CA, AB *sunt concurente într'un punct* P.

b) *Locul lui* P, *când raportul variază, este o dreaptă ce trece prin* O.

S-LT. I. I. BUZINCU.

Soluție dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU, D. D. BOIANGIU, FL. CĂRUNTU, P. P. DRĂGHICESCU, MIRCEA GH. DRĂGHICI, C. D. EFTIMIE, OCT. E. GHEORGHIU, C. C. MIHĂILESCU, C. C. MILEA, EM. MODÂLCĂ, C. PANTELIMON, IULIAN PETRESCU, AUREL N. POPA, MIRCEA D. POPA, MIRCEA L. RUSU, EM. I. SĂRULEȘTEANU, M. I. TREFILOV și EUG. GH. VIJELIE.

a) Fie O un punct oarecare din planul triunghiului, H ortocentrul și M, N, R intersecțiile perpendicularelor duse din A', B', C' pe laturi cu OH. Vom avea:

$$\frac{MO}{MH} = \frac{A'O}{A'A}, \quad \frac{NO}{NH} = \frac{B'O}{B'B}, \quad \frac{RO}{RH} = \frac{C'O}{C'C};$$

cum rapoartele din dreapta sunt egale prin ipoteză, însemnează că și rapoartele din stânga sunt egale, adică M, N, O este un același punct P. Este interesant de observat că acest punct este ortocentrul triunghiului A'B'C'.

b) Din cele de mai sus se vede imediat că locul lui P este dreapta OH.

Observare. D-nii: GH. GH. BROȘTEANU și GH. R. PETRESCU au dat soluții analitice.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5346. *O placă plană de formă oarecare se rotește în planul său în jurul unui punct fix* O. *La un moment dat se liberează punctul* O *fixându-se în același timp un alt punct* O_1 *al plăcii. Să se determine locul geometric al punctelor* O_1 *astfel încât după schimbarea legăturilor placa să rămână în repaos.*

Aplicație: un triunghiu echilateral de latură a mobil în jurul unuia din vârfuri.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de D-l M. STĂNCULESCU (elev al Şcoalei Politehnice din Bucureşti).

Să notăm cu ω iuţeala unghiulară în jurul punctului O şi să considerăm un element de massă *dm* la distanţa *r* de O. *Cantitatea de mişcare* a acestui element este :

$$dm \,.\, \omega \,.\, r.$$

Să luăm drept axe de coordonate OG*x*, O*y*, G fiind *centrul de greutate* al plăcii şi să sumăm *geometric* cantităţile de mişcare.

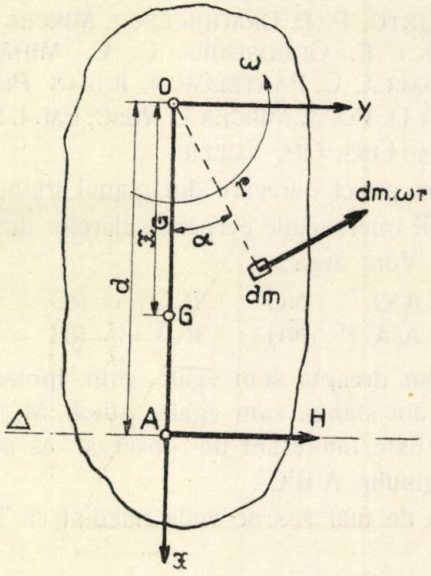


Fig. 1.

Vom obţine un vector H de componente :

$$H_x = \int dm \,.\, r\omega \sin\alpha = \omega \int dm \,.\, y = m\omega y_G = 0$$

$$H_y = \int dm \,.\, r\omega \cos\alpha = \omega \int dm \,.\, x = m\omega x_G$$

(*m* reprezintă massa totală a plăcii, iar x_G şi y_G coordonatele centrului de greutate).

Rezultă :

$$H = H_y = m\omega x_G.$$

Prin momente în O obținem:

$$H \cdot d = \int dm\omega r^2 = \omega \int dmr^2 = I_0\omega$$

I_0 fiind *momentul de inerție polar* al plăcii în raport cu punctul O.

Rezultă:

$$d = \frac{I_0\omega}{H} = \frac{I_0\omega}{m\omega x_G} = \frac{I_0}{mx_G}. \qquad (1)$$

Prin urmare *suma geometrică a tuturor vectorilor reprezentând cantitățile de mișcare, este un vector* H *paralel cu axa* Oy *la o distanță d de aceasta.*

Să presupunem acum, că liberăm punctul O și fixăm un alt punct O_1, astfel încât după această schimbare, placa să rămână în *repaos.*

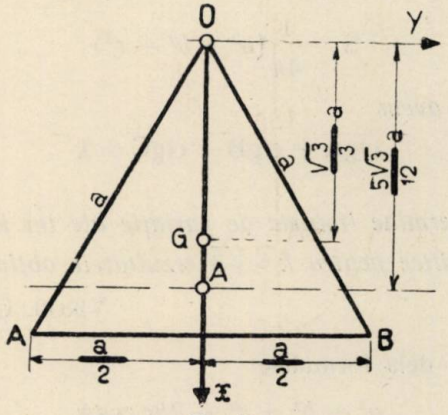


Fig. 2.

Cantitățile de mișcare după stabilirea legăturii noi sunt *nule;* deci *variația* cantităților de mișcare dinainte și după fixarea punctului O_1 este tot H.

Singura *percusiune* ce este aplicată plăcii fiind aceea din O_1 și cum percusiunile sunt *vectori echivalenți* vectorilor ce reprezintă *variația cantităților de mișcare,* rezultă că punctul O_1 se află situat pe suportul vectorului H.

Locul geometric căutat este deci dreapta Δ *suportul vectorului* H.

In cazul aplicației:

$$I_x = 2 \times \frac{1}{12}\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)^3 \quad ; \quad I_y = \frac{1}{4}a\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{5\sqrt{3}}{48}a^4 \quad ; \quad x = a\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad m = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$d = \frac{I_0}{mx_G} = \frac{5\sqrt{3}}{12}a.$$

Observație. Lungimea OA, este lungimea *pendulului simplu sincron* în mișcarea de oscilație a plăcii în jurul lui O.

AL. ST.

PROBLEMA 5361. *Suprafața unui triunghiu oarecare în funcție de laturile sale fiind dată de formula*

$$S = \frac{1}{4k}(a^2 + b^2 + c^2)$$

să se arate că avem:

$$\text{ctgA} + \text{ctgB} + \text{ctgC} = k$$

și reciproc.

Să se determine limitele de variație ale lui k.

Să se verifice pentru $k = \sqrt{3}$ *rezultatele obținute.*

VIRGIL GHIȚESCU.

1. Pornim dela formulele

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

și analoagele. Prin adunare obținem

(1) $\quad a^2 + b^2 + c^2 = 2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C.$

Insă

$$S = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ca\sin B}{2} = \frac{ab\sin C}{2}$$

iar prin ipoteză: $a^2 + b^2 + c^2 = 4kS$.

Substituind în (1) valorile lui $a^2 + b^2 + c^2$, bc, ca, și ab obținem tocmai

(2) $\qquad \text{ctgA} + \text{ctgB} + \text{ctgC} = k.$

Intrebuinţând calea retrogradă, dela (2), presupusă adevărată, ajungem la (1).

Fie ABC un triunghiu oarecare, satisfăcând condiţiunilor (1) şi (2). Poziţia în planul său i-o fixăm cu ajutorul axelor de coordonate $x'x$ şi $y'y$, prima fiind latura BC prelungită iar a doua perpendiculara pe mijlocul acesteia. Avem $\overline{BC} = a$ precum şi următoarele coordonate: $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $A(x, y)$. Foarte uşor reuşim să obţinem

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a - 2x}{2y} \qquad \operatorname{ctg} C = \frac{a + 2x}{2y}$$

$$\operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg}(B + C) = -\frac{\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C - 1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} = \frac{4x^2 + 4y^2 - a^2}{4ay}.$$

Introducând aceste valori în (2) şi efectuând toate calculele, găsim

$$x^2 + y^2 - aky + \frac{3a^2}{4} = 0. \tag{3}$$

Aceasta însemnează că luând pentru ABC, bază oarecare, $\overline{BC} = a$, vârful A se găseşte pe cercul cu centrul $C_1\left(0, \frac{ak}{2}\right)$ şi cu raza

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{k^2 - 3}.$$

Pentru ca triunghiul ABC să existe realmente, trebue ca cercul (3) să fie real, adică raza sa să fie reală. Impunând această condiţie rezultă pentru k următoarele limite

$$-\infty < k \leqslant -\sqrt{3}$$

$$+\sqrt{3} \leqslant k < +\infty.$$

Pentru (1), considerând că în genere nu se ia decât $S > 0$, nu convine decât al 2-lea şir.

Pentru cazul $k = \sqrt{3}$ cercul (3) se reduce la centrul său $C_1\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Avem:

$$\overline{BC} = a$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a$$

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^0.$$

Formula (1) devine

$$S = \frac{1}{4\sqrt{3}}(a^2 + a^2 + a^2)$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

rezultat cunoscut.

Formula (2) devine

$$3 \operatorname{ctg} 60^0 = \sqrt{3} \quad , \quad 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Se verifică deci şi aceasta.

Observaţiune. Cercul (3) a rezultat ca o consecinţă a relaţiei). Avem:

$$\overline{BC}^2 = a^2$$

$$\overline{CA}^2 = b^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$

$$\overline{AB}^2 = c^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2.$$

După (1) vom avea

$$S = \frac{1}{4k}\left(2x^2 + 2y^2 + \frac{3a^2}{2}\right).$$

Pedealtăparte însă

$$S = \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{AA'} = \frac{1}{2}ay.$$

Egalizând aceste valori,

$$\frac{1}{4k}\left(2x^2+2y^2+\frac{3a^2}{2}\right)=\frac{1}{2}ay$$

rezultă în urma simplificărilor chiar ecuaţia (3). Conchidem deci că este satisfăcută şi condiţia (1).

2. S'au primit pentru această problemă soluţiuni foarte bune, cu menţionări precum urmează dela: D-l PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. milit. Iaşi), rezolvă trigonometriceşte prima parte şi determină limitele lui k punând

$$f(x,y)=k=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C=x+y-\frac{xy-1}{x+y}$$

şi căutând extremele acestei funcţiuni de două variabile independente; D-l CONST. PANTELIMON (şc. de ofiţeri A. C. A.), partea 1-a ca în soluţia publicată. Pentru limitele lui k, observând că avem $k=\operatorname{ctg}\omega$, unde ω este unghiul lui BROCARD, foloseşte cele cuprinse în Géométrie du triangle par TR. LALESCU, cap. 17. Mai menţionăm că în soluţia D-Sale se cuprinde şi soluţia unei probleme propusă în G. M. Nr. 8/XLVI; D-l GH. D. SBÂRNEA (Tecuci) foloseşte deasemenea TR. LALESCU op. şi loc. cit.; D-l J. SEGAL (Buc.) foloseşte pe lângă TR. LALESCU şi studiul VUIBERT: Rélations entre les éléments d'un triangle.

Necomplect a rezolvat problema D-l I. ANDONIE.

3. Din soluţia publicată se poate deduce că atât ca concepţie cât şi ca rezolvare, problema Nr. 5361 apare ca independentă de cele cuprinse în studiile menţionate de D-nii corespondenţi.

V. GH.

PROBLEMA 5372. *Să se stabilească inegalitatea*

$$(a^2-bc\cos A)^2+(b^2-ca\cos B)^2+(c^2-ab\cos C)^2\geqslant 4S^2$$

notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu.

S-LT. M. GRUMĂZESCU.

Soluţie dată de D-nii: MINEA şi VIRGIL V. ALDEA, MATEI M. CHINTESCU, C. D. EFTIMIE, VICTOR L. FLORESCU, OCT. E. GHEORGHIU, EUG. N. MOSCOVICI, MIRCEA A. NEGREA, FL. POPESCU, ŞT. TILICĂ şi EUG. GH. VIJELIE.

Ţinând seamă de formulele cunoscute

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad 16S^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4),$$

inegalitatea din enunţ se scrie

$$(3a^2-b^2-c^2)^2+(3b^2-c^2-a^2)^2+(3c^2-a^2-b^2)^2\geqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4),$$

Făcând calculele totul se reduce la a arăta că

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 \geqslant 0$$

inegalitate cunoscută. Intr'adevăr inegalitatea se mai poate scrie sub forma

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geqslant 0.$$

Egalitatea are loc atunci când $a^2 = b^2 = c^2$, adică triunghiul este echilateral.

Observare. S'au primit câteva soluţii greşite.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5428. *Fie* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *două triunghiuri omologice înscrise într'un cerc* O; O_1, O_2, O_3 *centrele cercurilor* BOC, COA, AOB *iar* O_1', O_2', O_3' *centrele cercurilor* B_1OC_1, C_1OA_1, A_1OB_1. *Să se arate că triunghiurile* $O_1O_2O_3$ *şi* $O_1'O_2'O_3'$ *sunt omologice şi că axa lor de omologie conţine şi centrele cercurilor* AOA_1, BOB_1, COC_1.

THEODOR G. COCEA.

Soluţie. Fie a, b, c şi a_1, b_1, c_1 mijloacele razelor $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ şi $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$, $\overline{OC_1}$. O_1 este intersecţia perpendicularelor în b şi c pe OB şi OC, etc. Punctele a, b, c, a_1, b_1, c_1 sunt pe un cerc de centru O şi O_2O_3 tangentă în a la acest cerc, etc. Ca să arătăm că triunghiurile $O_1O_2O_3$ şi $O_1'O_2'O_3'$ sunt omologice vom arăta că O_1O_1', O_2O_2', O_3O_3' sunt concurente sau că polurile lor

$$A' \equiv (bc,\ b_1c_1),\ B' \equiv (ca,\ c_1a_1)\ C' \equiv ab,\ a_1b_1)$$

sunt coliniare. Dacă A″, B″, C″ sunt intersecţiile laturilor triunghiurilor omologice ABC, $A_1B_1C_1$ deci coliniare şi punctele A′, B′, C′, mijloacele distanţelor $\overline{OA''}$, $\overline{OB''}$, $\overline{OC''}$, — sunt coliniare. c. t. a.

Centrul cercului AOA_1 este intersecţia perpendicularelor în a pe OA şi în a_1 pe OA_1, deci el este intersecţia dreptelor O_2O_3, $O_2'O_3'$, etc. Deci centrele cercurilor AOA_1, BOB_1, COC_1 se găsesc pe axa de omologie a triunghiurilor $O_1O_2O_3$ şi $O_1'O_2'O_3'$.

PAUL DRĂGHICESCU
Liceul Militar Iaşi.

Soluția și generalizarea autorului. Considerăm punctele $M \equiv (BC, B_1C_1)$, $N \equiv (CA, C_1A_1)$, $P \equiv (AB, A_1B_1)$ care sunt coliniare. Folosim transformarea prin polare inverse pe care am expus-o în articolul: *„Asupra unei transformări"* din revista *Pitagora* (V: 226). O_1 și O_2 sunt respectiv polurile inverse ale lui BC și CA. De asemenea O_1' și O_2' sunt polurile inverse ale lui B_1C_1 și C_1A_1. Rezultă că dreptele O_1O_1', O_2O_2', O_3O_3' sunt polarele inverse ale punctelor M, N, P. Punctele M, N, P fiind coliniare rezultă că O_1O_1', O_2O_2', O_3O_3' sunt concurente într'un punct care va fi polul invers al axei de omologie MNP.

O_1O_2 și $O_1'O_2'$ sunt polarele inverse ale lui C și C_1. Punctul $M' \equiv (O_1O_2, O_1'O_2')$ va fi polul invers al lui CC_1 deci el este și centrul cercului COC_1, etc.

In general se poate enunța: *Dacă* ABC *și* A'B'C' *sunt două triunghiuri omologice, triunghiurile* $A_1B_1C_1$ *și* $A_1'B_1'C_1'$ *obținute luând polurile inverse ale laturilor lor în raport cu un cerc* O, *sunt și ele omologice și au ca axă și centru de omologie polara inversă și polul invers al centrului și axei de omologie ale triunghiurilor de referință.*

EXERCIȚII

3. Se consideră cercul (O) de rază R și punctul A, fixe. Fie: P unul oarecare din punctele de intersecție ale lui (O) cu o secantă mobilă care trece prin A; Q punctul interior care împarte segmentul $\overline{AP}$ în raportul $\frac{\overline{QA}}{\overline{QP}} = k_1$; Q', proiecția lui Q pe AO; M punctul interior care împarte pe $\overline{QQ'}$ în raportul $\frac{\overline{MQ}}{\overline{MQ'}} = k_2$. Să se afle locul geometric al punctului M când secanta AP se învârteşte în jurul lui A. VIRGIL GHIȚESCU.

R. Fie O_1 punctul în care paralela la OP taie pe OA. Acest punct este fix deoarece $\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1O}} = k_1$. Locul lui Q este deci cercul cu centrul în O_1 și cu raza $\overline{O_1Q} = \frac{k_1}{1+k_1}R$. Avem apoi:

$$\overline{MQ'} = \frac{1}{1+k_2}\overline{QQ'}$$

unde evident $\frac{1}{1+k_2} < 1$.

Locul lui M este deci o elipsă cu centrul în O_1 şi ale cărei semiaxe sunt

$$a = \frac{k_1}{1 + k_1} R \quad , \quad b = \frac{k_1}{(1 + k_1)(1 + k_2)} R.$$

4. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$x^2 - y^2 = 2^n .$$

IULIAN PETRESCU.

R. Dacă α, β sunt numere întregi legate prin relaţia

$$\alpha + \beta = n$$

atunci ecuaţia din enunţ, care se poate scrie

$$(x - y)(x + y) = 2^{\alpha+\beta}$$

conduce la sistemul

$$x - y = 2^{\alpha} \quad , \quad x + y = 2^{\beta}$$

care are soluţiile

$$x = 2^{\alpha-1} + 2^{\beta-1} \quad \text{şi} \quad y = 2^{\beta-1} - 2^{\alpha-1}.$$

PROBLEME PROPUSE

4991 [1]). Se consideră două triunghiuri T_1 şi T_2 înscrise în acelaş cerc (O). Fie M un punct arbitrar pe acest cerc. Se cere:

1°. Să se determine punctul N astfel ca dreapta lui SIMPSON a acestui punct în raport cu unul din triunghiuri să fie paralelă cu dreapta lui SIMPSON a lui M în raport cu celalt triunghiu.

2°. Să se arate că punctul M variind, coarda MN păstrează aceeaşi lungime.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5557. Care sunt fracţiile subunitare cu numărătorii şi numitorii sub 1000, care se pot simplifica ştergând dela numărător şi dela numitor ultima cifră dela dreapta?

I. IONESCU.

5558. Să se găsească patratul perfect $abc \ldots lmn$ a cărui rădăcină este un multiplu al numărului $bc \ldots lm$.

GL. GH. BUICLIU.

1) Inlocueşte problema propusă la pag. 670, Vol. XLIII, cu acelaş număr, fiind cunoscută.

5559. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reprezintă numerele prime cu N şi inferioare lui, atunci avem:

$$p_1^n + p_2^n + \ldots + p_n^n = \mathcal{M} \cdot \varphi(N),$$

unde $\varphi(N)$ este indicatorul lui N.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5560. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând piciorul înălţimii din A, al medianei din B şi al bisectoarei din C.

GH. BASACOV.

5561. Fie A un punct pe dreapta Δ şi (O) un cerc variabil tangent în A la Δ. Cercul (O) întâlneşte o altă dreaptă dată, Δ', în B şi C. Se cere să se găsească locul intersecţiei cercurilor O_b şi O_c care trec prin A şi sunt tangente dreptei Δ' respectiv în B şi C.

M. D. POPA.

5562. R, S, ω fiind elementele ştiute ale unui triunghiu, să se demonstreze că, dacă avem relaţia:

$$S \cdot \operatorname{cotg}^3\omega + 9S \cdot \operatorname{cotg}\omega = 27R^2,$$

triunghiul este automedian.

ION C. VASILIU.

5563. Un trunchiu de con circular are drept baze cercurile de raze R şi *r*. Să i se calculeze înălţimea *h* ştiind că centrul de greutate: 1°. al suprafeţei laterale; 2°. al suprafeţei totale; 3°. al volumului conului, coincide cu centrul sferei circumscrisă aceluiaşi con.

V. THÉBAULT.

5564. Se consideră parabolele (γ') şi (γ'') înscrise într'un triunghiu fix şi având axele perpendiculare. Să se demonstreze că:

1. Cele şase puncte de contact ale parabolelor (γ') şi (γ'') cu laturile triunghiului sunt pe aceeaşi hiperbolă echilateră (H), ale cărei direcţii asimptotice sunt paralele cu axele acestor parabole.

2. Parabolele (γ') şi (γ'') variind, hiperbolele echilatere (H), corespunzătoare, trec prin patru puncte fixe.

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

5565. Să se scrie ecuaţia focală a parabolelor (P) de mărime constantă, cu parametrul egal cu p, în raport cu axele de coordonate perpendiculare OX, OY.

2. Să se găsească condiţiile ca parabolele (P) să fie tangente la axele OX şi OY.

3. Să se afle locul focarelor.

4. Insemnând cu A şi B punctele de contact ale unei parabole (P) cu OX şi OY, să se afle locul punctului I de intersecţie a normalelor în A şi B la parabola P).

5. Să se afle înfăşurătoarea cercului de diametru $\overline{AB}$.

N. ABRAMESCU.

5566. Să se pună expresia trigonometrică

$$E \equiv \frac{9\cos\left(a+\frac{9}{2}b\right)-23\cos\left(a+\frac{7}{2}b\right)+16\cos\left(a+\frac{5}{2}b\right)-2\cos a\cos\frac{b}{2}}{8\sin^3\frac{b}{2}}$$

sub forma:

$$E \equiv A\sin(a+b)+B\sin(a+2b)+C\sin(a+3b),$$

determinându-se coeficienţii A, B, C.

GH. D. SIMIONESCU.

5567. Să se studieze seria cu termenul general:

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\left(\sin\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n+1}\right),$$

după diferitele valori ale lui α.

GH. TH. GHEORGHIU.

5568. Fiind date două polinoame $P(x)$, $Q(x)$, prime între ele, să se determine polinomul de grad minim $u(x)$, astfel că, dacă a este un zero al lui $P(x)$, iar b un zero al lui $Q(x)$, să avem: $u(a+1)=u(a)$, $u(b+1)\cdot u(b)+1=0$.

Discuţie.

M. GHERMĂNESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bakonyi C. (5507, 31); *Baltă Chr.* (5473, 507); *Bodnărescu M. Horia* (4396, 5442, 507); *Cruceru Gh. C.* (5530); *Drăghicescu P. Paul* (4373, 920, 5060, 137, 246, 93, 96, 416, 29, 54, 55, 68, 85, 500, 04, 22, 30, 31, 44); *Dumitrescu F. D.* (5543); *Eftimie D. C.* (5003, 245, 424, 75, 77, 94, 95, 526, 37, 40, 43, 53); *Ieşan St. Al.* (5543); *Isac Gr. Emil* (5478, 526); *Moscovici N. Eug.* (5174); *Negrea A. Mircea* (5473, 526); *Pantelimon Const.* (5517, 36); *Popescu Florin* (5442); *Popescu Gh. Marin* (4396); *Ripianu D-tru* (5296); *Sbârnea D. Gh.* (5113); *Thébault V.* (N, A); *Voinea P. R.* (5504, 10, 22, 24, 29, 33, 43, 44, 53, 55); *Wegener N. E.* (4968, 5054, 174, 410, 16, 37).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 80 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 74 189.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1941

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIIU

SUMARUL

1. † Profesorul Gh. Bratu . . . . . *P. Sergescu.*
2. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
3. Cercetări în legătură cu indicatorii . . *Comandor I. Linteș.*
4. Câteva proprietăți mecanice și geometrice ale elipselor lui Kepler . . . . . *Ing. Alex. Stoenescu.*
5. Raport asupra premiului „Vasile Conta". *Comisiunea pentru premii.*
6. Note Matematice: 6 — 12.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Probleme rezolvate: 1008, 3215, 3300, 4621, 4979, 5023, 5113, 5166, 5255, 5364.
10. Exerciții: 5.
11. Probleme propuse: 5565, 5569 — 5579.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **55**42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

† PROFESORUL GH. BRATU

(25.II.1881—1.IX.1941)

Gazeta Matematică este din nou lovită de un doliu dureros. Nu se împlineşte anul dela zilele părăsirii Clujului şi în câteva luni, Universitatea Daciei Superioare pierde trei dintre făuritorii ei. După ION MINEA şi ION DRĂGOIU, foşti Rector, Decan şi Prorector, dela Facultatea de Medicină (azi în Sibiu), acum este smuls dintre noi, dela catedră, din plină activitate, GHEORGHE BRATU fost Decan şi Prodecan, timp de 8 ani, al Facultăţii de Ştiinţe, (azi în Timişoara).

GHEORGHE BRATU a fost una din figurile cele mai luminoase ale Facultăţii de Ştiinţe din Cluj. Coleg în cel mai deplin înţeles al cuvântului. Gata de a ajuta cu vorba, cu inima şi cu fapta. Un adevărat pasionat al binefacerii! Sute de studenţi şi elevi au găsit adăpost şi hrană în casa lui legendar de ospitalieră. De îndată ce afla de greutăţile cuiva, el sărea cu toate mijloacele ca să-l scoată din impas. Cea mai mare parte din agonisita sa, după muncă grea, a trecut în împărţirea de ajutoare, în mod necunoscut, la rude sau cunoscuţi, la vreo operă culturală sau naţională. Sufletul lui cald suferea de durerile şi nedreptăţile pe care le vedea în jur. Fără şovăire, se despuia de tot ce putea pentru a vedea cât mai multă mulţumire în jurul lui.

Această seninătate sufletească se traducea prin o nesecată mulţumire de darurile trimise de Dumnezeu în fiecare clipă. Orice act, oricât de neînsemnat, era pentru el prilej de mulţumire. Niciodată n'a vrut să vadă scăderile sau răutăţile semenilor. Timp de 15 ani, am lucrat în aceeaşi cameră câteva ore în fiecare zi.

Niciodată nu l-am auzit plângându-se de semenii săi sau invidiind pe cineva. Şi totuşi, ar fi avut de multe ori îndreptăţirea să se plângă. In schimb se bucura ca un copil de succesul prietenilor şi cunoscuţilor săi.

Căldura sufletească a lui BRATU, a fost unul din elementele care au cimentat familia noastră matematică dela Cluj, familie pe care 20 ani de viaţă comună nu au turburat-o cu nicio umbră. Când vedea cineva la colţul Universităţii din Cluj, pe unul dintre noi, era sigur că şi ceilalţi colegi sunt la câţi-va paşi în urmă. Ne-a definit odată Profesorul MONTEL: Seminarul Matematic din Cluj, se deplasează „ca un corp rigid, nedeformabil". Cimentul acestei camaraderii frăţeşti l-am adus toţi, dar amestecarea lui ca să facă un beton trainic se datoreşte lui BRATU şi Domnului POMPEIU.

Pasionat al binelui şi al dragostei semenilor, BRATU a fost un pasionat al naţionalismului. Se dăruia întreg când era vorba de promovarea Neamului Românesc sau de bunul nume al Ţării noastre. Fără vreo misiune oficială de propagandă, el ne-a câştigat sute de simpatii active pentru ţara noastră. Dacă Guvernul francez i-a acordat Legiunea de Onoare, aceasta este şi urmarea acţiunii lui BRATU de a face pe oaspeţii ţării noastre să simtă neîncătuşat sufletul cald românesc. Vrednica sa tovarăşe de aproape 40 ani, D-na ELENA BRATU, i-a fost adevărată şi admirabilă colaboratoare pe acest drum. In clipele atât de triste de astăzi, îi prezentăm omagiile admiraţiei noastre pentru viaţa lor adânc românească şi o rugăm să ne dea voie să plângem, alături de D-sa şi de familia atât de crud încercată, ireparabila pierdere ce ne loveşte pe toţi.

Pasiunea naţionalismului a scumpului nostru prieten şi coleg s'a cristalizat mai ales în pasiunea pentru Universitatea din Cluj. Timp de 20 de ani, tot rostul vieţii lui a fost Universitatea. Nicio muncă nu era grea, obositoare sau umilitoare dacă era vorba de Universitate. Nu voiu uita niciodată bucuria şi elanul cu care BRATU muncea în Gara Cluj şi Observatorul de pe dealul Feleacului purtând lăzile încărcate cu piesele grele şi delicate ale lunetei ce venise din Paris. Nu ar fi lăsat pentru nimic în lume ca mâini nepricepute să atingă aceste obiecte preţioase şi să le strice tocmai când ajungeau la Cluj, după peste 10 ani de aşteptări.

Ani de zile BRATU făcea câte 30—35 ore de curs pe săptămână, până când s'au completat cadrele noastre. Nu e nicio îndoială că aceste ore de matematici generale, analiză, astronomie la Universitate, de algebră financiară la Academia Comercială şi de matematici elementare la Seminarul Pedagogic Universitar, sunt o cauză a irosirii prea timpurie a puterilor sale. Inafară de cursuri, ocupaţiile administrative ca Decan sau Prodecan, ca Director al Observatorului, grijile atât de mari legate de orice creaţie, cu atât mai mult cu cât timpurile grele se opuneau liberei desvoltări a organizării învăţământului, au apăsat asupra umerilor voinici ai lui.

Pasiunea pentru Universitate l-a însufleţit până într'atât încât nu concepea viaţa fără un rost activ în Universitate. Ne spunea de atâtea ori că preferă să moară înainte de a se vedea despărţit de scumpa lui Universitate. Ce teribilă şi prea timpurie împlinire a acestei dorinţi plângem noi astăzi!

Observatorul din Cluj a fost mândria lui, pasiunea lui cea mai mare, copilul lui drag. Acum un an, fără să se gândească la propriile lui lucruri, a întrebuinţat zilele dela începutul evacuării ca să împacheteze şi să salveze lunetele, telescopul cu oglinda cea mai bună din ţară, aparatele de astrofotografie... Fiul său Nicolae, inginer la CFR, i-a obţinut un vagon în care a evacuat această avere a Statului. Şi astfel, absolut întreaga avere de peste 5 milioane, a Observatorului, creată sub conducerea sa, a putut fi păstrată în patrimoniul românesc. Când, în ultimele zile, au venit camioane oficiale pentru evacuare, averea Observatorului era deja în siguranţă. Mai rămăsese de evacuat biblioteca sa de specialitate şi bietele sale lucruri personale pe care le lăsase pentru ultimul moment.

Biblioteca lui BRATU e o manifestare a pasiunii lui pentru cărţi. Exemplare rare, căutate ani de-a-rândul formează un material de studiu inapreciabil. Salvată dela Cluj, ea a intrat acum în patrimoniul Universităţii noastre, potrivit hotărîrii D-nei BRATU şi dorinţei lui GH. BRATU. O adevărată avere de aproape o jumătate de milion de lei, donată de o familie săracă! E o manifestare caracteristică a spiritului de jertfă a slujitorilor Universităţii clujene. După trecerea lui materială dintre noi, GH. BRATU va veghia părinteşte, prin biblioteca-i scumpă, la formarea generaţiilor viitoare de matematicieni ardeleni.

Aşa ne va rămâne veşnic în suflete icoana colegului nostru scump, plin de viaţă şi de bucurie de a trăi, dăruitor de sine fără precupeţire, lipsit de orice răutate, pasionat de a face binele, de a-şi sluji neamul, de a se devota Universităţii şi Observatorului, iubitor nepotolit de cărţi. Viaţa sa a fost întru toate conformă cu aceste note caracteristice ale sufletului său. Opera sa ştiinţifică va trăi şi va fi o dovadă a spiritului său eminent, şi un exemplu de urmat.

Patru direcţii principale au format preocupările ştiinţifice ale colegului nostru: analiza matematică, astronomia, manualele pentru studenţi, conferinţele pentru împărtăşirea la marele public a problemelor ştiinţifice contimporane.

Teza sa de doctorat în matematici la Sorbona (1914), lucrată sub conducerea lui PAUL APPELL a tratat despre echilibrul firelor supuse la forţe interioare, şi mai cu seamă la forţe de repulsie invers proporţionale cu cuburile (şi în general cu puteri impare ale distanţelor). Aceasta l-a condus la studiul unor tipuri speciale de ecuaţii integrale nelineare. O serie de note publicate în *C. R. de l'Académie des Sciences de Paris* şi în *Annalles Scientifiques de l'Université de Jassy* se ocupă de ecuaţii integrale exponenţiale (1911), de gradul al doilea (1915) sau integrodiferenţiale cu variabile separabile (1916). O probă despre felul cum erau apreciate rezultatele lui BRATU o avem în următoarea întâmplare: BRATU arătase ilustrului matematician EMILE PICARD câteva din teoremele ce obţinuse. Peste câteva zile, în camera lui modestă de student apare E. PICARD, care-i spune să redacteze imediat teoremele şi să le dea la publicat la Academia din Paris, căci şi alţi cercetători întrevedeau aceleaşi rezultate, aşa că BRATU risca să piardă dreptul la prioritate.

După numirea sa la Cluj, GH. BRATU s'a ocupat de formula creşterilor finite. Pornind dela o problemă a D-lui D. POMPEIU a studiat definiţia printr'un număr discret de puncte a unor clase de curbe date prin ecuaţii diferenţiale. De asemeni, a publicat note asupra seriilor, şirurilor polinomiale şi progresiilor de ordin superior (1921—23).

(Va urma).

P. SERGESCU.

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 623)

14. Expresia: $\theta = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu [\bar{\delta} r_\nu]^2$ *pentru* n *mase materiale:* $q_1 \ldots q_n$ *reprezintă „momentul de inerție" în raport cu axa care trece prin vectorul unitar* $\bar{\delta}$. *Să se arate cum variază* θ, *când vectorul unitar* $\bar{\delta}$ *își schimbă direcția.*

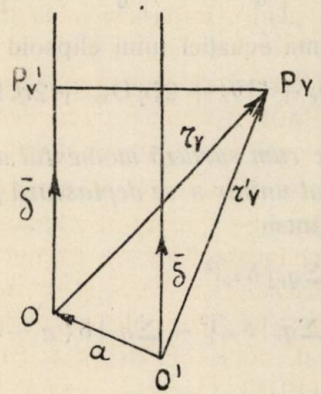


Fig. 34.

$[\delta_\nu r_\nu]^2$ reprezintă pătratul distanței $\overline{P_\nu P'_\nu}$. (Vezi fig. 34).

Se poate ușor constata că locul geometric al vârfului vectorului $\frac{1}{\sqrt{\theta}} \bar{\delta}$ reprezintă un elipsoid.

Pentru a obține ecuația elipsoidului, vom descompune pe $\bar{\delta}$ după vectorii unitari ortogonali de direcție constantă *i, j, k.*

$$\bar{\delta} = (\bar{\delta} i)\, i + (\bar{\delta} j)\, j + (\bar{\delta} k)\, k.$$

Expresia momentului de inerție va lua forma:

$$\theta = (\bar{\delta} i)^2 \theta_x + (\bar{\delta} j)^2 \theta_y + (\bar{\delta} k)^2 \theta_z + 2(\bar{\delta} i)(\bar{\delta} j) D_{xy} + 2(\bar{\delta} j)(\bar{\delta} k) D_{yz} + (\bar{\delta} k)(\bar{\delta} i) D_{zx} \qquad (1)$$

în care:

$$\theta_x = \Sigma q_\nu [i r_\nu]^2 \quad , \quad \theta_y = \Sigma q_\nu [j r_\nu]^2 \quad , \quad \theta_z = \Sigma q_\nu [k r_\nu]^2$$

$$D_{xy} = \Sigma q_\nu ([i r_\nu][j r_\nu]), \quad D_{yz} = \Sigma q_\nu ([j r_\nu][k r_\nu]), \quad D_{zx} = \Sigma q_\nu ([k r_\nu][i r_\nu])$$

θ_x, θ_y, θ_z reprezintă momentele de inerţie ale celor n mase materiale în raport cu axele x, y, z, iar D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} momentele de deviaţie în raport cu aceleaşi axe.

Dacă punem:

$$\frac{1}{\sqrt{\theta}}\bar{\delta} = \xi i + \eta j + \zeta k$$

în care:

$$\xi = \frac{(\bar{\delta}\, i)}{\sqrt{\theta}} \qquad \eta = \frac{(\bar{\delta}\, j)}{\sqrt{\theta}} \qquad \zeta = \frac{(\bar{\delta}\, k)}{\sqrt{\theta}}$$

relaţia (1) va lua forma ecuaţiei unui elipsoid:

$$1 = \xi^2 \theta_x + \eta^2 \theta_y + \zeta^2 \theta_z + 2\xi\eta D_{xy} + 2\eta\zeta D_{yz} + 2\zeta\xi D_{zx}.$$

15. Să se arate cum variază momentul de inerţie θ când axa care trece prin vectorul unitar $\bar{a}$ se deplasează paralel cu ea însăşi.

Din fig. 34 obţinem:

$$\theta = \Sigma q_\nu [\bar{\delta}\, r_\nu]^2$$

$$\theta' = \Sigma q_\nu [\bar{\delta}\, r'_\nu]^2 = \Sigma q_\nu [\bar{\delta}\{a + r_\nu\}]^2$$

sau:

$$\theta' = [\bar{\delta}\, a]^2 \Sigma q_\nu + \Sigma q_\nu [\bar{\delta}\, r_\nu]^2 + 2\Sigma q_\nu ([\bar{\delta}\, a][\bar{\delta}\, r_\nu]).$$

Punând:

$$2\Sigma q_\nu ([\bar{\delta}\, a][\bar{\delta}\, r_\nu]) = 2(a \Sigma q_\nu r_\nu) - 2(a\bar{\delta})(\bar{\delta} \Sigma q_\nu r_\nu)$$

obţinem:

$$\theta' = \Sigma q_\nu [\bar{\delta}\, r_\nu]^2 + [\bar{\delta}\, a]^2 \Sigma q_\nu + 2(a \Sigma q_\nu r_\nu) - 2(a\bar{\delta})(\bar{\delta} \Sigma q_\nu r_\nu).$$

Egalitatea aceasta ne arată cum depinde θ' de vectorul a când se deplasează axa paralel cu ea însăşi.

In cazul când punctul O se confundă cu centrul celor n mase materiale, rezultă:

$$\Sigma q_\nu r_\nu = r_c \Sigma q_\nu = 0$$

θ' ia forma următoare:

$$\theta' = \Sigma q_\nu [\bar{\delta}\, r_\nu]^2 + [\bar{\delta}\, a]^2 \Sigma q_\nu$$

în care $[\bar{\delta}\, a]^2$ reprezintă pătratul distanţei dintre cele două axe.

16. Se cunosc componentele vectorilor $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *după vectorii unitari ortogonali* i, j, k. *Se cere să se determine componentele vectorului* $[\mathcal{A}[\mathcal{B}\mathcal{C}]]$ *tot după vectorii unitari* i, j, k.

Avem:

$$[\mathcal{A}[\mathcal{B}\mathcal{C}]] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ (B_yC_z - B_zC_y) & (B_zC_x - B_xC_z) & (B_xC_y - B_yC_x) \end{vmatrix}.$$

17. Să se reprezinte în formă de determinant, produsul vectorial al vectorilor $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *descompuşi în componente după vectorii unitari necomplanari* $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$.

Introducând vectorii reciproci m', n' p', obţinem:

$$\mathcal{A} \quad (\mathcal{A}\,m')\,\bar{m} + (\mathcal{A}\,n')\,\bar{n} + (\mathcal{A}\,p')\,\bar{p}$$
$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}\,m')\,\bar{m} + (\mathcal{B}\,n')\,\bar{n} + (\mathcal{B}\,p')\,\bar{p}.$$

Produsul vectorial $[\mathcal{A}\mathcal{B}]$ ia forma:

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}\,\mathcal{B}] = {} & [\bar{m}\,\bar{n}]\{(\mathcal{A}\,m')(\mathcal{B}n') - (\mathcal{A}\,n')(\mathcal{B}\,m')\} + \\ & + [\bar{n}\,\bar{p}]\{(\mathcal{A}\,n')(\mathcal{B}\,p') - (\mathcal{A}\,p')(\mathcal{B}\,\bar{n}')\} + \\ & + [\bar{p}\,\bar{m}]\{(\mathcal{A}\,p')(\mathcal{B}\,m') - (\mathcal{A}m')(\mathcal{B}\,p')\}\end{aligned} \qquad (1)$$

ceea ce se poate exprima prin următorul determinant:

$$[\mathcal{A}\,\mathcal{B}] = \begin{vmatrix} [\bar{n}\,\bar{p}] & [\bar{p}\,\bar{m}] & [\bar{m}\,\bar{n}] \\ (\mathcal{A}\,m') & (\mathcal{A}\,n') & (\mathcal{A}\,p') \\ (\mathcal{B}\,m') & (\mathcal{B}\,n') & (\mathcal{B}\,p') \end{vmatrix}.$$

Relaţia (1) mai poate lua forma:

$$[\mathcal{A}\,\mathcal{B}] = [\bar{m}\,\bar{n}]([\mathcal{A}\,\mathcal{B}][m'\,n']) + [\bar{n}\,\bar{p}]([\mathcal{A}\,\mathcal{B}][n'\,p']) + [\bar{p}\,\bar{m}]([\mathcal{A}\,\mathcal{B}][p'\,m']).$$

Ţinând seama de relaţiile:

$$[m'\,n'] = \frac{\bar{p}}{(m\,[n\,p])} \cdots \frac{[\bar{m}\,\bar{n}]}{(\bar{m}\,[n\,p])} = p' \cdots$$

obţinem:

$$[\mathcal{A}\,\mathcal{B}] = m'([\mathcal{A}\,\mathcal{B}]\,\bar{m}) + n'([\mathcal{A}\,\mathcal{B}]\,\bar{n}) + p'([\mathcal{A}\,\mathcal{B}]\,\bar{p})$$

în care vectorul $[\mathcal{A}\,\mathcal{B}]$ e descompus în componente după vectorii reciproci m', n' p'.

18. Să se exprime în formă vectorială: tangenta, normala, binormala apoi planul normal, planul de curbură şi planul tangenţial, într'un punct P *al unei linii date în spaţiu.*

Linia din spaţiu o putem exprima cu ajutorul unui sistem de coordonate ortogonale în trei feluri:

a) $x = f_1(l)\ y = f_2(l)\ z = f_3(l)$;

b) $\varphi_1(xyz) = 0\ \varphi_2(xyz) = 0$. (Intersecţia a două suprafeţe);

c) $y = \psi_1(x)\ z = \psi_2(x)$. (Proiecţia liniei pe planurile (x, y) şi (zx).

Vom utiliza prima reprezentare.

Un punct de pe linie se fixează cu ajutorul vectorului de rază τ în felul următor:

$$\tau(l) = ix + jy + kz.$$

Elementul de linie $d\tau$ ia forma:

$$d\tau = dl\,\bar{t} = idx + jdy + kdz.$$

Un punct R de pe tangenta la linie în punctul dat P, se exprimă cu ajutorul vectorului de rază $\mathfrak{R}$. (Vezi fig. 35).

$$\mathfrak{R} = iX + jY + kZ.$$

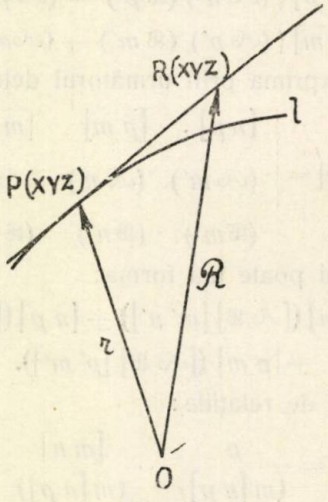


Fig. 35.

Vectorii $\{\mathfrak{R} - \tau\}$ şi $d\tau$, având aceeaşi direcţie, rezultă:

$$[\{\mathfrak{R} - \tau\}\, d\tau] = 0 \qquad (1)$$

în care τ, $d\tau$ sunt vectorii daţi.

Relaţia de mai sus, reprezintă vectorial tangenta în P la linia dată, deoarece locul geometric al vârfului vectorului de rază $\Re$ se găseşte pe acea tangentă. Din (1) rezultă:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

sau:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}.$$

Mai putem exprima tangenta în următoarele două feluri:

I. $$[\{\Re - r\}\bar{t}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{dx}{dl} & \frac{dy}{dl} & \frac{dz}{dl} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

în care

$$\bar{t} = i\frac{dx}{dl} + j\frac{dy}{dl} + k\frac{dz}{dl}.$$

II. Exprimând prin $\nabla\varphi_1$, $\nabla\varphi_2$ doi vectori normali la cele două suprafeţe care ne dau ca intersecţie linia cerută, obţinem tangenta, prin intersecţia a două planuri:

$$(\{\Re - r\}\nabla\varphi_1) = 0$$

$$(\{\Re - r\}\nabla\varphi_2) = 0$$

sau:

$$\{X-x\}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \{Y-y\}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \{Z-z\}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0$$

$$\{X-x\}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \{Y-y\}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \{Z-z\}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0.$$

Normala în P la linia l o exprimăm prin:

$$[\{\Re - r\}d\bar{t}] = 0. \text{ Vezi fig. 36} \qquad (3)$$

în care

$$d\bar{t} = d\bar{\varphi n} = id\frac{dx}{dl} + jd\frac{dy}{dl} + kd\frac{dz}{dl}.$$

Relaţia (3) ia forma:

$$\frac{X-x}{d\frac{dx}{dl}} = \frac{Y-y}{d\frac{dy}{dl}} = \frac{Z-z}{d\frac{dz}{dl}}.$$

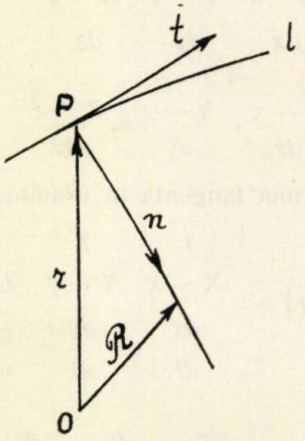


Fig. 36.

Normala mai poate lua forma:

$$[\{\mathfrak{R} - r\}\bar{n}] = 0 \qquad (4)$$

în care:

$$c_t \bar{n} = \frac{d\bar{t}}{dl} = i\frac{d^2x}{dl^2} + j\frac{d^2y}{dl^2} + k\frac{d^2z}{dl^2}$$

$$c_t = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial l^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial l^2}\right)^2}$$

astfel că:

$$\bar{n} = \frac{1}{c_t}\left\{ i\frac{\partial^2 x}{dl^2} + j\frac{\partial^2 y}{dl^2} + k\frac{\partial^2 z}{\partial l^2} \right\}.$$

Binormala în P se reprezintă prin:

$$[\{\mathfrak{R} - r\}\mathcal{A}] = 0 \qquad (5)$$

în care $\mathcal{A} = [dr\, d^2r]$ reprezintă un vector perpendicular pe planul de curbură în direcţia şi sensul vectorului binormal $\bar{b}$. (Vezi fig. 37).

Avem:

$$d\bar{r} = dl\bar{t}$$

$$d^2\bar{r} = d^2l\bar{t} + dld\bar{t} = d^2l\bar{t} + dld\varphi\bar{n} = id^2x + jd^2y + kd^2z.$$

Vectorul $d^2\bar{r}$ se găseşte în planul format de vectorii unitari $\bar{t}$, $\bar{n}$.
Din (5) rezultă:

$$\frac{X-x}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{Y-y}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{Z-z}{dxd^2y - dyd^2x}$$

ţinând seama de:

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}.$$

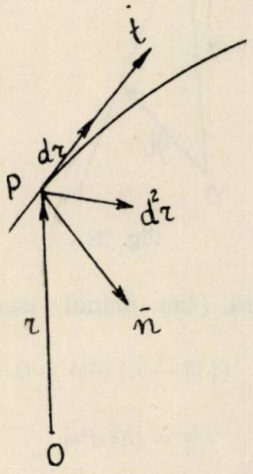


Fig. 37.

Binormala mai poate lua forma următoare:

$$[\{\mathfrak{R} - r\}\bar{b}] = 0 \qquad (6)$$

în care:

$$\bar{b} = [\bar{t}\,\bar{n}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{dy}{dl} & \frac{dz}{dl} \\ \frac{1}{c_t}\frac{\partial^2 x}{dl^2} & \frac{1}{c_t}\frac{\partial^2 y}{dl^2} & \frac{1}{c_t}\frac{\partial^2 z}{\partial l^2} \end{vmatrix}.$$

Planul normal în punctul P la linia dată se exprimă vectorial prin:

$$(\{\mathfrak{R} - r\}\, dr) = 0 \qquad (7)$$

sau:

$$\{X - x\}\frac{dx}{dl} + \{Y - y\}\frac{dy}{dl} + \{Z - z\}\frac{dz}{dl} = 0.$$

(Vezi fig. 38).

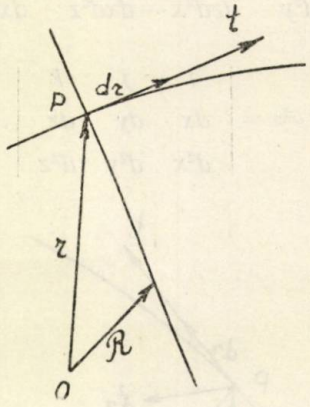


Fig. 38.

Planul de curbură (sau planul osculator) în punctul P ia forma:

$$(\{\mathfrak{R} - r\}\, \mathcal{A}) = 0 \qquad (8)$$

în care:

$$\mathcal{A} = [dr\ d^2r]$$

obţinem:

$$\{X - x\}A_x + \{Y - y\}A_y + \{Z - z\}A_z = 0.$$

Planul de curbură se mai poate exprima în felul următor:

$$(\{\mathfrak{R} - r\}\, \bar{b}) = 0.$$

Planul tangenţial se exprimă în următoarele două feluri:

$$(\{\mathfrak{R} - r\}\, d\bar{t}) = 0 \quad ; \quad (\{\mathfrak{R} - r\}\, \bar{n}) = 0.$$

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Politechnica din Timişoara.

CERCETĂRI IN LEGĂTURĂ CU INDICATORII

Intervale de numere în legătură cu indicatorii

In G. M., XLV, pag. 20—22 am publicat articolul *„Extinderi în legătură cu indicatorii“*, însă o serie de relaţiuni stabilite acolo, nu mai sunt valabile, în urma observaţiunilor făcute de către D-l P. SERGESCU, în *„Nota matematică“* No. 9 din G. M., XLVI, pag. 75.

Imi propun a preciza deci relaţiunile.

Fie $I_{x \to y}(n)$, $S_{x \to y}(n)$ *şi* $P_{x \to y}(n)$, *numărul numerilor prime cu n din intervalul de numere naturale cuprins între x şi y, unde* $x < y$, *apoi suma şi produsul acelor numere,* atunci se poate lesne arăta că avem:

$$1) \quad \begin{cases} I_{x \to y}(n) = I_y(n) - I_x(n) \\ S_{x \to y}(n) = S_y(n) - S_x(n) \\ P_{x \to y}(n) = P_y(n) : P_x(n) \end{cases}$$

unde $I_i(n)$, $S_i(n)$ şi $P_i(n)$ înseamnă numărul numerelor prime cu n din şirul numerelor naturale până la i, suma şi produsul lor.

Dacă notăm:

$$I_n(n) = \varphi(n) \; ; \; S_n(n) = \sigma(n) \text{ şi } P_n(n) = \pi(n)$$

atunci se pot lesne stabili şi relaţiile:

$$2) \quad \begin{cases} I_{x \to n}(n) = \varphi(n) - I_x(n) \\ S_{x \to n}(n) = \sigma(n) - S_x(n) \\ P_{x \to n}(n) = \pi(n) : P_x(n) \end{cases}$$

şi

$$3) \quad \begin{cases} I_{n \to y}(n) = I_y(n) - \varphi(n) \\ S_{n \to y}(n) = S_y(n) - \sigma(n) \\ P_{n \to y}(n) = P_y(n) - \pi(n). \end{cases}$$

Relaţiuni cu indicatori

Utilizând formula 1) din articolul *„Extinderi asupra indicatorilor“* publicat în G. M., XLI pag. 278, avem:

$$I_{x+y}(n) = (x+y) - \Sigma E\left(\frac{x+y}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{x+y}{a.b}\right) - \ldots$$

unde $n = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} \ldots$, iar E este simbolul lui LEGENDRE.

Dar observăm că în general avem:

$$E\left(\frac{x+y}{z}\right) = E\left(\frac{x}{z}\right) + E\left(\frac{y}{z}\right) + E\left(\frac{r_x + r_y}{z}\right)$$

unde r_x, r_y reprezintă restul diviziunei lui x şi y prin z. Cum ambele resturi sunt mai mici ca z, înseamnă că

$$E\left(\frac{r_x + r_y}{z}\right) = 0 \text{ sau } 1.$$

Prin urmare:

$$I_{x+y}(n) = x - \Sigma E\left(\frac{x}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{x}{ab}\right) - \ldots.$$

$$+ y - \Sigma E\left(\frac{y}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{y}{ab}\right) - \ldots.$$

$$- \Sigma \varepsilon_1 + \Sigma \varepsilon_2 - \ldots.$$

unde ε_1 reprezintă diferitele valori ale expresiei $E\left(\frac{r_x + r_y}{z}\right)$, când z ia valorile a, ab, abc,....

Dar, dacă m este numărul factorilor lui n, atunci avem:

$$\Sigma \varepsilon_1 = C_m^1 \quad ; \quad \Sigma \varepsilon_2 = C_m^2; \ldots.$$

Şi în acest caz, cum avem:

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \ldots - (-1)^m \cdot C_m^m = 1$$

urmează că:

$$4) \qquad I_{x+y}(n) = I_x(n) + I_y(n) - i$$

unde $i = 0$ sau 1, după cum n este neprim sau prim cu x şi y.

Deasemenea, cum avem:

$$I_{x.y}(n) = x.y - \Sigma E\left(\frac{x.y}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{x.y}{ab}\right) - \ldots$$

Apoi cum:

$$y = z.E\left(\frac{y}{z}\right) + r,$$

atunci:

$$E\left(\frac{x.y}{z}\right) = x.E\left(\frac{y}{z}\right) + E\left(\frac{r.x}{z}\right)$$

unde avem:

$$0 \leqslant E\left(\frac{r.x}{z}\right) < x.$$

Urmează dar că putem scrie:

5) $$I_{x.y}(n) = x \,.\, I_y(n) - i_x = y \,.\, I_x(n) - i_y$$

unde, prin considerațiuni analoage celor de mai sus, se deduce că:

$$0 \leqslant i_x < x \quad \text{și} \quad 0 \leqslant i_y < y.$$

Dar relația 5) se poate deduce din 4) și pe o altă cale și în adevăr, vom scrie succesiv relațiile:

$$I_{x.y}(n) = I_x(n) + I_{x.(y-1)}(n) - i'$$

$$I_{x.(y-1)}(n) = I_x(n) + I_{x.(y-2)}(n) - i''$$

. . . . . .

$$I_{x.(y-k+1)}(n) = I_x(n) + I_{x.(y-k)}(n) - i^{(k)}.$$

Dacă adunăm aceste relații obținem:

6) $$I_{x.y}(n) = k \,.\, I_x(n) + I_{x.(y-k)}(n) - \Sigma\, i\,.$$

Făcând în această relație $y = k$, dăm peste relațiile 5), știind că $iy = \Sigma\, i$.

Dacă în relațiile 5) facem $y = n$, atunci:

7) $$I_{x.n}(n) = x \,.\, \varphi(n)$$

Observații.

1) Dacă în 4) admitem că x și y au aceiași factori primi ca n, atunci se poate lesne deduce că:

8) $$\begin{cases} I_{x+y}(x) = \varphi(x) + I_y(x) \\ I_{x+y}(y) = \varphi(y) + I_x(y) \end{cases}$$

2) Dacă în 5) admitem aceleași condițiuni, atunci avem:

9) $$\begin{cases} I_{x.y}(x) = x \,.\, I_y(x) = y \,.\, \varphi(x) \\ I_{x.y}(y) = y \,.\, I_x(y) = x \,.\, \varphi(y). \end{cases}$$

Relațiuni cu sume

Utilizând formula 2) din articolul *„Extinderi asupra indicatorilor"* din G. M., XLI pag. 278, analog cazului indicatorilor, avem:

$$S_{x+y}(n) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) - \Sigma \frac{a}{2} E\left(\frac{x+y}{a}\right)\left[1 + E\left(\frac{x+y}{a}\right)\right]$$

$$+ \Sigma \frac{ab}{2} E\left(\frac{x+y}{ab}\right)\left[1 + E\left(\frac{x+y}{ab}\right)\right]$$

. . . . . .

Dar observăm că:

$$(x+y)(x+y+1) = x(x+1) + y(y+1) + 2xy$$

și:

$$E\left(\frac{x+y}{z}\right)\cdot\left[1+E\left(\frac{x+y}{z}\right)\right] = E\left(\frac{x}{z}\right)\cdot\left[1+E\left(\frac{x}{z}\right)\right]$$
$$+ E\left(\frac{y}{z}\right)\cdot\left[1+E\left(\frac{y}{z}\right)\right]$$
$$+ E\left(\frac{r_x+r_y}{z}\right)\cdot\left[1+E\left(\frac{r_x+r_y}{z}\right)\right]$$
$$+ \frac{2}{z}\cdot E\left(\frac{x.y}{z}\right) + R_z$$

unde:

$$R_z = E\left(\frac{x}{z}\right)\cdot\left[E\left(\frac{r_x+r_y}{z}\right) - \frac{r_y}{z}\right]$$
$$+ E\left(\frac{y}{z}\right)\cdot\left[E\left(\frac{r_x+r_y}{z}\right) - \frac{r_x}{z}\right] - \frac{1}{z}\cdot E\left(\frac{r_x\,.\,r_y}{z}\right).$$

Dar cum avem:

$$E\left(\frac{r_x+r_y}{z}\right) = 0 \text{ sau } 1$$

$$E\left(\frac{r_x\,.\,r_y}{z}\right) < z \quad \text{și} \quad \frac{r_x}{z} < 1\ ;\ \frac{r_y}{z} < 1$$

urmează că:

$$-\left[E\left(\frac{x}{z}\right)+E\left(\frac{y}{z}\right)\right] < R_z < +\left[E\left(\frac{x}{z}\right)+E\left(\frac{y}{z}\right)\right].$$

In consecință avem:

10) $S_{x+y}(n) = S_x(n) + S_y(n) + 2I_{xy}(n) + \Sigma R_z - s$

unde $s = 0$ sau 2, iar:

$$\Sigma R_z = R_a\,.\,C_m^1 - R_{ab}\,C_m^2 + \ldots - (-1)^m \cdot R_{abc\ldots}\,C_m^m.$$

Dacă scrim relaţia 8) sub formele:

$$S_{x.y}\ (n) = S_x\,(n) + S_{x(y-1)}(n) + 2I_{xy}\ (n) + A_1$$
$$S_{x.(y-1)}\,(n) = S_x\,(n) + S_{x(y-2)}(n) + 2I_{x(y-1)}(n) + A_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{x(y-k+1)}\,(n) = S_x(n) + S_{x(y-k)}(n) + 2I_{x(y-k+1)}(n) + A_k$$

Apoi le adunăm, atunci avem:

$$S_{x.y}\,(n) = k\,.\,S_x\,(n) + S_{x(y-k)}(n) + 2\sum_{0}^{k-1} I_{x.(y-i)}\,(n) + \Sigma A$$

Deasemenea ţinând seamă că avem:

$$I_{x.y}\ (n) = y\,.\,I_x\,(n) - i_y$$
$$I_{x.(y-1)}(n) = (y-1)\,.\,I_x\,(n) - i_{y-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_{x\,.\,(y-k+1)}\,(n) = (y-k+1)\,.\,I_x\,.(n) - i_{y-k+1}$$

pe care adunându-le, obţinem:

$$\sum_{0}^{k-1} I_{x.(y-i)}\,(n) = k\,.\left(y - \frac{k+1}{2}\right).\,I_x\,(n) - \Sigma i.$$

Urmează că pentru $y = k$, avem:

11) $$S_{x.y}\,(n) = y\,.\,S_x\,(n) + y\,.\,(y-1)\,.\,I_x\,(n) + B_y$$
$$= x\,.\,S_y\,(n) + x\,.\,(x-1)\,.\,I_y\,(n) + B_x\,.$$

A doua relaţie fiind scrisă prin consideraţiuni de simetrie, iar:

$$B = \Sigma A - 2\Sigma i.$$

Dacă facem acum $y = n$, avem:

12) $$S_{x.n}\,(n) = x\,.\,\sigma\,(n) + x\,.\,(x-1)\,.\,\varphi(n).$$

Observaţii:

1) Dacă în 8) admitem că x şi y au aceiaşi factori primi ca n, atunci se deduce lesne că:

13)
$$\begin{cases} S_{x+y}\,(x) = \sigma\,(x) + S_y\,(x) + 2y\varphi\,(x) \\ \qquad\quad = (\frac{1}{2}\,x + 2y)\,.\,\varphi\,(x) + S_y\,(x) \\ S_{x+y}\,(y) = \sigma\,(y) + S_x\,(y) + 2x\,.\,\varphi\,(y) \\ \qquad\quad = (\frac{1}{2}\,y + 2x)\,.\,\varphi\,(x) + S_x\,(y) \end{cases}$$

2) Deasemenea, dacă în 11) admitem aceleaşi condiţiuni ca mai sus, avem:

$$14)\quad \begin{cases} S_{x.y}(x) = y.\sigma(x) + y.(y-1).\varphi(x) \\ \qquad\quad = y.(\frac{1}{2}x + y - 1).\varphi(x) \\ S_{x.y}(y) = x.\sigma(y) + x.(x-1).\varphi(y) \\ \qquad\quad x.(\frac{1}{2}.y + x - 1).\varphi(y). \end{cases}$$

(Va urma). COMANDOR I. LINTEŞ.

CÂTEVA PROPRIETĂŢI MECANICE ŞI GEOMETRICE ALE ELIPSELOR LUI KEPLER

Din studiul traectoriilor, mecanice ajungem adesea la descoperirea unor interesante proprietăţi geometrice ale curbelor.

Redau în cele de mai jos un asemenea caz în speranţa de a spori astfel interesul tinerilor cititori ai *Gazetei Matematice* pentru Mecanică.

Problema de Mecanică ce mi-am propus-o a fost următoarea:

„*Un punct material* M, *de masă* m, *este atras de centrul fix* O, *cu forţa newtoniană* $F = \frac{km}{\overline{OM}^2}$, *La momentul iniţial punctul material se află în* A ($OA = r_0$) *şi are iuţeala iniţială dată* $v_0 \left(v_0^2 < \frac{2k}{r_0} \right)$.

Să se determine grafic direcţiunea acestei iuţeli, prin unghiul $\sphericalangle (OA, v_0) = \alpha$, *astfel ca punctul* M *în mişcarea sa să treacă printr'un punct dat* P".

Această problemă m'a condus la descoperirea următoarelor proprietăţi geometrice ale familiei de elipse, ce se obţin prin variaţiunea unghiului α, în planul determinat de punctul O, A, P:

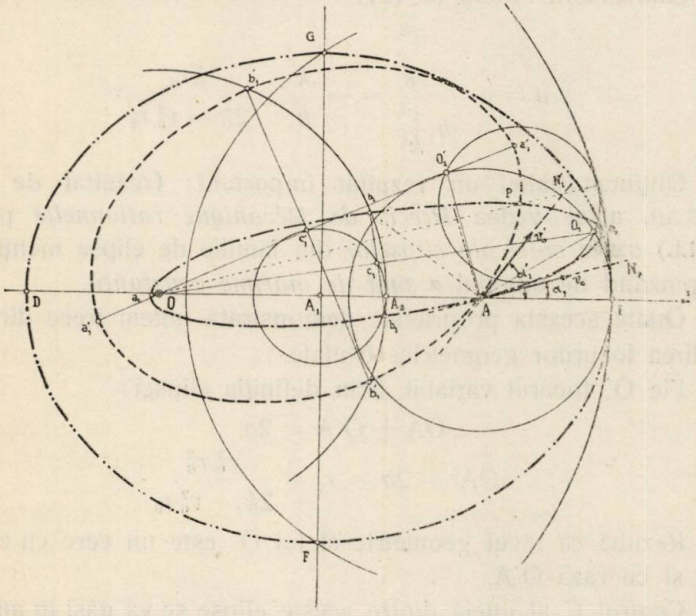
a) *locul geometric al focarului variabil este un cerc cu centru în* A.

b) *locul geometric al centrelor familiei de elipse este un cerc cu centrul în mijlocul distanţei* OA.

c) *locul geometric al extremităţilor axelor mici ale elipselor este un cerc cu centru în* O.

d) *înfăşurătoarea familiei de elipse este o elipsă cu focarele* O *şi* A.

Rezultatul obţinut, prin descoperirea acestor locuri geometrice, a fost găsirea unei construcţii simple care să determine unghiul α căutat; în plus, aceste locuri geometrice mi-au permis să găsesc şi *condiţiunea pe care trebue s'o îndeplinească punctul* P *pentru ca problema să fie posibilă.*



Pentru demonstrarea proprietăţilor enunţate mai sus, reamintesc câteva date cunoscute asupra elipselor Kepleriene.

Ecuaţiunea acestor elipse, în coordonate polare este:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (1)$$

raportată la focarul O ca pol şi la axa mare a elipsei ca axă polară.

In această ecuaţiune:

$$p = \frac{c^2}{k} \quad ; \quad e = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{k^2}}$$

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha \quad ; \quad h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0}. \qquad (2)$$

Conform celor cunoscute din geometria analitică, semiaxele a şi b ale elipsei date de (1) sunt legate de parametrii p şi e prin relaţiunile:

$$p = \frac{b^2}{a} \quad ; \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Rezultă:

$$a = \frac{p}{1 - e^2}.$$

Sau, ţinând seama de (2):

$$a = -\frac{\frac{c^2}{k}}{h\frac{c^2}{k^2}} = -\frac{k}{h} = \frac{kr_0}{2k - v_0^2 r_0}.$$

Obţinem astfel un rezultat important: (rezultat de altfel cunoscut, a se vedea *Précis de Mécanique rationnelle* par P. APPELL) *axele mari ale elipselor* din familie de elipse menţionată nedepinzând de unghiul α *sunt de mărime constantă.*

Odată aceasta proprietate demonstrată putem trece direct la stabilirea locurilor geometrice căutate.

Fie O′ focarul variabil. Prin definiţia elipsei:

$$OA + O'A = 2a$$

$$OA' = 2a - r_0 = \frac{v_0^2 r_0^2}{2k - v_0^2 r_0}.$$

Rezultă că locul geometric al lui O′ este un cerc cu centrul în A şi cu raza O′A.

Centrul C al uneia dintre aceste elipse se va găsi în mijlocul dreptei OO′.

Punctul O fiind fix, se obţine prin construcţia de mai sus o figură omotetică cercului focarelor, având raportul de omoteţie $\frac{1}{2}$.

Rezultă că locul geometric al centrelor elipselor date este un cerc cu raza:

$$\frac{O'A}{2} = \frac{v_0^2 r_0^2}{2(2k - v_0^2 r_0)}$$

şi cu centrul în A_1 pe direcţia OA:

$$OA_1 = \frac{OA}{2} = \frac{r_0}{2}.$$

Din observaţiunea simplă, că într'o elipsă, dreapta care uneşte extremitatea axei mici cu focarul este egală cu semiaxa mare, se obţine imediat locul geometric al extremităţilor axelor mici.

In adevăr, focarul fiind fix iar semiaxa mare constantă, locul geometric va fi un cerc cu centrul în O şi raza:

$$a = \frac{kr_0}{2k - v_0^2 r_0}.$$

Pentru determinarea înfăşurătoarei, să considerăm un punct I al ei, obţinut prin intersecţia a două elipse infinit vecine.

Aceste elipse au un focar comun O şi două focare O' şi O'' infinit apropiate situate pe cercul focarelor.

Dar:

$$OI + O'I = OI + O''I = 2a.$$

Deci:

$$O'I = O''I.$$

Punctele O' şi O'' fiind infinit apropiate şi situate la aceeaşi depărtare de I, se vor găsi la limită pe dreapta IA normală la cercul focarelor.

Rezultă

$$2a_1 = OI + IA = OI + IO' + O'A = 2a + (2a - r_0)$$

$$2a_1 = r_0 \frac{2k + v_0^2 r_0}{2k - v_0^2 r_0}.$$

Suma distanţelor punctului I al înfăşurătoarei la punctele fixe O şi A fiind constantă, înfăşurătoarea va fi o elipsă cu focarele O şi A.

Odată proprietăţile geometrice demonstrate să trecem la rezolvarea problemei de mecanică propusă, servindu-ne de rezultatele obţinute.

Punctul dat P aparţinând familiei de elipse avem:

$$OP + O_1P = 2a$$

O_1 fiind focarul necunoscut al elipsei ce trece prin P.

Rezultă:

$$O_1P = 2a - OP = \text{distanţa cunoscută.}$$

Descriind prin urmare un cerc din P cu raza $(2a - OP)$ vom obţine focarele O_1 şi O_1' din intersecţia acestui cerc cu cercul focarelor.

Direcţiunea iuţelii în A va fi după tangentele la elipsele respectiv de focare O şi O_1; O şi O_1'.

Procedăm prin construcţia clasică a bisectoarelor unghiurilor OAO_1 şi OAO_1' şi apoi prin ridicarea normalelor AN şi AN' pe aceste bisectoare.

Direcţiunile căutate ale vectorului iuţeală sunt dreptele AN şi AN'; unghiurile α_1 şi α_2 sunt astfel determinate.

Celelalte elemente geometrice ale celor două elipse, care corespund problemei, se găsesc acum uşor ţinând seama de locurile geometrice ale centrului şi extremităţilor axei mici (a se vedea figura).

Pentru ca problema să admită soluţiuni reale va fi necesar ca *punctul* P *să se găsească în interiorul elipsei înfăşurătoare.* Când această condiţie este îndeplinită se obţin două soluţiuni pentru problemă; în cazul limită, când P se află situat chiar pe înfăşurătoare, cele două soluţiuni se contopesc într'una singură.

Prin particularizare, *deplasând centrul fix de atracţie* O *spre infinit,* putem transforma problema propusă într'o *problemă de balistică.*

Propun corespondenţilor *Gazetei Matematice* regăsirea pe această cale a proprietăţilor geometrice şi mecanice ale parabolelor de tragere, determinarea parabolei de siguranţă etc.

INGINER ALEXANDRU STOENESCU.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI „VASILE CONTA"

In conformitate cu art. 4 din regulmentul premiului „Vasile Conta", avem onoare a vă aduce la conoştinţă Dvs. următoarele:

Potrivit art. 2 din acelaşi regulament, premiul „Vasile Conta" se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicilor, adusă la cunoştinţa Societăţii în cursul fiecărui an până la 1 Iulie.

Intrucât până la data de mai sus nu s'a prezentat nici o lucrare, premiul în sumă de lei 4.000 nu se poate acorda şi se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Suma de mai sus urmează a se adăoga la premiul anilor viitori.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „VASILE CONTA"

C-DOR I. LINTEŞ. PROF. O. ONICESCU,
PROF. P. SERGESCU.

20 August 1941.

Acest raport a fost citit şi aprobat de Adunarea Generală din 28 August 1941.

NOTE MATEMATICE

6. *Numere pseudo-prime.* Se cunoaşte teorema lui FERMAT: Dacă p este un număr prim, coprim cu a, avem:

$$a^{p-1} - 1 = \mathcal{M}p.$$

Această teoremă nu admite reciprocă, căci relaţia precedentă se poate verifica şi pentru p compus. ED. LUCAS, în *Théorie des nombres*, dă exemplul:

$$2^{37.73-1} - 1 = \mathcal{M}(37.73).$$

In *Boletino Matematico.* Anul XIV, Nr. 7 Iunie 1941, D-l S. SISPANOV, din Anuncion, Paraguay, caută numerele compuse m aşa că a fiind orice număr coprim cu m compus, să avem:

$$a^{m-1} - 1 = \mathcal{M}m.$$

Numerelor m care îndeplinesc această condiţie le zice numere *pseudo-prime.*

Se arată că m nu poate fi pereche, şi că trebue să aibă cel puţin trei factori primi la puterea întâia. Se dă două mijloace de a găsi toate numerele *pseudo-prime.* Se găsesc, până la 10000, următoarele *pseudo-prime:*

561 = 3.11.17, 1 105 = 5.13.17, 1 729 = 7.13.19
2 465 = 5.17.19, 2 821 = 7.13.31, 6 601 = 7.13.41.
8 911 = 7.19.67,

Cel mai mic număr *pseudo-prim* de patru factori este:

63 973 = 7.13.19.37.

I. I.

7. *Criteriul lui* PRINGSHEIM. *Asupra notei Nr. 58 (Vol. XLVI).* Acest criteriu se enunţă în felul următor: *dacă într'o serie convergentă cu termenii pozitivi, începând dela un rang destul de îndepărtat, termenii sunt monoton descrescători, atunci avem*

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} nu_n = 0\ ^{1}).$$

Pentru a se înţelege mai bine, se construiesc exemple când acest criteriu nu se aplică, deşi seria este convergentă. Astfel să presupunem că am avea o serie convengentă, cu termeni pozitivi, Σu_n şi că în această serie am înlocui termenii al căror rang este o putere a lui 2 cu inversul acestei puteri. Noua serie va fi

$$(2) \quad u_1 + \frac{1}{2} + u_3 + \frac{1}{4} + u_5 + \ldots + u_{2^n-1} + \frac{1}{2^n} + u_{2^n+1} + \ldots$$

Seria a rămas evident convergentă. Totuşi: $2^n u_{2^n} = 1$, ceea ce înseamnă că nu putem afirma egalitatea (1) pentru ori ce serie convergentă. Cauza este că în seria (2) termenii nu mai sunt monoton descrescători [2]).

La rezolvarea problemei 2552 nu am aplicat greşit acest criteriu, cum se lasă să se înţeleagă în nota Nr. 58, ci am scăpat din vedere să adaog că termenii seriei sunt monoton descrescători, cum dealtfel se putea vedea imediat. Lăsând deoparte modul întrebuinţat pentru a pune în evidenţă o scăpare din vedere, mulţumesc autorului notei că a făcut corectura necesară.

GH. TH. GHEORGHIU.

Nota Redacţii. Această Notă a fost trimisă D-lui T. P., autorul Notei 58 apărută în luna August 1941, pentru ca eventual să-şi facă observaţiunile sale la cele afirmate de D-l GH. TH. GHEORGHIU, în conformitate cu normele enunţate la pag. 459 a anului precedent. D-l T. P. nu ne-a trimis un răspuns redactat pentru a fi publicat aci întocmai; D-sa a făcut oarecare observaţii şi a lăsat la aprecierea Redacţiei dacă să se publice sau nu prezenta Notă. Noi negăsind că depăşeşte obiectivitatea ştiinţifică şi că chiar autorul ei mulţumeşte D-lui T. P. pentru rectificarea Notei 58, i-am dat curs.

---

1) A se vedea de ex.: GH. TH. GHEORGHIU, *Probleme de Analiză Matematică*, Partea I, pag. 43. Acest criteriu este greşit enunţat în nota citată, evident greşală făcută dintr'o scăpare din vedere.

2) Un alt exemplu se găseşte în nota citată.

Cu această ocaziune facem un apel la matematicianii români să găsească un calificativ românesc pentru seriile de care se vorbeşte aici, care să nu dea loc la confuziuni şi interpretări necorespunzătoare naturii chestiunii.

I. IONESCU.

8. *Asupra unei probleme din* J. HAAG, *Exercices du cours de mathématiques spéciales*, T. I *(Algèbre et Analyse)*. La pag. 15, problema 7 se cere să se găsească suma unei serii Σu_n pentru care

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}, \qquad (a,\ b = \text{const.}).$$

Autorul, notând cu S_n suma primilor n termeni, ajunge la relaţia

$$S_n = \frac{(n+b)\,u_{n+1} - bu_1}{a+1-b}$$

şi apoi spune:

„*si la série est convergente,* $(n+b)\,u_{n+1} = (n+1)\,u_{n+1}\,\frac{n+b}{n+1}$ *doit tendre vers zéro, en vertu de la règle* $n^a\,u_n$“ ... şi în josul paginei: „*Si* $(n+b)\,u_{n+1}$ *et, par suite,* nu_n *ne tendaient pas vers zéro, on aurait, à partir d'un certain rang,* $nu_n > k$, *k désignant un certain nombre fixe non nul. D'où, etc.*“.

Afirmaţiile autorului nu sunt corecte după cum se vede după exemplul considerat la nota precedentă. Totuşi, în cazul convergenţei $(b - a > 1)$ suma este chiar cea dată de autor, adică $\frac{bu_1}{b-a-1}$, deoarece criteriul lui PRINGSHEIM se aplică, termenii seriei fiind monoton descrescători.

GH. TH. GHEORGHIU.

9. *Două soluţii ale unei ecuaţii diofantiene.* Pentru ecuaţia

$$A_1, A_2, \ldots, A_{17} \overset{n}{=} B_1, B_2, \ldots, B_{14} \text{ unde } n = 1, 2, \ldots 9$$

am găsit următoarele două soluţii.

1°. Pentru $n = 1, 2, 3, \ldots 9$; avem, ori care ar fi t:

$(t-54), (t-53), (t-39), (t-30), (t-29), (t-8), (t-7),$

$(t+7), (t+29), (t+30), (t+39), (t+53), (t+54) \overset{n}{=}$

$(t-56), (t-47), (t-46), (t-27), (t-26), (t-15), (t-3),$

$(t+3), (t+15), (t+26), (t+27), (t+46), (t+47), (t+56).$

Când $t > 55$ avem numai soluţii pozitive.

2°. Avem deasemenea pentru t oarecare

$(t-54), (t-53), (t-44), (t-36), (t-27), (t-10), (t-7),$

$(t+7), (t+10), (t+27), (t+36), (t+44), (t+53), (t+54) \overset{n}{=}$

$(t-55), (t-51), (t-46), (t-34), (t-28), (t-12), (t-3),$

$(t+3), (t+12), (t+28), (t+34), (t+46), (t+51), (t+55)$

pentru $n = 1, 2, 3, \ldots 9$.

$t > 54$ dă soluţiuni în numere pozitive.

A. MOESSNER (Nürnberg).

10. *Asupra cardioidei.* Cu ocazia rezolvării problemei Nr. 5285 [1]), s'a dat la Seminarul de Mecanică al Universităţii din Cluj-Timişoara următoarea construcţie simplă a centrului de curbură C al cardioidei, bazată pe un procedeu vectorial:

Un punct M al cardioidei se obţine prelungind raza vectoare $OP = a \cdot \cos\theta$ a unui cerc (C) de diametru a, (O fiind situat pe cerc), cu o lungime constantă şi egală cu a. Introducând versorii $\vec{r}$ şi $\vec{p}$ respectiv după raza vectoare OM şi după perpendiculara la ea, putem scrie

$$\vec{\rho} = a(1+\cos\theta) \cdot \vec{r} \qquad \vec{\rho'} = \frac{d\vec{\rho}}{d\theta} = -a \cdot \vec{r} \cdot \sin\theta + \rho \vec{p}$$

unde ρ e lungimea $\overline{OM}$. Mai avem

$$\rho'^2 = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot$$

1) A se vedea soluţiile dela pag. 103 şi 157, *Gazeta Matematică*, Vol. XLVI.

Cum normala în M e perpendiculară pe vectorul $\vec{\rho'}$, ea va fi definită de relația $(\vec{n} \cdot \vec{\rho'}) = 0$, astfel că versorul $\vec{n}$ al ei va fi

$$\vec{n} = -\frac{1}{2a\cos\frac{\theta}{2}}[\rho\vec{r} + a\vec{p}\sin\theta].$$

Fie A punctul unde dreapta definită de versorul $\vec{Op}$ taie cercul (C). Cum $\overline{OA} = a \cdot \sin\theta$, rezultă că normala în M trece prin A, rezultat de altfel cunoscut, cardioida fiind o concoidă a cercului.

Să determinăm acum centrul de curbură C al cardioidei. Pentru aceasta, să utilizăm relațiile cunoscute

$$\vec{OC} = \vec{\rho} + \vec{n}R = \vec{\rho} + R\left[\vec{b} \wedge \frac{\vec{d\rho}}{ds}\right]$$

$$R = \frac{\left(\frac{\vec{d\rho}}{d\theta}\right)^3}{\left|\left[\frac{\vec{d\rho}}{d\theta} \wedge \frac{\vec{d^2\rho}}{d\theta^2}\right]\right|}$$

$\vec{b}$ fiind versorul binormalei, iar s arcul curbei. Prima relație se poate pune sub forma

$$(1) \qquad \vec{OC} = \vec{\rho} + \frac{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}{\left|\left[\frac{\vec{d\rho}}{d\theta} \wedge \frac{\vec{d^2\rho}}{d\theta^2}\right]\right|}\left[\vec{b} \wedge \frac{\vec{d\rho}}{d\theta}\right]$$

căci $\left|\frac{\vec{d\rho}}{ds}\right| = 1.$

Acestea fiind precizate, printr'o nouă derivare se obține

$$\frac{\vec{d^2\rho}}{d\theta^2} = (a - 2\rho)\vec{r} - 2a\vec{p}\sin\theta$$

astfel că

$$|[\vec{\rho'} \wedge \vec{\rho''}]| = |-\rho(a - 2\rho) + 2a^2\sin^2\theta| = 3a\rho = 6a^2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Formula (1) devine

$$\vec{OC} = \vec{\rho} + \frac{2}{3}[\vec{b} \wedge (\rho \vec{p} - a \vec{r} \sin\theta)]$$

sau, utilizând relaţiile $[\vec{b} \wedge \vec{p}] = -\vec{r}$ şi $[\vec{b} \wedge \vec{r}] = \vec{p}$,

$$(2) \qquad \vec{OC} = \frac{\vec{\rho}}{3} - \frac{2a}{3}\vec{p} \sin\theta.$$

Centrul de curbură C se găseşte deci după această formulă la intersecţia dreptelor BC, perpendiculară pe OM astfel ca $\overline{OB} = \frac{1}{3} \cdot \overline{OM}$, şi DC, paralelă cu OM dusă prin D astfel ca $\overline{OD} = \frac{2}{3} \cdot \overline{OA}$. E suficent prin urmare să construim normala MA şi să ridicăm în B o perpendiculară pe OM până ce întâlneşte această normală în centrul de curbură C căutat.

RADU BĂDESCU.

11. *Asupra problemei Nr. 5097.* Limita propusă şi dată în soluţia publicată la pag. 209, Vol. XLVI se mai poate obţine şi astfel:

După formula lui WALLIS

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \cdots \left(\frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1}\right) \cdot \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}\right) \cdots,$$

avem

$$\frac{1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots (2n-1)^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 \ldots (2n)^2} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6}\right) \cdots$$

$$\cdots \frac{2n-1}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n} \times \frac{1}{2n} = \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2n}.$$

Problema s'a redus la

$$\frac{1}{\pi} \lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}.$$

Considerăm seria de termen general $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Se ştie că avem

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

In consecinţă

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Valoarea limitei căutate este într'adevăr $\frac{1}{\pi e}$.

VIRGIL GHIŢESCU.

12. *Asupra problemei 4177.* Dacă A', B', C', D' şi A", B", C", D" sunt centrele patratelor construite interior şi exterior pe laturile unui patrulater cu diagonalele AC şi BD egale, problema 4177 cerea să se demonstreze că suprafeţele A'B'A"B", B'C'B"C", C'D'C"D", D'A'D"A" sunt echivalente. Anterior soluţiei dată la pag. 40, Vol. XLV, *Gazeta Matematică*, D-l G-l GH. BUICLIU a demonstrat în problema 4563 la pag. 156, Vol. XLII că $A'A'' \perp B'B''$ şi că

$$A'B'' = B'A'' = \frac{AC}{\sqrt{2}}.$$

Plecând de la aceste proprietăţi şi ţinând seamă că suprafaţa patrulaterului A'B'B"A" este dată de

$$S_1 = \overline{A'B''} \times \overline{A''B'} \sin (A'B'', A''B')$$

rezultă imediat

$$S_1 = \frac{\overline{AC}^2}{2}.$$

Se găseşte la fel că

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{\overline{AC}^2}{2} = \frac{\overline{BD}^2}{2}.$$

S_i fiind suprafeţele patrulaterelor din enunţul problemei 4177.

J. SEGAL.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Ano XIV. No. 7. Iunie 1941. Buenos Aires. JOSEPH LOUIS CONDE LAGRANGE, de D. E. SMITH (tradus de J. GONZALES GALÉ). Asupra numerelor pseudo-prime de S. SISPANOV. Notă de Geometrie, de G. ŢIŢEICA, tradusă de B. I. B.

Idem. Ano XIV. No. 9. Iulie 1941. Buenos Aires. CAROL FREDERIC GAUSS, de D. E SMITH (tradus de J. GONZALES GALÉ). O problemă instructivă de înfăşurate, de B. I. BAIDAFF. Două teoreme de geometrie n-dimensională şi o formulă, de B. I. BAIDAFF. Asupra unor înfăşurătoare de cercuri şi de sfere, de G. ŢIŢEICA (tradus de B. I. BAIDAFF). La începutul celei de a doua jumătăţi a anului XIV, de B. I. BAIDAFF.

Idem. Anul XIV. Nr. 10. Iulie 1941. Buenos Aires. Indice general al notelor publicate în primele 5000 de zile ale Boletinului Matematic (1 Ianuarie 1928 — 8 Septemvrie 1941).

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Octomvrie 1941. Nr. 8. Timişoara. Asupra relaţiei dintre involuţie şi fascicole de cercuri, de N. ABRAMESCU. O clasă de conice ataşate unui triunghiu, de M. GHERMĂNESCU. † GH. BRATU, de V. ALACI.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciţii. Anul VIII. Nr. 1. Octomvrie 1941. Abonamentul (anual 10 numere) 80 lei. Anunţă un Concurs de Mecanică.

Pozitiva. Anul II. Nr. 1. Septemvrie 1941. Revistă de Matematici. Bucureşti. Lista membrilor. Clasificarea corespondenţilor. Teorema lui JOACHIMSTAHL şi problema desfăşuratelor, de D. BARBILIAN. Note. Exerciţii. Probleme.

România aeriană. Anul XV. Nr. 9. Septemvrie 1941. Ediţie de războiu. Bucureşti 1941.

Asociaţia Română de Poduri, Sarpante şi Incercarea Materialelor Şedinţele grupului român de încercări de materiale. 1940—1941. Bucureşti 1941.

P. SERGESCU. O oră de seminar matematic. (Extras din *Revista Matematică*, Anul XXI, No. 7). Timişoara 1941.

COMANDOR I. LINTEŞ. *Avionul stratosferic.* (Extras din *Revista Aeronauticei şi Marinei*). 1941.

TH. ANGHELUŢĂ. *Sur une limite pour les modules des zéros des polynomes.* (Extras din *Bulletin de la Société mathématique de France*).

TH. ANGHELUŢĂ. *Sur une équation fonctionelle qui définit les polynomes à plusieurs variables.* (Extras din *Bulletin des sciences mathématiques*). Paris 1937.

TH. ANGHELUŢĂ. *Une remarque sur une généralisation des fonctions analytiques.* (Extras din *Mathematica*). Cluj 1939.

TH. ANGHELUŢĂ. *Remarques sur des mouvements tautochrones.* (Extras din *Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara*). Timişoara 1941.

TH. ANGHELUȚĂ. *Determinarea substituțiilor ortogonale a căror modul este un determinant simetric.* (Extras din *Revista Matematică din Timișoara*). Timișoara 1941.

TH. ANGHELUȚĂ. *Memoriu de Lucrări.* Timișoara 1941.

Disquisitiones mathematicae et physicae. Tomes I. Fasc. 3—4. București 1941.

Sur la structure algébrique de la logique de M. BOCHVAR, par GR. C. MOISIL. Sur les singularités des fonctions transfinies, par G. SUDAN. Le problème de LAURICELLA pour les domaines hypersphériques, par M. NICULESCO. Un problème de lotérie par N. THÉODORESCO. Sur le problème de KOENIGS, par AL. PANTAZI. Considérations élémentaires sur la double-source, par G. M. BĂDĂRĂU. Les spectres *k* d'absorbtion du gallium, du germanium, de l'arsenic et du silicium, par H. HULUBEI-Y. CAUCHOIS. La structure des ions négatifs, par TH. V. IONESCU. Observations concernant la Note de Mr. M. GHERMĂNESCU: „Sur le mouvement tautochrone plan".

COMANDOR I. LINTEȘ. Turele aerodinamice pentru viteze foarte mari (Extras din Revista Aeronauticei și Marinei . București 1941.

Deutsche Mathematic. Lipsca 1941. Anul V. Caietul 6. Martie 1941. Asupra multiplei lateralități a planului proiectiv, de C. MELCHIOR. Desfacerea unui număr în părți, de G. KANZ. Asupra interpolării trigonometrice, de W. QUADE. Asupra suprafețelor minime de tipul LIOUVILLE, de W. ALT. Asupra reprezentării finite a lui FOURIER și foloasele ei la problema conducerii căldurii în bare și plăci de KOSCHMIEDER. Contribuție la teoria performărilor finite și asupra teoriei stabilității corpurilor elastice, de E. A. DEUKER. Dependență funcțională în probabilități, de D. MITTMANN. Cuadratura cisoidei, de JOSEPHA și J. C. HOFMANN.

N. ABRAMESCU. *Algebra superioară pentru clasa VIII, Secția științifică.* Funcții primitive. Calculul ariilor. Numere complexe. Teoria ecuațiilor. Ediția VII. Apărută în Biblioteca „Gazeta Matematică". No. III. București 1941.

CERERI

306. Sunt cărți de matematici mai vechi, care se consultă des, și la care autorii nu au dat o *Tablă a numelor.* Cu modul acesta căutările și cercetările în asemenea cărți devin foarte anevoioase și plicticoase. O asemenea carte, des consultată, care se ocupă cu Teoria numerelor este *Théorie des nombres,* Tome premier, par EDOUARD LUCAS, Paris 1891.

O extragere a numelor proprii din această carte am făcut-o eu pe vremuri. Nu se mai găsește un altul care să o facă, pentru ca comparând-o cu a mea să o putem apoi eventual tipări, dacă se găsește utilă?

I. I.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1008. *Cum putem deplasa vârfurile unui tetraedru aşa ca centrul lui de greutate să rămână fix?*

I. IONESCU.

Fie G centrul de greutate al tetraedrului ABCD. Deplasăm acest tetraedru în A'B'C'D' cu centrul de greutate G'. Avem:

$$\vec{GA} + \vec{AA'} = \vec{GG'} + \vec{G'A'},$$

şi încă trei relaţii la fel pentru celelalte vârfuri. Sumând avem:

$$\Sigma \vec{GA} + \Sigma \vec{AA'} = 4\vec{GG'} + \Sigma \vec{G'A'}.$$

Dar $\Sigma \vec{GA} = \Sigma \vec{G'A'} = 0.$

Rămâne deci:

$$\Sigma \vec{AA'} = 4\vec{GG'}.$$

Dacă centrul de greutate rămâne fix, avem $\vec{GG'} = 0$ şi deci şi $\Sigma \vec{AA'} = 0$. Deci vârfurile trebuesc deplasate astfel ca suma geometrică a deplasărilor să fie nulă, sau, în proiecţie pe orice axă, suma deplasărilor trebue să fie nulă.

Se poate ajunge la acelaşi rezultat şi pe cale analitică.

C. D. EFTIMIU
(Elev-inginer, Bucureşti).

Alte soluţii de D-nii: C. C. TEODORESCU şi C. BERDAN.

PROBLEMA 3215. *Intr'un tratat vechiu de măsuri şi greutăţi găsim:*

„Stogul, un volum de fân care are opt stânjeni peste cap şi nouă împrejur la bază, sau burta cea mare".

Câţi stânjeni cubici are un stog? Se va presupune că stogul este conic, sau jumătatea de jos cilindrică şi cea de sus conică. Studenţii şi elevii ingineri vor presupune că generatoarea este o parabolă.

I. IONESCU.

Soluţiile în primele două ipoteze s'au publicat în Anul XXX, pag. 314. Rămâne a se da aici soluţia în ultima ipoteză, a stogului parabolic. Deşi nu s'a primit nicio soluţie, de 15 ani, dela niciun student sau elev-inginer, mi se cere soluţia şi de aceea o dau aici.

Facem o secţie axială prin stog care va tăia suprafaţa lui după o parabolă, pe care o raportăm la axa ei verticală OX şi la o perpendiculară pe ea, în planul parabolei, ca axă OY, unde O este vârful stogului. Fie r raza bazei stogului, care este un cerc, şi h înălţimea. Din datele problemei reiese că avem

$$2\pi r = 9 \quad , \quad \therefore \; r = 9/2\pi = 4{,}5/\pi = 1,\ 432\ldots \tag{1}$$

Ecuaţia parabolei, raportată la axele fixate, este:

$$y^2 = 2px, \tag{2}$$

de unde deducem că:

$$r^2 = 2ph. \tag{3}$$

Fie l lungimea peste cap a stogului. Jumătatea lui l este lungimea s a arcului de parabolă dela vârf până în dreptul abscisei h. Expresiunea acestui arc o găsim în tratate de analize sau în călăuze de ingineri sau de matematici, sau o putem deduce integrând relaţia:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Avem

$$s = \frac{1}{2}p\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)} + \mathrm{L}.\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right], \tag{4}$$

$$\therefore\ s = \sqrt{\frac{1}{2}x\,(2x+p)} + \frac{1}{2}p\,.\,\mathrm{L}\left[\sqrt{(2x/p)} + \sqrt{(2x+p)p}\right]. \tag{5}$$

Dar din (2) scoatem:

$$x = y^2/2p,$$

şi înlocuind pe x în ecuaţia precedentă găsim

$$s = y\sqrt{p^2+y^2}/2p + \frac{1}{2}p\,\mathrm{L}\left[(y/p) + \sqrt{(2x+p)/p}\right]. \tag{6}$$

In cazul nostru pentru $x = h$ avem $y = r$ şi $s = \frac{1}{2}l$. Inlocuind avem:

$$l = r\sqrt{p^2+r^2}\,/\,p + p\,.\,\mathrm{L}\left[(r+\sqrt{p^2+r^2})\,/\,p\right]. \tag{7}$$

Făcând $l = 8$, $r = 1, 432$, deci $r^2 = 2,0506$, găsim ecuaţia în p:

$$8 = 1,432\sqrt{p^2+2,0506}/p + p \cdot \mathrm{L}\left[(1,432 + \sqrt{p^2+2,0506})/p\right. \quad (8)$$

Această ecuaţie transcendentă în p o rezolvăm prin încercări. Ca punct de plecare considerăm un stog conic care are evident o înălţime mai mare ca stogul parabolic, de oarece acesta are generatoarea curbă pe când cel conic o are dreaptă. La acesta avem apotema $a = \frac{1}{2}l = 4$ şi deci $h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{16 - 2,0506} = 3,73$. Parabola, care pentru $x = 3,73$ are pe $y = 1,432$, are parametrul $p = r^2/2h = 0,274$. Dacă h se micşorează, p creşte. Să luăm ca primă valoare de încercare $p = 0,28$ care dă pentru partea doua a ecuaţiei (8) 8,12. Aceasta este mai mare ca prima parte 8. Mai micşorăm pe p şi luăm $p = 0,29$. Partea a doua a ecuaţiei devine 7,88, mai mică decât 8. Media acestor valori este 8 şi deci putem lua $p = 0,285$. Cu această valoare a lui p găsim că ecuaţia este aproximativ verificată. Ecuaţia parabolei care formează generatoarea stogului este dar:

$$y^2 = 2px = 0,57x. \quad (9)$$

Pentru $y = 1,432$ găsim de aci $x = h = 3, 6$ stânjeni.

Stogul fiind un solid de rotaţie volumul lui V are expresia:

$$V = \int_0^h \pi y^2\,dx = \int_0^h 2px\,dx = \pi p h^2.$$

Pentru $p = 0,285$ şi $h = 3,6$ găsim V = 11,600 stânjeni cubici.

Stogul conic avea 8 stânjeni cubici şi cel cilindric jos, pe jumătatea înălţimii, şi conic sus avea 15 stânjeni cubici. Se vede de aci ce diferenţe mari se obţin după forma stogului şi că această măsură pentru fân nu se poate lua ca unitate fixă. De aceea, s'a ajuns ca fânul să se vânză cu greutatea.

I. I.

PROBLEMA 3300. *Pe roata de comandă a unui motor cu benzină, cu diametrul interior 1,52 m., se înfăşoară o frânghie* ABCD *cu diametrul 36 mm.,* B *şi* C *fiind punctele unde frânghia părăseşte roata,* A *şi* D *capetele frânghiei (*AB *şi* CD *sunt tangente la arc). Capătul* A *al frânghiei este fixat la un dinamometru. La capătul* D, *atârnă vertical un platou, pe care se pun greutăţi. Pentru a asigura stabilitatea sistemului, se mai leagă de punctul* C *un dinamometru, ataşat la un punct fix, pe o direcţie care corespunde aproximativ cu* CD.

Greutatea capului de frânghie CD, *împreună cu platoul, este 6,300 kg., iar tensiunea iniţială a frânghiei, datorită greutăţii ei şi citită la dinamometrul* A, *a fost 12,360 kg. După ce s'a pornit motorul, pentru a avea echilibru, s'a pus în platou 435 kg., iar dinamometrul* A *a arătat, în timpul experienţei, în mediu 80 kg., iar cel din* C *52 kg. La începutul experienţei, contorul de viteză arăta 10.782, iar la sfârşit, 50.736 învârtituri complecte. Experienţa durând 5 ore şi 25 minute, se întreabă cât a consumat motorul pe cal-vapor şi oră, ştiind că în timpul experienţei s'au consumat 126 kg., benzină.*

OCTAV ORĂNESCU.

Soluţie dată de D-l OCTAVIAN S. IANCULESCU.

Facem notaţiile:

D diametrul roţii în m. = 1,520
d „ frânghiei în m. = 0,036
p greutatea frânghiei şi a platoului în kg = 6,300
e tensiunea iniţială a frânghiei în kg = 12,360
P greutatea pusă în platou „ „ = 435,000
E tensiunea în A în timpul experienţei în kg = 80,000
F „ „ C „ „ „ „ „ = 52,000
V_1 citirea iniţială la contorul vitezei = 10,782
V_2 „ finală „ „ „ = 50,736
T timpul cât a durat experienţa în ore = 325/60
M consumaţia în timpul experienţei în kg = 126

Dacă S este efortul pe frânghie în kg., avem:

$$S = p + P + F + e - E.$$

Puterea efectivă a motorului va fi (în cai vapori):

$$N = \frac{\Pi (D + d)(V_2 - V_i) S}{60 \times 75 \times 60 \times T},$$

căci numărul de rotaţii pe minut este: $\frac{V_2 - V_i}{60\,T}$.

Consumaţia specifică k pe cal-vapor şi oră a fost:

$$K = \frac{M}{T.N} = \frac{M}{T} \frac{60^2 \times 75 \times T}{\Pi (D + d)(V_2 - V_i) S} =$$

$$\frac{60^2 \times 75 \times M}{\Pi (D + d)(V_2 - V_i)(p + P + F + e - E)}$$

deci independentă de timpul cât a durat experienţa, ceeace este evident.

Inlocuind cantităţile din formulă, cu valorile respective avem:

$$K = \frac{60^2 \times 75 \times 126}{\Pi (1{,}520 + 0{,}036)(50736 - 10782)(6{,}300 + 435 + 52 + 12{,}360 - 80)}$$

$\therefore$ $K = \sim 0{,}410$ kg benzină pe cal-vapor efectiv şi oră.

O. Or.

PROBLEMA 4621. *Perpendiculara dusă din piciorul uneia din înălţimile triunghiului, pe dreapta care uneşte ortocentrul cu mijlocul laturei corespunzătoare, formează împreună cu celelalte două laturi, un triunghiu al cărui cerc circumscris taie cercul circumscris triunghiului de referinţă după simediana vârfului respectiv.*

N. N. Mihăileanu.

Fie DEF o transversală a triunghiului ABC, deci

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = 1$$

axa radicală a cercurilor ABC, AEF împarte latura BC în raportul puterilor vârfurilor B, C la cercul AEF; adică

$$\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BF}}{\overline{CA} \cdot \overline{CE}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)^2 \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}$$

condiția ca AU să fie simediană este $\overline{DE} = \overline{DF}$ deci transversala DEF să fie paralelă cu conjugata cevianei AD în unghiul (AB, AC). Acesta este cazul problemei 4621 căci fie A', B', C' picioarele înălțimilor, H ortocentrul și A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor; conjugatul lui A' pe BC este intersecția $\alpha = (BC, B'C')$ și $A\alpha$ este polara lui H față de cercul BC' B' C de centru A_1 deci HA_1 este perpendiculară pe $A\alpha$.

Notă 1°. Soluție analitică dată de D-l TRAIAN PREDOIESCU-ȚĂNȚĂRENI.
2°. Bună soluție, în coordonate baricentrice, dela D-l VIRGIL ECKSTEIN.

PROBLEMA 4979. *Fie* A'B'C' *triunghiul pedal al unui punct* M *din planul unui triunghiu oarecare* ABC *iar* $A_1B_1C_1$ *triunghiul, format de dreptele ortocentroidale ale patrulaterelor* AB'MC', BC'MA', CA'MB'. *Să se arate că triunghiurile* ABC *și* $A_1B_1C_1$ *sunt ortologice.*

ALEXANDRU N. POPESCU-ZORICA.

Soluție dată de D-l MIRCEA AL. VASILESCU-STABU (cl. VII. Liceul „Gh. Lazăr" București). Fie H_1', H_1'', H_2', H_2'' respectiv ortocentrele triunghiurilor ABA', ACA', MCA', MBA'; $H_1'H_1''$ și $H_2'H_2''$ sunt perpendiculare pe BC și trec prima prin ortocentrul H și a doua prin M, iar $H_1'H_2''$ și $H_1''H_2'$ sunt perpendiculare pe AM deci figura $H_1'H_1''H_2'H_2''$ este un paralelogram de centru A_1. Perpendiculara din A_1 pe BC trece deci prin mijlocul segmentului $\overline{MH}$ și analog pentru celelalte. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și ABC sunt deci ortologice.

PROBLEMA 5023. I, J, K, L *fiind punctele de tangență ale laturilor* AB, BC, CD, DA *ale unui patrulater complet* ABCDEF *circumscris cercului* O, *se consideră intersecțiile* A', B', C', D', E', F' *ale paralelelor duse prin* O *respectiv la dreptele* IL, IJ, JK, KL, IK, JL *cu o tangentă la cercul* O *într'un punct* M *variabil de pe acest cerc. Se consideră intersecțiile:*

$P \equiv (AA', EE')$; $Q(CC', FF')$; $R(AA', FF')$; $S(CC', EE')$.

Să se arate că dreptele PQ *și* RS *trec fiecare prin câte un punct fix.*

THEODOR GH. COCEA.

Se observă că polara lui A la cercul O este IL, iar a lui A', perpendiculara din M pe OA' adică şi pe IL'. Deci polul dreptei AA' este A_1, proiecţia lui M pe IL. Tot astfel C_1, E_1, F_1 proiecţiile lui M respectiv pe JK, IK, JL sunt polii dreptelor CC', EE', FF'. Prin urmare A_1E_1, C_1F_1, A_1F_1, C_1E_1 sunt respectiv polarele punctelor P (AA', EE'), Q (CC', FF'), R (AA', FF') S (CC', EE').

Dar A_1E_1, C_1F_1 concură într'un punct D, de pe LK (D, fiind proiecţia lui M pe LK) deoarece ele sunt dreptele SIMSON ale lui M faţă de triunghiurile ILK, JLK, care au aceeaşi bază LK (polara lui D). Deci polarele punctelor P, Q, D sunt concurente. Prin urmare PQ trece prin D. Anlog R S trece prin B.

MIHAIL I. TREFILOV
(elev-inginer Bucureşti).

PROBLEMA 5113. *Fie* M, N, D *două puncte şi o dreaptă arbitrare în planul axelor coordonate* x Oy; P, *un punct variabil pe* D; NP, MP *taie pe* Oy, *respectiv* Ox *în* M', N'. *Locul mijlocului segmentului* M'N' *este o iperbolă de asimptote paralele cu* Ox, Oy.

Paralelele din M *la* Ox *şi din* N *la* Oy *intersectează în* Q. *Dacă dreapta* D *trece prin* Q, *locul geometric este o dreaptă.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-nii: STELIAN CETĂŢEANU, TEODOR A. ŞERBAN şi MIREL D. STOENESCU.

Fie $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(\alpha, \beta)$ şi

$$(D) \equiv Ax + By + C = 0 \quad \text{deci} \quad A\alpha + B\beta + C = 0$$

intersectăm MP, NP cu axele şi aflăm

$$\overline{OM'} = \frac{\beta x_1 - \alpha y_1}{\beta - y_1} , \quad \overline{ON'} = \frac{\alpha y_2 - \beta x_2}{\alpha - x_2}$$

deci R, mijlocul segmentului M'N' are coordonatele $\frac{1}{2}\overline{OM'}, \frac{1}{2}\overline{ON'}$.

Eliminând α, β găsim ecuaţia locului

$$4xy(Ax_2 + By_1 + C) - 2(Ax_2 y_1 + By_1 y_2 + Cy_2)x +$$
$$- 2(Ax_1 x_2 + Bx_2 y_1 + Cx_1)y + C(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

ceeace verifică enunţul.

Observare. Fie X, Y proiecţiile lui R pe axe. Intre X şi Y de abscise x, y pe Ox, Oy avem o legătură omografică deci de forma

$$Axy + Bx + Cy + D = 0$$

adică R (x, y) descrie o iperbolă. Ecuaţia se reduce la o dreaptă $A = 0$ când diviziunile omografice sunt asemenea adică punctele $X\infty$ şi $Y\infty$ se corespund ceeace conform construcţiei dă Q pe D.

PROBLEMA 5166. *Să se examineze dacă numărul:*

$$N = 2000! + 1$$

este divizibil cu 4001.

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

Se ştie din

„*Théorie des Nombres*“ par E. LUCAS pag. 438, şi „*Exercices d'Arithmétiques* par FITZ-PATRICK pag. 433, că dacă p este un număr prim de forma $p = 4 . q + 1$, atunci avem:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 = Mp.$$

Iar dacă: $p = 4 . q + 3$, atunci avem:

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 - 1 = Mp.$$

Sau în general dacă $(2n + 1)$ este un număr prim, atunci:

$$(n!)^2 + (-1)^n = M(2n + 1).$$

(„*Exercices d'Arithmétiques*“ par FITZ-PATRICK, question 432, pag. 433).

In cazul problemei 5166 avem:

$$p = 4001 = 4 . 1000 + 1,$$

care este număr prim, deci vom avea:

$$(2000!)^2 + 1 = M4001.$$

Sau, cum:

$$(2000!)^2+1=(2000!)^2-1+2=(2000!-1)(2000!+1)+2=M4001$$

urmează că unul din numerele

$$(2000!-1) \quad \text{sau} \quad (2000!+1)$$

va fi de forma (M4001 — 2).

Prin urmare N nu este divizibil cu 4001.

Au rezolvat problema 5166 Domnii: STELIAN CETĂŢEANU (elev-inginer Bucureşti) şi IULIAN PETRESCU (lic. Gh. Lazăr Bucureşti).

PROBLEMA 5255. *Două categorii de tunuri de pe linia* MAGINOT *bombardează acelaşi obiectiv de pe linia* SIEGFRIED. *Cunoscând: calibrul, viteza iniţială şi unghiul de tragere al primei categorii de tunuri, să se determine aceleaşi elemente pentru a doua categorie de tunuri, care fiind aşezate mai înapoi, la o depărtare dată, să aibă aceeaşi putere de pătrundere a proiectilelor în obiectiv.*

Se va presupune că greutatea proectilului este proporţională cu cubul calibrului, iar rezistenţa aerului se va neglija.

Aplicaţie numerică *pentru cazul când prima categorie de tunuri are calibrul 120 mm., trag proectile cu viteza iniţială de 600 m/sec., sub un unghiu de tragere de 45°; iar a doua categorie de tunuri este aşezată la 3000 m. înapoia primei categorii.*

CPT. C-DOR I. LINTEŞ.

Pentru ca puterea de pătrundere a proectilelor din cele două categorii de tunuri să fie aceeaşi, trebue să avem:

— aceeaşi forţă vie, adică:

$$1) \qquad \tfrac{1}{2} m_1 . V_{r_1}^2 = \tfrac{1}{2} m_2 . V_{r_2}^2$$

— acelaşi unghiu de cădere, adică:

$$2) \qquad \omega_1 = \omega_2$$

unde m şi V_r reprezintă masa proectilului şi viteza rămasă.

Dar, dacă rezistenţa aerului se neglijează, atunci:

$V_r = V_0$ = viteza iniţială;

$\omega = \alpha$ = unghiul de tragere.

Apoi cum: $m = k \cdot a^3$, a fiind calibrul, iar k un coeficient de proporţionalitate, înseamnă că 1) şi 2) devin:

3) $$\begin{cases} a_1^3 \cdot V_{0_1}^2 = a_2^3 \cdot V_{0_2}^2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 . \end{cases}$$

Bătăile în vid vor fi:

4) $$\frac{V_{0_1}^2 \sin 2\alpha_1}{g} = \frac{V_{0_2}^2 \cdot \sin 2\alpha_2}{g} - d$$

unde d este depărtarea între cele două categorii de tunuri.

Relaţiile 3) înlocuite în 4) ne dau:

5) $$V_{0_1}^2 \sin 2\alpha_1 = V_{0_1}^2 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^3 \cdot \sin 2\alpha_1 - g \cdot d$$

De unde obţinem:

$$a_2 = a_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \frac{g \cdot d}{V_{0_1}^2 \sin 2\alpha_1}}}$$

$$V_{0_2} = V_{0_1} \cdot \sqrt{1 + \frac{g \cdot d}{V_{0_1}^2 \sin 2\alpha_1}}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 .$$

Aplicaţie numerică.

$V_{0_1} = 600$ m/sec.; $\alpha_1 = 45^0$; $a_1 = 120$ mm. şi $d = 3000$ m.

Avem:

$a_2 = 116{,}88$ mm.

$V_{0_2} = 624{,}04$ m/sec.

$\alpha_2 = 45^0$.

O soluţie bună s'a primit dela D-l M. D. POPA (cl. VIII-a, L. M. I.). Celelalte soluţiuni primite au avut erori prea mari.

I. L.

PROBLEMA 5364. *Dacă unui număr prim de patru cifre îi suprimăm pe rând câte o cifră, începând din dreapta sau din stânga lui, obţinem respectiv numere prime de trei, două şi o cifră. Câte numere de patru cifre satisfac aceste condiţiuni?*

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-ra TUDORAN M. LIDIA (clasa VI-a Şcoala centrală de fete „Maria Brâncoveanu").

Numerele prime căutate sunt de forma *abcd*, astfel ca atât numerele *bcd*, *cd*, *d* cât şi numerile *abc*, *ab*, *a* să fie numere prime.

Numerele de o cifră *a* şi *d* trebuind să fie prime, vor fi una din cifrele: 1, 2, 3, 5, 7. Cum însă *cd* şi *bcd* trebue să fie numere prime, urmează că *d* trebue să fie şi terminaţie de număr prim, astfel că cifrele 2 şi 5 trebue excluse. Astfel că *a* poate fi 1, 2, 3, 5, 7, iar *d* poate fi 1, 3, 7.

In ce priveşte numerele de o cifră *c* şi *b* ele trebue să fie terminaţie de număr prim deci: 1, 3, 7, 9.

Am avea astfel de examinat: $5 \times 3 \times 4 \times 4 = 240$ de numere *abcd* dacă îndeplinesc condiţia din enunţ, adică câte 48 numere pentru fiecare valoare a lui *a*.

Vom căuta pe cât e posibil a simplifica această examinare:

Cazul I, $a = 1$. Atunci $b = 1, 3, 7, 9$; $c = 1, 3, 7, 9$; $d = 1, 3, 7$.

Inlăturăm toate numerele formate din $abc = 111, 177, 117, 171$, care sunt divizibile cu 3, deci eliminăm $4 \times 3 = 12$ numere.

Inlăturăm toate numerele formate din $abc = 119, 133$, care sunt divizibile cu 7, deci se mai elimină $2 \times 3 = 6$ numere.

Inlăturăm toate numerele care au $cd = 33, 93$ care sunt divizibile cu 3, deci se înlătură $2 \times 3 = 6$ numere.

Inlăturăm numerele terminate cu $cd = 91$ care sunt divizibile cu 7 deci se înlătură încă 3 numere.

Inlăturăm numerele 1931, 1973, 1917, ca având *bcd* divizibile cu 7 deci eliminăm încă 3 numere.

Inlăturăm numerele 1377 şi 1977 ca având *cd* divizibil cu 7 şi 11 (1777 a fost eliminat ca având 177 divizibil cu 3) deci se elimină încă 2 numere.

Au fost deci eliminate până acum: $12+6+6+3+3+2=32$ de numere. Rămâne de examinat $48 - 32 = 16$ numere şi anume:

1131, 1311, 1911, 1731, 1371, 1971, 1313, 1913,
1373, 1137, 1317, 1737, 1937, 1397, 1797, 1997.

Toate aceste numere afară de 1913, 1373, 1937, 1397, 1907, sunt divizibile cu 3.

Examinând aceste ultime 5 numere găsim că numai numerele *1373, 1997* sunt prime şi deci în condiţiile problemei.

Cazul II, $a = 2$. $b = 1, 3, 7, 9$; $c = 1, 3, 7, 9$; $d = 1, 3, 7$ deci în total 48 de numere de considerat.

Inlăturăm toate numerele începând cu $ab = 21, 27$, care sunt divizibile cu 3, deci eliminăm $2 \times 3 \times 4 = 24$ numere.

Inlăturăm toate numerele ce încep cu $abc = 231, 291, 237, 297$ care sunt divizibile cu 3. Se înlătură deci $4 \times 3 = 12$ numere.

Se înlătură deci în total $24 + 12 = 36$ numere şi mai rămân de examinat următoarele $48 - 36 = 12$ numere:

2331 ; 2931 ; 2391 ; 2991

2333 ; 2933 ; 2393 ; 2993

2337 ; 2937 ; 2397 ; 2997.

Numerele din rândul II: 2333; 2933; 2393; 2993 se elimină ca având *cd* divizibil cu 3; numerele 2391, 2991 au *cd* divizibil cu 7, numărul 2931 are *bcd* divizibil cu 7, iar 2997 are *bcd* divizibil cu 11. Rămân de examinat 2331, 2337, 2937 şi 2397, care nu sunt numere prime.

Cazul III, $a = 3$. Cifrele *b, c, d* având aceeaşi variaţie avem 48 numere de examinat. Numerele ce încep cu 33 (au $ab = 33$ divizibil cu 3) trebuesc înlăturate.

Se elimină astfel $4 \times 3 = 12$ numere.

Numerele ce se termină cu 33 şi 93 ($3 \times 2 = 6$ numere) trebuesc eliminate ca având *cd* divizibil cu 3.

Numerele ce încep cu 393 şi 399 au *abc* divizibil cu 3 ($2 \times 2 = 4$ numere).

3713 are *abc* divizibil cu 7 (1 număr).

3191 şi 3197 au *abc* divizibil cu 11 (2 numere).

3773 are *abc* divizibil cu 13 (1 număr).

Numerele ce încep cu 391 au *abc* divizibil cu 17 ($1 \times 3 = 3$ numere).

Numerele 3111, 3117, 3171, 3177, 3711, 3717, 3771, 3777 se elimină ca având *bcd* divizibil cu 3 (8 numere).

Numărul 3977 are *cd* divizibil cu 7 (1 număr).
3737 are *bcd* divizibil cu 11 (1 număr).
3973 are *bcd* divizibil cu 7 (1 număr).
3731 are *bcd* divizibil cu 17 (1 număr).
Total numere eliminate

$$12+6+4+1+2+1+3+8+1+1+1+1=41.$$

Rămân de examinat 7 numere: 3113, 3131, 3137, 3173, 3971, 3791, 3797, din care numai *3137* şi *3797* sunt numere prime în condiţiunile problemei.

Cazul IV, $a=5$. Avem iarăşi de examinat 48 numere.

Vom elimina toate numerele ce încep cu 51 şi 57 ca având *ab* divizibil cu 3. Sunt $2\times 4\times 3=24$ numere eliminate.

Vom elimina toate numerele ce încep cu 531, 591, 537, 597 ca având *abc* divizibil cu 3. Sunt $4\times 3=12$ numere eliminate.

Vom elimina toate numerele ce se termină cu 33 şi 93 ca având *cd* divizibil cu 3. Sunt $2\times 2=4$ numere eliminate.

Vom elimina numerele ce încep cu 533 ca având *abc* divizibil cu 13. Sunt astfel $1\times 2=2$ numere eliminate.

Numărul 5397 se elimină ca având *abc* divizibil cu 7 (1 număr).

Numerele ce se isprăvesc cu 91 au *cd* divizibil cu 13 ($1\times 2=2$ numere).

Numărul 5931 se elimină ca având *bcd* divizibil cu 7 (1 număr).

Total de eliminat $24+12+4+2+1+2+1=46$ de numere.

Examinând şi restul de numere 5937 şi 5997 găsim că şi ele se elimină ca fiind divizibile cu 3. N'avem deci soluţii.

Cazul V, $a=7$. Şi aici avem 48 de numere de examinat.

Inlăturăm toate numerele începând cu 77 ($4\times 3=12$ numere) ca având *ab* divizibil cu 7 şi 11.

Inlăturăm numerele ce se termină cu 77 ($1\times 2=2$ numere) pentru acelaşi motiv.

Inlăturăm numerele ce se termină cu 93, 39, 33 ($3\times 2=6$ numere) ca având *cd* divizibil cu 3; cele ce se termină cu 91 ($1\times 2=2$ numere) ca având *cd* divizibil cu 7.

Inlăturăm numerele ce încep cu 711 şi 717 ($2\times 3=6$ numere) ca având *abc* divizibil cu 3.

Inlăturăm numerele ce încep cu 731 şi 799 ($2\times 2=4$ numere) ca având *abc* divizibil cu 17.

Inlăturăm numerele ce încep cu 793 ($1 \times 2 = 2$ numere) ca având *abc* divizibil cu 13.

Inlăturăm numerele ce încep cu 791 ($1 \times 3 = 3$ numere) ca având *abc* divizibil cu 7.

Inlăturăm numerele ce încep cu 737 ($1 \times 3 = 3$ numere) ca având *abc* divizibil cu 7.

Inlăturăm numerele ce încep cu 737 ($1 \times 3 = 3$ numere) ca având *abc* divizibil cu 11.

Inlăturăm numerele ce se termină cu 973 (1 număr) ca având *bcd* divizibil cu 11.

Am înlăturat astfel $12+2+6+2+6+4+2+3+3+1=41$ de numere.

Mai rămân de examinat următoarele 7 numere: 7131, 7137, 7197, 7971, 7331, 7337, 7397.

Primele 4 numere sunt divizibile cu 3, deci se înlătură.

Examinând ultimele 3 găsim că 7337 e divizibil cu 11, iar 7397 este divizibil cu 13.

Mai rămâne numai numărul *7331*, care este număr prim în condiţiunile problemei.

Rezultă, deci, că avem: $2+2+1=5$ soluţiuni:

1373, 1997, 3137, 3797, 7331.

Au rezolvat de asemenea, dând toate soluţiile D-nii: I. ŞT. ANDONIE (clasa VII-a Col. Naţional „Sf. Sava"), I. A. BADEA (clasa VIII-a Lic. „A. Şaguna", Braşov), ST. CETĂŢEANU (elev-inginer), I. GH. RADOSLAVOV (elev-inginer), BOTEZ D. M., CRISTESCU M. P., DUMITRESCU CEZAR, GIUGLAN T. D., HOLDEA L. R., IONESCU C., NISTOR ION, POPIŞCĂ M. şi RAICU S. V. (Liceul Militar Câmpu Lung).

Observaţii. 1. Au mai rezolvat problema dând numărul de soluţii marcat in dreptul fiecăruia, D-nii: C. GH. CRUCERU (4); G. I. MIHAIL (4) şi P. I. DRĂGHICESCU (3).

2. D-l ST. CETĂŢEANU a mai dat şi o serie de soluţiuni formale.

3. Remarcăm modul elegant şi ordonat cum D-ra LIDIA TUDORAN îşi redactează soluţiile, fapt pentru care — înafară de fondul soluţiei — îi aducem frumoase laude.

I. L.

EXERCIŢII

5. a fiind un întreg neprim, să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$x^2 - y^2 = a^n,$$

unde n este un întreg dat.

G-L GH. BUICLIU.

R. Pentru a' am propus şi rezolvat exerciţiul 20 la pag. 669, G. M., Vol. XLVI. Pentru a neprim soluţia problemei este:

$$x = \frac{a^n + b^2}{2b},$$

unde b este un divizor al lui a^n şi de aceeaşi paritate cu a.

PROBLEME PROPUSE

5565 [1]). Se dă un cerc de centru O şi rază R. O tangentă variabilă la cerc taie axele dreptunghiulare OX şi OY în A şi B. Să se scrie ecuaţia parabolelor tangente la OX în A şi la OY în B. Să se afle: 1°. Locul vârfurilor parabolei; 2°. Locul intersecţiei directoarei cu axa parabolei; 3°. Infăşurătoarea axei parabolei.

N. ABRAMESCU.

5569. Să se demonstreze geometriceşte că avem:

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

I. IONESCU.

5570. Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$E\left(\frac{x+y}{z}\right) = 5 \quad ; \quad E\left(\frac{x-y}{z}\right) = 2 \quad ; \quad E\left(\frac{xy}{z^2}\right) = 6,$$

unde E(I) înseamnă întregii lui I.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5571. Să se găsească patratele perfecte de 9 cifre, de fiecare din formele $abc\ 578\ abc$, $478\ a'b'c'a'b'c'$, $a''b''c''a''b''c''\ 984$.

V. THÉBAULT.

1) Problema 5565 propusă în N-rul trecut fiind tot una cu problema 5504 propusă la pag. 559, Vol. XLVI se înlocueşte cu prezenta.

5572. Să se construiască un triunghiu, cunoscând în plan poziţia a trei drepte pe care sunt aşternute două din mediatoarele şi una din bisectoarele triunghiului.

G-L GH. BUICLIU.

5573. Se consideră un triunghiu ABC înscris în cercul (O). Se construeşte triunghiul echilateral $AB_a C_a$ înscris în cercul (O) şi având unul din vârfuri în A. Fie A′ punctul comun dreptelor BC şi $B_a C_a$. Se obţin analog punctele B′ şi C′. Să se arate că:

1°. Punctele A′, B′, C′ sunt pe aceeaşi dreaptă Δ.

2°. Cercul (O) determină pe dreapta Δ o coardă egală cu latura triunghiului echilateral înscris.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5574. Se dă un triunghiu ABC şi o direcţie Δ. Paralelele la Δ, duse prin vârfurile A, B, C întâlnesc laturile opuse respectiv în A′, B′, C′. Fie M, N, P mijloacele laturilor triunghiului A′B′C′.

1°. Să se arate că triunghiul MNP este circumscris triunghului ABC şi omologic cu el.

2°. Să se afle locul geometric al centrului de omologie, când direcţia Δ variază.

GH. D. SIMIONESCU.

5575. Să se rezolve sistemul

$$x^2(y-z)=a \quad ; \quad y^2(z-x)=b \quad ; \quad z^2(x-y)=c.$$

M. GHERMĂNESCU.

5576. In „Problèmes de Bacalauréat“ de H. VUIBERT (ed. VIII) se dă ca soluţii ale ecuaţiei

$$\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=b,$$

valorile:

$$x=\pm(a+b^3)\sqrt{\frac{8a-b^3}{27b^3}}, \quad (0<b^3<8a)$$

(problema 111). Verifică aceste soluţii întotdeauna ecuaţia dată? (de ex. pentru $a=1$, $b=-1$ soluţiile se reduc la $x=0$ şi nu verifică).

GH. TH. GHEORGHIU.

5577. Se dă în coordonate ortogonale, curba:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Tangentele la curbă în punctele M_1, M_2, M_3 o taie a doua oară în punctele M_1', M_2', M_3'. Să se demonstreze că:

1°. Dacă punctele M_1, M_2, M_3 sunt pe o dreaptă Δ, atunci şi punctele M_1', M_2', M_3' sunt situate pe o dreaptă Δ'.

2°. Dacă Δ se roteşte în jurul unui punct fix, atunci şi Δ' se roteşte în jurul unui punct fix.

I. TEODORESCU.

5578. Să se calculeze

$$I = \int \frac{3x + 3a}{x\sqrt{(x+a)(x^3+bx+ab)}}\,dx.$$

GH. POPESCU-BOTOŞANI.

5579. Pe un cerc de sârmă al cărui plan este înclinat cu unghiul α pe planul orizontal, se mişcă cu frecare (coeficient de frecare f) un inel de greutate G. Un fir este legat cu un capăt de acest inel şi, după ce este trecut peste un scripete mic situat în centrul cercului, prinde în celălalt capăt o greutate egală cu greutatea inelului.

Să se determine regiunea pe cerc în care inelul este în echilibru. Frecarea pe scripete şi greutatea firului se vor neglija.

GABRIELA ŢIŢEICA.

ERATĂ. 1°. In enunţul problemei 4991 dela pag. 102, numărul precedent, se înlocueşte SIMPSON prin SIMSON.

2°. In prima ecuaţie dela pag. 74 se înlocueşte semnul $=$ prin semnul $+$.

3°. In enunţul problemei 5563 propusă în N-rul precedent, punctul 3° se înlocueşte prin: 3°. *al volumului trunchiului de con, coincide cu centrul sferei circumscrisă trunchiului de con.*

4°. In problema Nr. 5537 a fost omis de sub semnul Σ factorul C_4^2.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Costescu Gh. I. (5049, 503); *Dimitriu I. Călin* (5061, 439, 543); *Drăghicescu P. P.* (4307, E, N); *Dumitrescu F. D.* (5486); *Gheorghiu E. Oct.* (5052, 55, 64, 81, 82, 108, 13, 16, 18, 518); *Isac E.* (5381); *Mihalea I. I.* (5527); *Moessner A.* (N); *Niculescu C. M.* (5431); *Pantelimon Const.* (4396, 5366, 69, 95, 435, 47, 64, 504, 62); *Seni Cl.* (5550); *Stoenescu D. Mirel* (4464, 5442, 74, 86, 87, 507, 44), *Văduva F. Marin* (5442); *Voinea P. R.* (N); *Wegener Gh. I.* (5049, 503); *Wegener N. Eug.* (4982, 5171).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 80 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 74.735.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1941

SUMARUL

1. † Profesorul Gh. Bratu (urmare şi sfârşit). *P. Sergescu.*
2. Cercetări in legătură cu indicatorii (urmare şi sfârşit) . . . . . *Comandor I. Linteş.*
3. Proprietăţi ale tetraedrului echifacial . *N. Abramescu.*
4. Note Matematice: 13 — 18.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 306.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 1690, 2461, 2575, 4890, 5264, 5348, 5374, 5390, 5420, 5424, 5438, 5442, 5483, 5499, 5526.
10. Exerciţii: 6.
11. Probleme propuse: 5580 — 5591.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1941

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 5542, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

† PROFESORUL GH. BRATU

(25.II.1881—1.IX.1941)

(Urmare dela pag. 108)

O nouă ordine de idei îl preocupă cu începere din 1935. După ce dă cea mai simplă demonstrație teoremei D-lui D. POMPEIU cu privire la triunghiul echilateral, G. BRATU o extinde în spațiu, obținând proprietăți geometrice frumoase (1937), urmate de un studiu (1939) asupra poligoanelor inscriptibile care au unghiurile omoloage egale (poligoane inscriptibile semi-asemenea).

Astronomia fost studiul de predilecție a lui BRATU încă de când era student la Paris. Intre 1910—12 a determinat coordonatele ecuatoriale a 1687 de stele, a calculat efemeridele câtorva stele duble și ale planetelor 498 și 537. Director al Observatorului Astronomic din Cluj, el a luptat din răsputeri să-l creeze. Numai cine l-a văzut sbătându-se zi de zi să obțină sume extrem de reduse, își poate da seama de sforțările ce reprezintă clădirea de pe dealul Feleacului a celor 5 pavilioane, precum și instalarea Cupolei mobile GILON de 5 m diametru. Observatorul a fost înzestrat cu aparate deosebit de prețioase: un mare telescop, unic în România, cu oglinda COUDER de 50 cm diametru, o lunetă ecuatorială PRIN cu obiectivul ZEISS de 20 cm diametru, o lunet pentru serviciul orei, o lunetă de passage pentru longitudini, un fotometru fotoelectric GUTNIC pentru stele variabile, două pendule fundamentale, pendule electrice, cronometre, sextante, teodolite, etc.

Au trecut peste 10 ani până la construirea în străinătate a instrumentelor, comandate după planurile din Cluj; alți câțiva ani pentru instalarea lor. Viața se irosea în muncă obscură. Dar cel puțin, în viitor se va putea lucra în condiții bune științifice.

Până la instalarea deplină a Observatorului din Cluj, BRATU a luat asupră-și o operă de colaborare cu Observatorul din Paris, la *Harta fotografică a Cerului*, pentru veacul al XX-lea. I s'au încredințat clișeele zonei plus 20, urmând să efectueze la Cluj calculele de reducere. Pentru adunarea materialului, coordonarea metodelor de calcul, etc. BRATU s'a dus în fiecare vară, din 1934 până în 1939, pe cheltuială proprie, să lucreze la Observatoarele din Paris, Meudon, Forcaquier și Arcetri. In 1935, a fost ales în Comisia internațională restrânsă a Hărții Cerului. Calculele făcute la Cluj (în dublu exemplar) formează un volum de 2012 pagini.

Ele reprezintă aproape 3/4 din lucrarea la care se angajase şi care înscrie numele Clujului într'o operă însemnată internaţională. Din nefericire, războiul a întrerupt comunicaţiile cu Parisul, unde a rămas un sfert de material, aşa că lucrarea nu e încă terminată. G. BRATU lasă Universităţii Clujene ca moştenire îndatorirea imperioasă de a duce la bun sfârşit, de îndată ce se vor stabili relaţiile normale între ţări, această întreprindere care face cinste Clujului (la care au lucrat şi I. ARMEANCA, GH. CHIŞ şi S. RADU).

In 30 August 1940, ne-a lovit pe toţi marea nenorocire a cedării Clujului. Fiecare zid, fiecare instrument ştiinţific sau mobilă, fiecare pagină publicată, fiecare şurub din Cluj, reprezenta grijă constantă de ani de zile, alergături neîncetate la autorităţi (adesea până la Bucureşti), nopţi de veghe în elaborarea de proiecte, entusiasm şi jertfe zidite la temelie. Sufletul românesc se desvoltase în plină frumuseţe pe malurile Someşului. Şi, într'o noapte blestemată, visul unui neam întreg a fost spulberat. Durerea imensă a fiecărui individ pentru năruirea creaţiei care a fost tot rostul vieţii lui, sau pentru risipirea întregei lui agonisite, devenea o biată picătură în oceanul de desnădejdie mută a unui Neam întreg crucificat. Numai cine a trăit acolo clipă cu clipă cei 20 de ani, ai întemeierii şi a împlinirii idealului naţional, numai cine a lăsat pe fiecare piatră pe care a călcat-o acolo, o parte din inima lui, poate înţelege tragedia pribegiei. Cuvintele n'o pot tălmăci. Să fii silit să arunci în camioane sau în lăzi, fără precauţiune, obiecte delicate şi scumpe, pe care le fereai de orice atingere, să desfaci şurub cu şurub ceea ce clădiseşi cu gândul veşniciei, să laşi în urmă zidurile goale la suprafaţă, dar pline de ecoul muncii şi al entusiasmului şi pline de reproşuri că le laşi văduvite, să destrami singur, în câteva zile de sălbatică distrugere, tot rostul vieţii, sunt dureri care lovesc de moarte. Ele înfrăţesc pentru totdeauna pe cei cari le-au trăit împreună.

GHEORGHE BRATU, creatorul Observatorului, a lucrat înfrigurat la demontarea instrumentelor. Toate sunt azi în Timişoara, graţie devotamentului său. El însuşi a părăsit Clujul la 10 Septemvrie 1940, cu penultimul tren românesc.

In pribegie, grija lui neobosită a fost reînstalarea Observatorului. Cu câtă bucurie a anunţat Joi, că Vineri dimineaţa 29 August 1941, dă întâlnire colaboratorilor săi ca să ia în primire

clădirea provizorie construită cu ajutorul Primăriei Timişoara, pentru luneta ecuatorială. Joi noaptea un atac de hemoragie cerebrală l-a ţintuit în pat, pentru a-l răpi dintre noi, în plină activitate, la 1 Septemvrie. Dar greul a fost învins; urmaşii lui vor putea duce mai departe opera bine înjghebată de primul şi neobositul director.

Solicitudinea pentru studenţi a lui GH. BRATU, s'a manifestat şi prin redactarea mai multor manuale universitare. In liceele de sub stăpânire maghiară se făcea mai puţină matematică decât în cele din Vechiul Regat. Era nevoie de o pregătire specială a studenţilor începători înainte de a le deschide orizonturile matematicii superioare. BRATU şi-a luat asupra-şi organizarea unor cursuri introductive de Matematici generale. Ele au format volumul I din Cursul de *Matematici generale* pe care l-a publicat în 1927.

Un an mai târziu el luă iniţiativa publicării unui curs colectiv de *Analiză Matematică*. Fascicula I (Calculul Diferenţial) a fost scrisă de A. ANGELESCU. Iar GH. BRATU a compus fascicula II *Calculul Integral*. O parte din el a fost litografiat la Cluj în 1939. Evacuarea a risipit manuscrisul şi foile apărute. BRATU nu s'a dat în lături dela noua muncă ce-l aştepta. A redactat din nou, în refugiu în Timişoara, Calculul Integral. Acum manuscrisul aşteaptă să fie tipărit.

In fine, un *Curs de Astronomie* e complet redactat pentru tipar.

Activitatea de conferenţiar ne înfăţişează un alt aspect al strădaniei neobosite a lui GH. BRATU. In 12 ani, el a vizitat 14 oraşe din ţară şi 5 congrese internaţionale, vorbind, despre Astronomia Românească, Mijloacele de investigaţie, Problemele şi evoluţia Astronomiei, Istoria marilor descoperiri sau observatoare astronomice, Minunile cerului. Conferinţele au fost caracterizate prin o deosebită căldură sufletească. Ele erau însoţite de proiecţiuni, ale căror dispozitive erau preparate de BRATU, aproape totdeauna pe cheltuiala sa. (D-na EL. BRATU a dăruit acum Observatorului Astronomic, la Timişoara, 350 de astfel de dispozitive). Vom încerca să strângem într'un volum textele conferinţelor lui BRATU.

GH. BRATU s'a născut la 28 Februarie 1881 în Bucureşti, din părinţi ardeleni. Rămas orfan încă de copil, îl găsim în Iaşi, unde profesorul BURLĂ, văzându-i calităţile, îl ia la sine să-l crească. Poate că bunătatea de toată viaţa a lui GH. BRATU a fost înrâurită şi de aceşti ani ai copilăriei, petrecuţi în casa unui om distins,

deosebit de cult şi de bun. A fost elev al liceului Internat din Iaşi, unde a avut colegi străluciţi ca TRAIAN LALESCU, profesorul V. BARONI, N. MALAXA. Student în matematici la Iaşi, a audiat acolo cursurile lui CLIMESCU, CULIANU, MĂNESCU, RALLET. Căsătorit încă din anii de student, GH. BRATU a fost numit la 23 de ani profesor de matematici la liceul din Botoşani. Dar profesorii săi nu l-au lăsat acolo, ci i-au obţinut o bursă ADAMACHI pentru studiul astronomiei la Paris. BRATU povestea totdeauna cu emoţie despre ajutorul pe care i l-au dat profesorii săi, şi mai ales RALLET.

In 1908 îl găsim student la Paris, unde se află în tovărăşia întregei familii (soţia şi trei copii). Toţi urmau cursuri, dela Sorbona şi Observatorul Astronomic, până la grădiniţa de copii. Casa lui BRATU din Paris a fost timp de şase ani de zile loc de întâlnire al studenţilor români, unde se reînviau amintirile din ţara scumpă şi depărtată. D-na E. BRATU a creat atunci căminul studentelor române din Paris, care s'a închis după războiul cel mare (prin 1920—22).

GH. BRATU şi-a refăcut licenţa în matematici la Paris, trecând patru certificate (în loc de trei). A avut ca profesori pe E. GOURSAT şi E. PICARD pentru Analiza Matematică, pe PAUL APPELL şi PAUL PAINLEVÉ pentru Mecanică, pe G. DARBOUX pentru Geometrie şi pe H. ANDOYER pentru Astronomie.

Pe când îşi pregătea doctoratul în matematici, GH. BRATU a fost astronom stagiar la Observatorul din Paris (1911—14), sub direcţia lui B. BAILLAUD.

In Iunie 1914 şi-a trecut teza de doctorat în matematici la Sorbona. Izbucnirea războiului european a făcut să dispară toate cărţile, tezele, lucrurile lui BRATU, care fuseseră expediate în lăzi prin Germania. Din această cauză, BRATU însuşi nu avea *niciun exemplar* din teza sa până prin 1930 când i-am găsit eu două exemplare la un anticar din Paris.

In 1914—19 a fost asistent la Observatorul Astronomic din Iaşi, Docent în 1915 şi Conferenţiar de Analiză Matematică la aceaşi Universitate în 1918.

In războiul nostru de întregire GH. BRATU a fost sublocotenent la aerostaţie. A obţinut bareta „Mărăşeşti" pe crucea comemorativă a războiului.

Când s'a întemeiat Universitatea din Cluj, el a fost printre primii învăţaţi români cari au alergat să-şi închine puterile creării învăţământului superior românesc în Ardeal. Dintre toţi candidaţii pentru matematici, comisia pentru organizarea Universităţii a recomandat numai trei, pe baza raportului lui G. ŢIŢEICA, şi anume pe A. ANGELESCU, G. BRATU şi N. ABRAMESCU. G. BRATU a fost numit profesor de *Calcul Diferenţial şi Integral* şi suplinitor la *Astronomie*, în 1919. In 1920 regimul românesc hotărăşte crearea Observatorului Astronomic din Cluj şi numeşte ca director pe G. BRATU, însărcinându-l cu construcţia, organizarea şi înzestrarea Observatorului. La 3 Aprilie 1931 BRATU trece profesor titular la Astronomie, catedră pe care a deţinut-o până la moarte, şi profesor suplinitor la fosta lui catedra de *Calcul Diferenţial şi Integral* până în 1938 când această catedră a fost ocupată, prin transferare dela cea de geometrie, de subsemnatul. Totuşi, BRATU a continuat să facă până la sfârşit, gratuit, cursul de ecuaţii cu derivate parţiale şi ecuaţii integrale.

Intre timp a fost şi profesor la cursurile pentru pregătirea corpului didactic secundar din Ardeal (1919—20), de *Aritmetică Comercială* la Academia Comercială din Cluj (1921—26) şi profesor de matematici la Seminarul Pedagogic Universitar din Cluj (1922—1939). In 1931—32 a fost inspector general al învăţământului secundar. In 1923—24 şi 1938—40 a fost Decanul ales al Falculţăţii de Ştiinţe din Cluj, iar în anii 1921—23, 1924—25, 1929—30, 1940 a fost prodecan. Viaţa sa s'a scurs liniştită în muncă continuă pentru îndeplinirea obligaţiilor sale didactice, administrative şi ştiinţifice, fără niciun eveniment exterior însemnat afară de evacuarea Clujului.

A fost membru al societăţilor matematice din Franţa, România, Palermo (Italia), al „Gazetei Matematice" din Bucureşti, al Societăţilor ştiinţifice din Cluj şi Timişoara, al Societăţilor astronomice din Franţa şi Italia, a întemeiat şi condus timp de zece ani filiala din Cluj a asociaţiei Alliance Française; a fost Membru al Academiei de ştiinţe din Bucureşti.

GH. BRATU ne părăseşte în chip năpraznic. Ne luăm angajamentul să continuăm şi să ducem la îndeplinire străduinţele sale.

Când va veni împlinirea timpurilor, vom reface mândru pe dealul Feleacului scumpul său Observator. Numele şi chipul lui GH. BRATU

vor spune cercetătorilor viitori că, întocmai ca la Curtea de Argeș, și la Observatorul din Cluj temeliile au fost cimentate cu strădania și jertfa unui om. Iar ceea ce este cimentat în sânge are în sine germenii trăiniciei. Calculele pentru Harta Fotografică a Cerului vor fi duse la sfârșit de elevii pe cari i-a format. Când se va tipări volumul, numele lui BRATU și al Clujului, unite prin iubire și jertfă, vor vorbi de vrednicia Neamului nostru. In cursurile și ședințele noastre de seminar vom căuta să facem să retrăiască în viitorii noștri studenți sufletul și învățătura lui BRATU. In drumul său spre lașii tinereței sale, unde a fost înmormântat, el a luat cu sine partea cea mai duioasă din inimile noastre.

PETRE SERGESCU.

CERCETĂRI IN LEGĂTURĂ CU INDICATORII

(Urmare dela pag. 122)

Relațiuni cu produse

Dacă utilizăm formula 3) din articolul *„Extinderi asupra indicatorilor“* G. M., XLI, pag. 279, avem:

$$15)\qquad P_{x+y}(n) = \frac{(x+y)!\ \Pi E\left(\frac{x+y}{ab}\right)!\ldots\Pi(ab)^{E\left(\frac{x+y}{ab}\right)}\ldots}{\Pi E\left(\frac{x+y}{a}\right)!\,\Pi\left(\frac{x+y}{abc}\right)!\ldots\Pi(a)^{E\left(\frac{x+y}{ab}\right)}\ldots}.$$

Cum însă avem:

$$C^{x}_{x+y} = C^{y}_{x+y} = \frac{(x+y)!}{x!\,y!}$$

urmează că putem scrie:

$$16)\qquad P_{x+y}(n) = P_x(n)\,.\,P_y(n)\,.\,\frac{A}{B}$$

unde avem:

$$A_x = C^{x}_{x+y}\ .\ C^{x_2}_{(x+y)_2}\ldots\Pi(ab)^{i}\ldots$$

$$B_x = C^{x_1}_{(x+y)_1}.\ C^{x_3}_{(x+y)_3}\ldots\Pi(a)^{i}\ .$$

Sau:

$$A_y = C_{x+y}^{y} \cdot C_{(x+y)_2}^{y_2} \ldots \Pi (ab)^i \ldots$$

$$B_y = C_{(x+y)_1}^{y_1} \cdot C_{(x+y)_3}^{y_3} \ldots \Pi (a)^i \ldots$$

notând:

$$x_1 = E\left(\frac{x}{a}\right), x_2 = E\left(\frac{x}{ab}\right), \ldots$$

$$y_1 = E\left(\frac{y}{a}\right), y_2 = E\left(\frac{y}{ab}\right), \ldots$$

$$(x+y)_1 = E\left(\frac{x+y}{a}\right), (x+y)_2 = E\left(\frac{x+y}{ab}\right), \ldots$$

iar $i = 0$ sau 1.

Numerele A şi B sunt întregi, având $A > B$, însă A nu este întotdeauna divizibil cu B.

Cum însă avem:

17) $$P_{x+y}(n) = MP_x(n) = MP_y(n)$$

urmează că expresiunile:

$$P_x(n) \cdot \frac{A}{B} \quad \text{sau} \quad P_y(n) \cdot \frac{A}{B}$$

sunt totdeauna întregi.

Deasemenea avem:

$$P_{x.y}(n) = P_x.(n) \cdot P_{x.(y-1)}(n) \cdot \frac{A_1}{B_1}$$

$$P_{x.(y-1)}(n) = P_x.(n) \cdot P_{x.(y-2)}(n) \cdot \frac{A_2}{B_2}$$

. . . . . .

$$P_{x.(y-k+1)}(n) = P_x(n) \cdot P_{x.(y-k)}(n) \cdot \frac{A_k}{B_k}.$$

Prin înmulţire avem:

18) $$P_{x+y}(n) = [P_x(n)]^k \cdot P_{x.(y-k)}(n) \cdot \frac{\Pi A}{\Pi B}.$$

Făcând apoi $k = y$, apoi prin consideraţiuni de simetrie, obţinem:

19) $$P_{xy}(n) = [P_x(n)]^y \cdot \left[\frac{\Pi A}{\Pi B}\right]_y = [P_y(n)]^x \cdot \left[\frac{\Pi A}{\Pi B}\right]_x.$$

Se mai poate apoi constata cu uşurinţă că avem:

$$20) \qquad P_{x+n}(n) = M\Pi(n)$$

şi

$$21) \qquad P_{x.n}(n) = [\Pi(n)]^x . \left[\frac{\Pi A}{\Pi B}\right]_x$$

unde, cercetând pentru o serie de exemple numerice am constatat că ΠA este divizibil cu ΠB.

Observaţii:

1) Dacă în 16) admitem că x şi y au aceeaşi factori primi ca n, atunci avem:

$$22) \quad \begin{cases} P_{x+y}(x) = \Pi(x) . P_y(x) . \left(\frac{A}{B}\right)_x \\ P_{x+y}(y) = \Pi(y) . P_x(y) . \left(\frac{A}{B}\right)_y . \end{cases}$$

2) Dacă în 19) facem aceleaşi consideraţiuni ca mai sus, atunci avem:

$$23) \quad \begin{cases} P_{x.y}(x) = [\Pi(x)]^y . \left[\frac{\Pi A}{\Pi B}\right]_y = [P_y(x)]^x . \left[\frac{\Pi A}{\Pi B}\right]_x \\ P_{x.y}(y) = [\Pi(y)]^x . \left[\frac{\Pi A}{\Pi B}\right]_x = [P_x(y)]^y . \left[\frac{\Pi A}{\Pi B}\right]_y . \end{cases}$$

Observaţii generale

1) Studiul de mai sus anulează formulele 4), 5) şi 6) din articolul *„Extinderi asupra indicatorilor“* din G. M., XLI, pag. 280.

Deasemenea anulează relaţiunile: 4), 5), 6), 7), 8), 9), total sau parţial din articolul *„Extinderi în legătură cu indicatorii“* din G. M., XLV, pag. 20 şi 21.

2) Studiul de faţă trebueşte complectat cu:

— precizarea resturilor R_z;

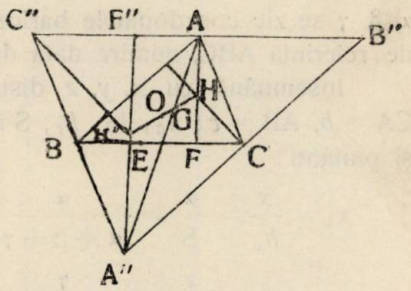
— precizarea cazurilor când ΠA este divizibil cu ΠB.

COMANDOR I. LINTEŞ.

PROPRIETĂȚI ALE TETRAEDRULUI ECHIFACIAL

Résumé. On donne la construction et des nouvelles propriétés d'un tétraèdre équifacial ABCD, ayant les côtés opposés égaux DA = BC, DB = CA, DC = AB, et les faces égales au triangle donné ABC.

1. Un *tetraedru* ABCD se zice *echifacial* [1]), când are muchiile opuse egale DA = BC, DB = CA, DC = AB și deci fețele ABC, BCD, CDA, DAB sunt egale. Să construim tetraedrul echifacial, cu fețele egale cu triunghiul ABC. Paralelele duse prin vârfurile A, B, C la laturile opuse formează triunghiul A″B″C‴ anticomplementar cu ABC. Triunghiul A″B″C″ este omotetic cu ABC, în omotetia (G; 2 : 1), G fiind centrul de greutate (baricentrul) al triunghiurilor ABC, A″B″C″, iar GA″ : GA = 2 : 1. Fie O și H centrul cercului circumscris și ortocentrul triunghiului ABC și H″ ortocentrul lui A″B″C″. O este mijlocul lui HH″ și punctele H″, G separă armonic pe OH. Să învârtim triunghiul BA″C în jurul lui BC, CB″A în jurul lui CA, AC″B în jurul lui AB, până când vârfurile A″, B″, C″ ajung în același punct D. Tetraedrul ABCD est echifacial, cu laturile opuse DA = BC, DB = CA, DC = AB și fețele ABC = BCD = CDA = DAB, corespunzător triunghiului ABC.



Când A″ se învârtește în jurul lui BC, până ajunge în D, punctele A″ și D sunt într'un plan perpendicular pe BC, a cărui

1) Cu această ocazie, *se consideră rezolvată problema* 4481 (*Gazeta Matematică*, vol. 40, 1935, p. 286). Pentru bibliografie să se consulte: J. NEUBERG, *Etudes sur les coordonnées tétraédriques* (1869), *Mémoire sur le tétraèdre* (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, 1870); V. THÉBAULT, *Géométrie du tétraèdre* (*Gazeta Matematică*, vol. 39, 1934, p. 434); ROUCHÉ et COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*, *Sur la Géométrie du triangle* (t. 1, Note III, p. 443), *Sur la Géométrie récente du tétraèdre* (t. 2, Note IV, p. 643); N. ABRAMESCU, *Formule pentru Geometria triunghiului* (Extras din *Gazeta Matematică*, vol. 11, 1905), *Asupra tetraedrelor echifaciale* (*Gazeta Matematică*, vol. 10, 1904, p. 54), *Lecțiuni de Geometria Analitică* (curs universitar), ed. 4. *Coordonate trilatere*, p. 64. *Coordonate tetraedrice*, p. 395.

urmă pe planul figurii este înălțimea A″H″ a triunghiului A″B″C″. Proiecția lui DA″ pe planul ABC este înălțimea din A″ și de asemenea proiecțiile lui DB″ și DC″ sunt înălțimile din B″ și C″ ale triunghiului A″B″C″. Deci proiecția lui D pe planul ABC este ortocentrul H″ al triunghiului A″B″C″.

2. *Coordonate baricentrice.* Fie M un punct în planul unui triunghiu ABC și A′, B′, C′ punctele unde cevienele AM, și BM, CM taie laturile opuse BC, CA, AB. Să notăm cu P și Q proiecțiile lui B și C pe AA′. Insemnând cu α, β, γ trei numere proporționale cu ariile triunghiurilor BMC, CMA, AMB, avem

$$\frac{\text{aria CMA}}{\text{aria AMB}} = \frac{AM \cdot CQ}{AM \cdot BP} = \frac{A'C}{BA'},$$

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{B'C}{B'A} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{C'A}{C'B} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

α, β, γ se zic coordonatele baricentrice ale lui M, față de triunghiul de referință ABC, numire dată de MOEBIUS și FEUERBACH.

Însemnând cu x, y, z distanțele lui M la laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; h_a, h_b, h_c, S înălțimile și aria triunghiului ABC, și punând:

$$x_1 = \frac{x}{h_a} = \frac{\alpha}{S} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad x_2 = \frac{y}{h_b} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$x_3 = \frac{z}{h_c} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

x_1, x_2, x_3 se zic coordonate baricentrice absolute, sau *coordonate baricentrice.*

3. *Coordonatele baricentrice ale lui* H″. Fie F intersecția lui BC cu înălțimea AH și F″, E intersecțiile lui A″H″ cu C″B″ și BC. Insemnând cu x_1, x_2, x_3 coordonatele baricentrice ale lui H, avem

$$(1) \quad x_1 = \frac{HF}{AF} = \frac{CF\ tgFCH}{CF\ tgC} = \frac{cotgB}{tgC} = cotgB\ cotgC,$$

$$x_2 = cotgC\ cotgA, \quad x_3 = cotgA\ cotgB, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Să însemnăm cu x_1'', x_2'', x_3'' coordonatele baricentrice ale lui H″. Avem

$$(2) \quad x_1'' = \frac{H''E}{AF} = \frac{H''E}{F''E}, \quad x_1 = \frac{HF}{AF} = \frac{H''F''}{A''F''} = \frac{F''H''}{F''A''} = \frac{F''E - H''E}{2F''E}.$$

Observând (2), obținem

$$(3)\quad x_1 = \frac{1}{2} - \frac{x_1''}{2},\ x_1'' = 1 - 2x_1,\ x_2'' = 1 - 2x_2,\ x_3'' = 1 - 2x_3$$

4. *Volumul tetraedrului echifacial* ABCD. Vârful D are proiecția H″ pe planul ABC, iar înălțimea DH″ este cateta triunghiului dreptunghic cu ipotenuza DE și cealaltă catetă H″E. Deci.

$$\overline{DH''}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{H''E}^2 = h_a^2 - h_a^2\left(\frac{H''E}{h_a}\right)^2 = h_a^2(1 - x_1''^2),$$

Observând (3), avem

$$1 - x_1''^2 = 1 - (1 - 2x_1)^2 = 4x_1(1 - x_1),$$

și înlocuind pe x_1 cu valoarea din (1), obținem

$$1 - x_1''^2 = 4\,\text{cotgB cotgC}\,(1 - \text{cotgB cotgC})$$

$$= 4\,\text{cotgB cotgC}\,\frac{\text{sinB sinC} - \text{cosB cosC}}{\text{sinB sinC}}$$

$$1 - x_1''^2 = 4\,\frac{\text{cosB cosC}}{\text{sin}^2\text{B sin}^2\text{C}}\cos(\text{B} + \text{C}) = 4\,\frac{\text{cosA cosB cosC}}{\text{sin}^2\text{B sin}^2\text{C}},$$

$$DH'' = 2h_a\,\frac{\sqrt{\text{cosA cosB cosC}}}{\text{sinB sinC}},$$

$$\text{Vol. ABCD} = \frac{2}{3}\,\text{aria ABC}\,h_a\,\frac{\sqrt{\text{cosA cosB cosC}}}{\text{sinB sinC}}.$$

Observând că

$$S = \text{aria ABC} = \frac{ah_a}{2},\quad \frac{a}{\text{sinA}} = \frac{b}{\text{sinB}} = \frac{c}{\text{sinC}} = 2R,$$

$$\text{cosA} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ldots, R = \frac{abc}{4S},$$

avem

$$\text{Vol. ABCD} = \frac{4}{3}\,\frac{S^2}{a}\,\frac{\sqrt{\text{cosA cosB cosC}}}{\text{sinB sinC}} = \frac{16R^2S^2}{3abc}\sqrt{\text{cosA cosB cosC}},$$

$$\text{Vol. ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)},$$

N. ABRAMESCU.

NOTE MATEMATICE

13. *Patrat magic cu numere zecimale.* Numărul 1,4166... este suma comună a tuturor numerelor de pe aceeaşi linie sau de pe aceeaşi coloană a patratului magic.

0,666... A	0,125 B	0,08333... C	0,541666... D
0,20833... E	0,41666... F	0,458333... G	0,333... H
0,375 I	0,25 K	0,291666... L	0,5 M
0,1666... N	0,625 P	0,58333... Q	0,041666... R

Se observă că numerele de pe diagonale au de asemenea acelaşi număr 1,4166... ca sumă şi că în plus

$$1{,}4166... = A+D+D+R = F+G+K+L = B+C+P+Q =$$
$$= E+J+H+M = C+H+I+P = B+E+M+Q =$$
$$= A+B+E+F = C+D+G+H = I+K+N+P =$$
$$= L+M+Q+R.$$

A. MOESSNER.

14. *Numere imperfecte şi numere inamice.* Se ştie că un *număr perfect* este acela a cărei sumă a divizorilor, excepţie făcând numărul însăşi, este egală cu numărul dat.

Prin analogie, să numim *număr imperfect*, acel număr care este egal cu suma numerelor prime cu el şi mai mici decât el, micşorate în numărul însăşi, adică să avem:

1) $$M = \sigma(N) - N.$$

Cum însă avem: $$\sigma(N) = \frac{1}{2} N \cdot \varphi(N)$$

$\varphi(N)$ fiind indicatorul lui N, atunci urmează că:

$$\varphi(N) = 4$$

deci: $$N = 5, 8, 10, 12.$$

Observaţie. Căutând numărul care are o valoare egală cu suma numerelor prime cu el şi mai mici ca el, din care se scade cel mai mare număr prim, atunci nu găsim soluţie.

* * *

Se zice că două numere sunt *amice* sau *amiabile*, dacă unul este egal cu suma divizorilor celuilalt, exceptând numărul însăşi.

Prin analogie zicem că două numere sunt *inamice* dacă unul este egal cu suma numerelor prime şi mai mici ca celălalt, excepţie făcând însăşi numărul, adică să avem.

$$2) \quad \begin{cases} A = \sigma(B) - B \\ B = \sigma(A) - A. \end{cases}$$

Dar deducem lesne că trebue să avem:

$$3) \quad 2(A+B) = A.\varphi(A) = B.\varphi(B).$$

Dar pentru ca să avem egalitatea:

$$A.\varphi(A) = B.\varphi(B)$$

presupunând că $A > B$, ar trebui să avem: $\varphi(A) < \varphi(B)$.

Dar acest caz a fost studiat în G. M., XXVIII, pag. 363. („*O problemă cu indicatori*"), unde am găsit deocamdată condiţiunile:

Numărul factorilor lui A să fie mai mare sau egal cu a lui B.

2. Numerele A şi B să nu fie de forma $A'.k$ şi $B'.k$ unde A' şi B' sunt prime absolut.

3. Numerele A şi B să satisfacă condiţia:

$$B < A < (n+1).B$$

unde n este numărul factorilor lui A.

Prin urmare, dacă vor exista *numere inamice*, ele vor trebui să se găsească printre acele cari satisfac condiţiunile de mai sus.

Observaţie. Dacă admitem:

$$2') \quad \begin{cases} A = \sigma(B) - (B-1) \\ B = \sigma(A) - (A-1). \end{cases}$$

Atunci relaţia 3) devine:

$$3') \quad 2(A+B-1) = A.\varphi(A) = B.\varphi(B).$$

Prin urmare condiţiunile de mai sus rămân valabile.

COMANDOR I. LINTEŞ.

15. *Asupra ariei unui patrulater oarecare.*

D-l Ing. N. VRACA mi-a propus următoarea formulă, pentru aria unui patrulater oarecare

$$4S = \sqrt{4\,d_1^2 \cdot d_2^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2},$$

unde a, b, c, d sunt respectiv laturile AB, BC, CD, DA ale patrulaterului, iar d_1 şi d_2 diagonalele lui.

Iată o demonstraţie simplă a acestei formule:

Fie O punctul de întâlnire al diagonalelor, m, n, p, q segmentele AO, OC, BO, OD determinate pe diagonale, iar θ unghiul AOD ($< 90^0$).

Aplicând teorema lui CARNOT triunghiurilor formate de diagonale şi laturi, avem succesiv:

Δ AOD ne dă

$$2mq \cdot \cos\theta = m^2 + q^2 - d^2;$$

Δ AOB ne dă

$$2mp \cdot \cos\theta = a^2 - p^2 - m^2$$

şi adunând

$$(1) \qquad 2md_2 \cos\theta = a^2 - d^2 + q^2 - p^2;$$

Δ BOC ne dă

$$2np \cdot \cos\theta = n^2 + p^2 - b^2;$$

Δ COD ne dă

$$2nq \cdot \cos\theta = c^2 - n^2 - q^2$$

şi prin adunare

$$(2) \qquad 2nd_2 \cdot \cos\theta = c^2 - b^2 + p^2 - q^2.$$

Adunând pe (1) cu (2) obţinem

$$\boxed{2\,d_1 d_2 \cos\theta = a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$$

formulă analoagă formulei lui CARNOT pentru triunghiuri.

De aci prin ridicare la pătrat şi înlocuirea $\cos\theta$ prin sinus se obţine imediat formula căutată, unde am ţinut seamă că $2S = d_1 d_2 \cdot \sin\theta$, relaţie cunoscută.

Observare. Dacă patrulaterul este inscriptibil, ţinând seamă de teorema lui PTOLOMEU

$$d_1 d_2 = ac + bd$$

se găseşte formula bine cunoscută a ariei unui patrulater inscriptibil în funcţie de laturi.

PROF. ALEXANDRU V. NICULESCU.

16. *Asupra problemei 4505*[1]). Existența triunghiurilor care au laturile și suprafața exprimate în numere întregi, a fost considerată ca o extindere a triunghiurilor dreptunghice care au laturile exprimate în numere întregi. Soluția generală a acestei probleme este conținută în următoarea propoziție:

In orice triunghiu rațional sau întreg, laturile sunt proporționale cu numerele

$$p(q^2+h^2) \quad , \quad q(p^2+h^2) \quad , \quad (p+q)(pq-h^2)$$

unde p, q, h sunt numere întregi pozitive care satisfac inegalitatea

$$pq > h^2.$$

I. B. FLORESCU.

17. *Asupra triunghiurilor* S. Definiția și proprietățile acestor triunghiuri sunt date în *La géométrie du triangle* (216—223) de TR. LALESCU. La acele proprietăți adăugăm pe următoarea:

Laturile unui triunghiu S *au același ortopol față de triunghiul său fundamental* ABC.

Această proprietate este o consecință imediată a celei următoare:

„Dreptele lui SIMSON *ale vârfurilor unui triunghiu* ABC, *relative la un un triunghiu* S *în raport cu el, sunt concurente*", care a fost demonstrată de D-l G-L GH. I. POPESCU în *Gazeta Matematică*, XL pag. 536, sub enunțul:

„La un punct ω *din planul triunghiului* ABC, *luat ca ortopol, corespund trei drepte* A".

Dându-se un triunghiu ABC înscris în cercul O și o dreaptă Δ al cărei ortopol este ω, pentru a construi pe celelalte drepte Δ_i, construim triunghiul S care are una din laturi pe Δ.

Metoda aceasta este dată și în lucrarea *La Géométrie du triangle* citată, la pag. 216.

P. P. DRĂGHICESCU.

18. *Notă relativ la o iperbolă din triunghiu.* In triunghiul ABC să însemnăm cu K_a piciorul simedianei din A, cu B_a, C_a

---

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XLIII, pag. 213.

intersecțiile mediatoarei pe BC cu AC, AB, iar cu B'_a, C'_a picioarele antiparalelelor la BC din B și C.

Iperbola studiată în *G. M., XLV*, pag. 571 admite ca tangente în B, C cevienele BB'_a, CC'_a și este transformata isogonală a mediatoarei pe BC. Rezultă că:

a) BB_a și BB'_a; CC_a și CC'_a sunt respectiv isogonale.

Deasemenea tangentele în vârfuri la această iperbolă trebue să întâlnească laturile opuse în puncte colineare și deci:

b) K_a, B'_a, C'_a sunt colineare.

Folosind acum relația dată de colinearitatea K_a, B'_a, C'_a și cea dată de paralelismul $BB'_a \parallel CC'_a$, precum și:

$$\frac{K_a B}{K_a C} = \frac{c^2}{b^2},$$

obținem:

$$c) \quad \begin{cases} \dfrac{B'_a A}{B'_a C} = \dfrac{c^2}{b^2 - c^2}, \dfrac{C'_a A}{C'_a B} = \dfrac{b^2}{b^2 - c^2} \quad (B > C) \\ \text{și în consecință: } \dfrac{B_a A}{B_a C} = \dfrac{C_a A}{C_a B} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2}. \end{cases}$$

Dacă vom însemna cu D_1, D_2 picioarele cevienelor corespunzătoare respectiv punctelor Ω_1 direct și Ω_2 retrograd ale lui BROCARD, întrebuințând relațiile $\dfrac{D_1 B}{D_1 C} = \dfrac{a^2}{b^2}$, $\dfrac{D_2 B}{D_2 C} = \dfrac{c^2}{a^2}$ date în G. M., XLIV, pag. 226 și ținând seama și de relațiile de mai sus, putem deduce următoarele colinearități:

$$d) \quad \begin{cases} D_1, \text{ isotomicul lui } B_a, C'_a; \\ D_2, \text{ isotomicul lui } C_a, B'_a. \end{cases}$$

e) Să remarcăm în fine definiția simedianei în A ca tangenta comună a două cercuri egale tangente în A, care rezultă din cele spuse la pag. 573, G. M., XLV.

IULIAN PETRESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI

EXAMENUL DE MATEMATICI GENERALE

Sesiunea Octomvrie 1941

I.

1°. Să se găsească prin cuadraturi integrala generală a ecuației diferențiale

(1) $$y'y'' = kx(1 + y'^2)^2 \qquad k = \text{const.} \neq 0.$$

Să se aleagă apoi astfel prima constantă de integrare încât integrala indefinită de care depinde soluția lui (1) să rezulte în termeni finiți.

Să se arate că există numai două valori ale primei constante de integrare, pentru care integrala abeliană de care depinde soluția, în general asociată unei curbe algebrice de genul 1, să fie asociată unei curbe de gen zero.

2°. Să se găsească curbele pentru care segmentul N de normală, mărginit între punctul curent și axa $x = 0$ este legat de raza de curbură prin relația

$$NR = k.$$

3°. Să se găsească curbele pentru care segmentul T de tangentă mărginit între punctul de contact și axa $x = 0$ este legat de lungimea s a arcului, socotit dela o anume origine, de relația

(2) $$T = \sqrt{k} \operatorname{tg} \frac{s}{\sqrt{k}} \qquad k > 0$$

(3) $$T = \sqrt{-k} \operatorname{tg} \frac{s}{\sqrt{-k}} \qquad k < 0.$$

Să se demonstreze că cercul și tractricea intră printre curbele (2) și (3), alegând la rigoare originea arcelor la ∞, pe curba deschisă din (3).

II.

1°. Se dă în coordonate carteziene ortogonale, curba

(4) $$y = f(x)$$

unde

(4') $$f(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{x^2 - 1 - C}{x^2 + C}}\, dx$$

$$C > 0 \quad , \quad |x| < 1 + C.$$

Să se găsească elementul de arc al suprafeței de revoluție născută din rotirea curbei (4), în spațiu, în jurul axei $x = 0$, din plan. Se va lua drept coordonate curbilinii paralelii $x = \text{const.}$ și meridianele $\omega = \text{const.}$ (ω, unghiul de rotire).

2°. Să se arate că, făcând următoarea schimbare de coordonate curbilinii pe suprafață

$$\omega = \frac{1}{2\sqrt{C}} L\,(X^2 + Y^2) \quad , \quad x = \sqrt{C} \cdot \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Y}$$

se stabilește între suprafață și o parte din planul geometriei iperbolice o corespondență isometrică (adică cu păstrarea lungimii curbelor).

3°. Să se evalueze aria patrulaterului curbilinii mărginit pe suprafață de curbele opuse

$$\omega = u_1 \quad , \quad \omega = u_2$$

$$\frac{x e^2 \sqrt{C\omega}}{\sqrt{C - x^2}} = v_1 \quad , \quad \frac{x e^2 \sqrt{C\omega}}{\sqrt{C - x^2}} = v_2 \tag{5}$$

fie direct, fie folosind proprietatea 2° și formula lui GAUSS (în acest din urmă caz se vor calcula, în prealabil, unghiurile interioare de tăiere ale curbelor care definesc patrulaterul (5)).

TEORIA FUNCȚIUNILOR

I.

1°. Fie a, b două constante reale, fiecare în parte mai mare ca -1 și a căror sumă e un număr întreg n. Fie u, v alte două numere reale așa încât $u < v$. Să se calculeze integrala definită reală

$$I = \int_u^v (x - u)^a\,(v - x)^b\,dx.$$

Să se găsească efectiv valoarea lui I pentru $a = \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$, $n = 1$.

2°. Prelungirea analitică prin simetrie. (Principiul lui SCHWARZ).

II.

1°. Se consideră funcțiunea regulată (de variabilă complexă)

$$f(z) = X\,(x, y) + i\;\; Y\,(x, y)$$

caracterizată prin condiția $Y > 0$ pentru $y > 0$. Să se arate că avem pentru toți z cu $y > 0$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{Y}{y}.$$

Să se arate, mai mult, că dacă dealungul unui singur arc de cerc ortogonal lui $y = 0$, așezat în semiplanul $y > 0$, avem

$$|f'(z)| = \frac{Y}{y}$$

atunci

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad , \quad ad - bc \neq 0$$

unde a, b, c, d sunt numere reale.

(Se va aplica lemma lui SCHWARZ în formularea ei invariantă, pentru cazul când cercul absolut se înlocueşte cu axa reală şi când punctele din lemma lui SCHWARZ sunt infinit vecine).

2°. Suprafeţele de acoperire ale unei suprafeţe RIEMANN. Cazul suprafeţelor de acoperire regulate şi al suprafeţei universale de acoperire. Teorema de monodromie.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Anul XIV. Nr. 12. August 1941. Buenos Aires 1941. Incheierea Indicelui general al articolelor publicate pe timpul primelor 5000 de zile ale *Buletinului Matematic* dela 1 Ianuarie 1928 la 8 Septemvrie 1941.

Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences. Tome 42 (2) 1940. Bucureşti 1941.

Sur les cônes quadratiques osculateurs d'une courbe gauche, par E. ARGHIRIADE. Sur le problème de la dérivée oblique de POINCARÉ et sa connexion avec le problème de HILBERT, par C. JACOB. Sur la déformation projective des quadruples stratifiables, par AL. PANTAZI. Sur l'équivalence en Géométrie, par G. VRÂNCEANU.

Buletin de la section scientifique. Tome XXIV, Nr. 1. 1941.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Nr. 9. Timişoara 1941. O proprietate interesantă a poligoanelor regulate de un număr impar de laturi, de O. ŢINO.

Pozitiva. Anul II. Nr. 2. Octomvrie 1941. Bucureşti. Studiu asupra unei conice, de GH. D. SIMIONESCU. O extindere a unor proprietăţi caracteristice a lănţişorului, de R. BĂDESCU şi D. RIPIANU.

CAÏUS JACOB. Sur le problème de la dérivée oblique de POINCARÉ et sa connexion avec le problème de HILBERT. (Extras din Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences). Bucureşti 1941.

CAÏUS JACOB. Memoriu de titluri şi lucrări. Bucureşti 1941.

MIHAIL ST. BOTEZ. L'expression analytique de la perspective Newtoniénne des polygones. 1941.

CERERI

306. Pe la 1829 era profesor de matematică la Iaşi EMANUEL HALUNGA. Ce se ştie despre el?

I. I.

DIVERSE

Şedinţe

Societatea Română de Matematici a ţinut şedinţe în 3.XI şi 1.XII cu următoarele comunicări:

O. ONICESCU şi GH. MIHOC. Asupra unui caz de excepţie în teoria lanţurilor lui MARKOFF.

T. POPOVICIU. Asupra unei teoreme a lui CAUCHY despre seriile cu termeni pozitivi şi necrescători.

GR. MOISIL. Ideea de limită în analiza generală. I.

N. TEODORESCU. Geometria ecuaţiei undelor. IV.

Şedinţa din 17 Noemvrie a fost închinată comemorării lui HENRY LEBESGUE. Au vorbit D-nii: N. TEODORESCU, D. POMPEIU, S. STOILOV.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1690. *Se dau două plane* P *şi* Q *care se taie după o dreaptă* Δ. *În jurul unui punct de pe dreapta* Δ *se roteşte un unghiu drept* XOY *care are laturile sale* OX *şi* OY *respectiv în planele* P *şi* Q. *Se cere să se găsească conul descris de perpendiculara* OZ *ridicată în* O *pe planul* XOY.

A. PETRESCU-PIETRARU.

Soluţie dată de D-l G. G. CONSTANTINESCU.

Luăm dreapta Δ ca axă Oz, O ca origină şi planele bisectoare ale planelor P şi Q drept plane xOz şi yOz. Ecuaţiile planelor date vor fi de forma

$$P \equiv y - mx = 0 \quad , \quad Q \equiv y + mx = 0.$$

Dacă notăm cu

$$R \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

planul unghiului XOY, atunci dreapta al cărei loc geometric îl căutăm, este

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

α, β, γ sunt trei parametri legați printr'o condiție ce se capătă scriind că dreptele de intersecție ale planelor (P, R) și (Q, R) sunt perpendiculare. Cum parametri directori ai acestor două drepte sunt

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = -\gamma\,, \quad \begin{vmatrix} 0 & m \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = -m\gamma\,, \quad \begin{vmatrix} m & -1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = m\beta + \alpha\,;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma\,, \quad \begin{vmatrix} 0 & m \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = -m\gamma\,, \quad \begin{vmatrix} m & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = m\beta - \alpha\,;$$

condiția căutată este

$$(1 + m^2)\gamma^2 + m^2\beta^2 - \alpha^2 = 0,$$

și deci ecuația conului căutat,

$$m^2(z^2 + y^2) = x^2 - z^2.$$

GH. TH. GH.

PROLEMA 2461. *Să se demonstreze identitatea*

$$\sin(a' + b')\cos(a - b) - \sin(a + b)\cos(a' - b')$$
$$= \cos(b + b')\sin(a' - a) + \cos(a + a')\sin(b' - b).$$

G. ȚIȚEICA.

I. *Soluție* dată de D-l MIRCEA ADAM (Constanța).

Dacă considerăm desvoltările

$$\sin(\alpha \pm \beta) = (\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta)\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = (1 \mp \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta)\cos\alpha\cos\beta,$$

și punem pentru simplificarea scrisului

$$\mathrm{tg}a = m\,, \quad \mathrm{tg}a' = m'\,, \quad \mathrm{tg}b = n\,, \quad \mathrm{tg}b' = n',$$

atunci identitatea din enunț se traduce prin identitatea algebrică

$$(m' + n')(1 + mn) - (m + n)(1 + m'n')$$
$$= (1 - nn')(m' - m) + (1 - mm')(n' - n),$$

care se verifică imediat prin calcule elementare.

II. *Soluție* dată de D-l GH. M. CĂLIN (Caracal).
Ținând seamă de formulele clasice

$$2\sin p \cos q = \sin(p+q) + \sin(a-b) \qquad (1)$$

membrul întâi înmulțit cu 2 devine

$$\sin(a'+b'+a-b) + \sin(a'+b'-a+b) -$$
$$\sin(a+b+a'-b') - \sin(a+b-a'+b')$$

sau regrupând termenii avem, în virtutea aceleiași formule (1)

$$\sin(a'+b'+a-b) - \sin(a+b+a'-b') = 2\cos(a+a')\sin(b'-b)$$
$$\sin(a'+b'-a+b) - \sin(a+b-a'+b') = 2\cos(b+b')\sin(a'-a).$$

Adunând găsim tocmai dublul membrului al doilea al egalității din enunț.

Observare. D-l ADAM face observarea că identitatea, așa cum a fost propusă, la pag. 32, Vol. XXII, nu poate avea loc decât în ipoteza

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin\left(a-b-\frac{1}{4}\pi\right)} = \frac{\sin(a'+b')}{\sin\left(a'-b'-\frac{1}{4}\pi\right)}.$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 2575. *Fie* A′, B′, C′ *simetricele ortocentrului unui triunghiu față de laturile* BC, CA, AB. *Dreapta* A′B′ *taie pe* CA *și* CB *în* b *și* a′; *dreapta* B′C′ *tae pe* AB *și* AC *în* c *și* b′; *dreapta* A′C′ *taie pe* BA *și* BC *în* a *și* c′. *Să se demonstreze că atunci când* a, b, c *sunt picioarele a trei ceviene și* a′, b′, c′ *sunt picioarele a trei ceviene.*

GH. RIZESCU.

Soluție trigonometrică dată de D-l MIRCEA A. NEGREA (Brăila). Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor. Se știe că A′, B′, C′ sunt pe cercul circumscris triunghiului și că A_1, B_1, C_1 sunt la mijlocul segmentelor HA′, HB′, HC′. Triunghiul $aA'a'$ este isoscel deoarece înălțimea $A'A_1$ este și bisectoare, căci

$$\widehat{AA'C'} = \widehat{ACC'} = 90 - A \quad , \quad \widehat{AA'B'} = \widehat{ABB'} = 90 - A.$$

Rezultă că $aA_1 = A_1a'$ şi folosind nişte formule trigonometrice cunoscute

$$aA_1 = a'A_1 = HA_1 \operatorname{tg} \widehat{aHA_1} = 2R \cos B \cos C \operatorname{tg}(90 - A) =$$
$$= 2R \cos B \cos C \operatorname{cotg} A.$$

Mai departe avem

$$Ba = BA_1 - aA_1 = c \cos B - 2R \cos B \cos C \operatorname{cotg} A = 2R \cos^2 B \operatorname{cosec} A$$
$$Ca = CA_1 + aA_1 = b \cos C + 2R \cos B \cos C \operatorname{cotg} A =$$
$$= 2R \cos C \cos(A - B) \operatorname{cosec} A$$

şi analoagele. Cu ajutorul acestor formule avem

$$\frac{\overline{Ba}}{\overline{Ca}} \cdot \frac{\overline{Cb}}{\overline{Ab}} \cdot \frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}} = \frac{\cos A \cos B \cos C}{\cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A)},$$

$$\frac{\overline{Ca'}}{\overline{Ba'}} \cdot \frac{\overline{Ab'}}{\overline{Cb'}} \cdot \frac{\overline{Bc'}}{\overline{Ac'}} = \frac{\cos A \cos B \cos C}{\cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A)},$$

formule care în baza teoremei lui CEVA, justifică enunţul problemei.

N. R. Vom publica cu plăcere, sub formă de notă, o soluţie geometrică a acestei probleme. Acea soluţie trebue să aibă la bază demonstrarea că punctele a, b, c, a', b', c' sunt pe o conică.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4890. *Să se arate că proprietatea unei curbe, de a avea constant raportul ariilor triunghiurilor formate de trei tangente oarecare şi de punctele de contact ale acestora, caracterizează parabola (în câmpul curbelor analitice).*

Să se dea o caracterizare analoagă curbelor raţionale normale, osculatoare spaţiului dela infinit, cu un număr oarecare de dimensiuni [1]).

D. BARBILIAN.

Soluţia. I. Inainte de a reproduce soluţia D-lui E. ARGHIRIADE (primită încă de acum trei ani, ne anunţată însă întrucât venea din partea unui veritabil matematician şi nu din cercurile cărora

1) Reciproca teoremei elementare propusă la examenul de bacalaureat din Sibiu, Iunie 1937.

se adresa problema) vreau să indic o metodă mult mai elementară, care are avantajul de a libera demonstrația de ipoteza complectei analiticități a curbei. E de ajuns a presupune derivabilitatea coordonatelor curbei numai până la ordinul implicat în mod natural de problemă (ordinul $n-1$ pentru spațiul cu n dimensiuni, pentru ultimele derivate cerându-se, în plus, continuitatea).

Vom stabili rezultatul în două etape, demonstrând mai întâiu teorema directă și apoi reciproca ei.

Teoremă directă. *Dacă Γ^n e o curbă rațională normală a spațiului afin S_n, complect osculatoare spațiului S_{n-1} dela infinit al acestuia, atunci conținuturile*[1]) *celor două politope înscrise și circumscrise în punctele variabile $A_0 A_1, \ldots A_n$ la Γ^n stau într'un raport constant, finit și diferit de zero.*

Intr'adevăr, alegând în mod potrivit sistemul de coordonate afine din S_n, ecuațiile parametrice ale unei Γ^n complect osculatoare spațiului S_{n-1} dela infinit pot fi aduse la forma canonică

$$(1) \qquad x_i = \lambda^i, \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

unde λ e un parametru variabil. Se verifică într'adevăr că Γ^n întâlnește spațiul dela infinit în n puncte adunate în $\lambda = \infty$.

Dacă însemnăm cu

$$y_0 + y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots y_n x_n = 0$$

ecuația unui S_{n-1} general, spațiile S_{n-1} complect osculatoare la Γ^n au coeficienții

$$(2) \qquad y_i = (-1)^n C_n^i \lambda^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots n.$$

Formulele care dau conținuturile V respectiv v a două politope determinate de $n+1$ puncte $x^{(i)}$ respectiv de $n+1$ iperspații $y^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots n)$ sunt

$$(3) \qquad V = k \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(i)} & x_2^{(i)} \ldots x_n^{(i)} \end{vmatrix},$$

$$(4) \qquad v = k \frac{\begin{vmatrix} y_0^{(i)} & y_1^{(i)} & y_2^{(i)} \ldots y_n^{(i)} \end{vmatrix}^n}{Y_0 \quad Y_1 \quad Y_2 \ldots Y_n}, \qquad i = 0, 1, \ldots n,$$

unde k e o constantă caracteristică sistemului de coordonate afine iar Y_i e minorul lui $y_0^{(i)}$ în determinantul dela numărătorul de ordinul $n+1$

$$\begin{vmatrix} y_0^{(i)} & y_1^{(i)} \ldots y_n^{(i)} \end{vmatrix},$$

luată fără alternarea semnului.

1) Adică: suprafață, volum, ipervolum, după numărul de dimensiuni.

Să aplicăm aceste formule la politopele determinate de $n+1$ puncte (1) și $n+1$ spații (2) corespunzătoare valorilor

(5) $$\lambda = \lambda_i, \qquad i = 0, 1, \ldots n.$$

Avem

(3′) $$V = k\Delta,$$

(4′) $$v = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} k}{C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1}} \cdot \frac{\Delta^n}{\Delta_0 \Delta_1 \ldots \Delta_n},$$

după un calcul în care singura parte mai anevoioasă e precizarea semnului. Aici Δ înseamnă determinantul lui VANDERMONDE relativ la numerele (5) în ordinea indicilor; iar Δ_i, determinantul lui VANDERMONDE relativ la același șir, luat în aceeași ordine, din care suprimăm însă numărul λ_i.

Dar, în virtutea relației evidente

$$\Delta_i = \frac{(-1)^i \Delta}{(\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_1 - \lambda_i) \ldots (\lambda_n - \lambda_i)}$$

rezultă

$$\Delta_0 \Delta_1 \ldots \Delta_n = \Delta^{n-1}$$

încât (3′) și (4′) dau

(6) $$V : v = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1}.$$

Teorema directă e demonstrată.

Teoremă reciprocă. *Curbele normale*[1]) Γ *dintr'un* S_n *afin, pentru care raportul* $V : v$ *al politopelor înscrise și circumscrise în* $n+1$ *puncte variabile* $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ *e o constantă finită și diferită de zero, curbele raționale normale complect osculatoare spațiului* S_{n-1} *dela infinit.*

Putem găsi pe curba normală Γ un sistem destul de general de puncte $B_0, B_1, \ldots B_{n+1}$ așa încât spațiile $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{n-1}$ cu $n-1$ dimensiuni complect osculatoare acolo să formeze grupe de câte $n+1$ linear independente: altfel, spațiul S_{n-1} curent osculator la Γ ar trece print'un punct fix, printr'o dreaptă fixă sau, mai general printr'un S_m, $m < n-1$ fix, și s'ar reduce din punct de vedere tangențial la acel S_m.

1) O curbă Γ e o curbă normală a spațiului linear S_n când nu e cuprinsă într'un S_m, $m < n$.

Considerând o primă grupă $B_0, B_1, \ldots B_n$ de $n+1$ astfel de puncte, complectând n din ele cu punctul curent x şi calculând volumele V şi v din (1) şi (2) ale politopelor astfel formate, avem, după eliminarea constantei k:

$$b_0^0 + (b^0 x) = \frac{V}{v} \cdot \frac{(\beta^0 y)^n}{(\beta^{01} y)(\beta^{12} y)\ldots(\beta^{0n} y)}$$

$$b_0^1 + (b^1 x) = \frac{V}{v} \cdot \frac{(\beta^1 y)^n}{(\beta^{10} y)(\beta^{12} y)\ldots(\beta^{1n} y)}$$

$$\vdots$$

$$b_0^n + (b^n x) = \frac{V}{v} \cdot \frac{(\beta^n y)^n}{(\beta^{n0} y)(\beta^{n1} y)\ldots(\beta^{n\,n-1} y)}$$

unde b^i este spaţiul S_{n-1} determinat de punctele $B_0, B_1, \ldots B_n$, mai puţin Bi; β^i analog punctul de întretăiere al spaţiilor $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$, din care s'a suprimat βi; însfârşit β^{ij} e punctul dela infinit al dreptei comune spaţiilor $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ din care s'au suprimat β_i şi β_j.

Dacă însemnăm cu $M_{n+1}^0, M_{n+1}^1, \ldots M_{n+1}^n$ minorii, cu semnul lor, ai elementelor b_0^i din determinantul

$$M_{n+1} = \left| b_0^{(i)} b_1^{(i)} \ldots b_n^{(i)} \right|$$

obţinem din (7)

$$\mu M_{n+1} = \frac{M_{n+1}^i (\beta^i y)^n}{(\beta^{i0} y)(\beta^{i1} y)\ldots(\beta^{in} y)} \tag{8}$$

unde μ înseamnă constanta din enunţ

$$\frac{v}{V} = \mu$$

iar în membrul al doilea avem notaţia lui EINSTEIN a sumei.

Avem în (8) ecuaţia unei varietăţi algebrice F_{n+1} la care curba Γ e înscrisă, cu desfăşurata spaţiilor ei osculatoare S_n.

Extrăgând din punctele $B_0, B_1, \ldots B_n, B_{n+1}$ alte grupe de $n+1$ puncte izbutim să formăm ecuaţiile, analoage cu (8) a altor varietăţi algebrice $F_0, F_1, \ldots F_n$, faţă de care Γ au aceeaşi proprietate.

Să considerăm acum câteva cazuri particulare:

Cazul $n = 2$. Varietăţile F_0, F_1, F_2, F_3, sunt în acest caz curbe plane, definite tangenţial. Deci curba Γ, dacă există trebue să coincidă cu fiecare din ele. Aşadar Γ e o curbă algebrică.

Cazul $n = 3$. Se poate arăta că fiecare din varietăţile tangenţiale, cu două dimensiuni, $F_0, \ldots F_4$ din acest caz sunt ireductibile câtă vreme numerele M_j^i, din (8) şi analoagele lui, sunt diferite de zero. Această împrejurare însă e implicit realizată întrucât pe curba normală Γ punctele (B) au fost luate în poziţii „destul de generale". Pe de altă parte, varietăţile sunt, *două câte două*, diferite între ele. De exemplu F_0 conţine dreapta $(\beta^1 y) = 0$, $(\beta^{10} y) = 0$, pe când F_1 nu o conţine.

Conchidem dar că varietăţile bidimensionale, ireductibile şi diferite, două câte două, (F) nu pot avea decât cel mult o varietate unidimensională în comun. O parte din această varietate e curba căutată Γ, care e aşa dar algebrică.

Cazul general $n > 3$. Fără multă greutate, dar cu unele lungimi, se arată că varietăţile cu $n - 1$ dimensiuni (F) nu pot avea o varietate bidimensională în comun, ţinând seamă de felul cum au fost alese punctele (B) şi spaţiile (β). Las în seama corespondenţilor *Gazetei*, pentru vreo viitoare reluare a problemei, detaliul demonstraţiei.

Deci (F) au cel mult o varietate unidimensională în comun, din care face parte curba Γ, considerată tangenţial. Deci Γ e algebrică.

Algebrismul lui Γ e hotărîtor pentru demonstraţie.

Ordinul lui Γ nu poate fi mai mic ca n, altfel curba, cum se ştie, n'ar fi normală în spaţiul S_n.

Ordinul lui Γ nu poate fi nici mai mare ca n. Altfel am avea $n+1$ puncte destul de generale A_0, A_1, $A_2, \ldots A_{n-1}$, A_n cuprinse în acelaşi S_{n-1}. Fie α_0, $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$, α_n spaţiile osculatoare la Γ. Putem totdeauna dispune de punctele arbitrare $A_0, \ldots A_{n-1}$ aşa încât în cele $n+1$ spaţii α_0, $\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$, să nu fie n paralele. In caz contrar spaţiul osculator curent al curbei normale Γ ar trece printr'un punct fix la infinit, ceeace am văzut că nu se poate. Din (3) şi (4) calculate pentru A_0, $A_1, \ldots A_{n-1}$ şi un punct variabil A, avem

$$(9) \qquad \frac{V}{v} = \frac{\left| 1\, x_1^{(i)} \ldots x_n^{(i)} \right| \cdot Y_0 Y_1 \ldots Y_n}{\left| y_0^{(i)} y_1^{(i)} \ldots y_n^{(i)} \right|^n}.$$

Din cele spuse rezultă că pentru $A \equiv A_{n-1}$ determinantul

$$\left| 1\, x_1^{(i)} \ldots x_n^{(i)} \right|$$

are un zero simplu, iar formaţiunile Y_0, $Y_1, \ldots Y_n$ nu se anulează.

Fie S ordinul locului $A \equiv A_{n-1}$ $(S \geqslant O)$. Rezultă că locul are pentru funcţiunea analitică $\frac{V}{v}$ ordinul de multiplicitate

$$1 - S_n$$

şi cum $n \geqslant 2$, locul e sau zero, sau un pol.

Cum $\frac{V}{v}$ trebue să fie o constantă finită şi diferită de zero, ipoteza cade. Urmează aşa dar că Γ e algebrică şi neapărat de ordinul n. Curbele algebrice şi de ordinul n din S_n sunt curbele raţionale normale ale spaţiului.

Pe de altă parte Γ trebue să fie complect osculatoare spaţiului dela infinit. Intr'adevăr, în ipoteza contrară ar exista un punct la infinit prin care ar trece n spaţii $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ cu puncte de contact $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ la distanţă finită. Dacă A_n e un punct general, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ nu sunt concurente, pe când $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ sunt paralele. Se vede din (9) că $\frac{V}{v}$ e numai decât nul, valoare exclusă.

Condiţile necesare: Γ = raţională normală, Γ = complect osculatoare spaţiului dela infinit, sunt şi suficiente, după cum am dovedit în teorema directă.

Reproducem la soluţia II demonstraţia desăvârşită a D-lui EM. ARGHIRIADE, în ipoteza analiticităţii curbei.

Soluţia II. O curbă raţională normală, într'un spaţiu linear cu n dimensiuni, osculatoare spaţiului dela infinit, este o curbă ale cărei coordonate ne-omogene, au valorile:

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}\, t + a_{i2}\, t^2 + \ldots + a_{in}\, t^n$$

$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Fie V hipervolumul $(n+1)$-edrului format de $(n+1)$ puncte oarecare $M_0, M_1, \ldots M_n$ luate pe o astfel de curbă şi V_1 hipervolumul $(n+1)$-edrului format de hiperplanele osculatoare la curbă în punctele precedente, având:

$$V = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ x_1^0 & x_1^1 \quad x_1^n \\ x_n^0 & x_n^1 \quad x_n^n \end{vmatrix}$$

unde $(x_1^i, x_2^i, \ldots x_n^i)$ reprezintă coordonatele punctului M_i. Se știe că pentru o curbă rațională, normală, osculatoare spațiului dela infinit, raportul $V : V_1$ este constant și se cere să se arate că raportul constant $V : V_1$ caracterizează aceste curbe. Vom demonstra aceasta pentru un spațiu cu 2 și 3 dimensiuni, adică pentru parabolă și parabola cubică, demonstrația pentru un spațiu cu n dimensiuni fiind analoagă cu aceea dată pentru un spațiu cu 3 dimensiuni.

Fie x_1, x_2, x_3 coordonatele unui punct x al unei curbe Γ, dintr'un spațiu cu 3 dimensiuni; aceste coordonate formează un *sistem fundamental* de soluțiuni ale ecuațiunei lui WILCZYNSKI:

$$x^{IV} = f_3 x''' + f_2 x'' + f_1 x'$$

având după formula lui LIOUVILLE:

$$f_3 = \frac{d}{dt} \log W = \frac{d}{dt} \log \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix}$$

luând ca parametru în loc de t, *arcul afin* s, definit de:

$$ds = W^{1/6} . dt$$

avem:

$$W = 1 \quad \text{și} \quad f_3 = 0.$$

Putem pe de altă parte să alegem axele de coordonate în așa fel, ca pentru $s = 0$, punctele x, x', x'', x''' să aibe coordonatele (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Din ecuația lui WILCZYNSKI și din derivatele ei:

$$x^{IV} = f_2 x'' + f_1 x'$$

$$x^{V} = f_2 x''' + (f_1 + f_2') x'' + f_1' x'$$

$$x^{VI} = (f_1 + 2f_2') x''' + (f_2^2 + 2f_1' + f_2'') x'' + (f_1 f_2 + f_1'') x'$$

deducem că pentru $s = 0$, punctele x^{IV}, x^{V}, x^{VI} au coordonatele:

$$(f_1, f_2, 0), (f_1', f_1 + f_2', f_2), (\lambda, \mu, f_1 + 2f_2').$$

Vom avea prin urmare, următoarele desvoltări în serie:

$$x_1 = \frac{s}{1} + \frac{s^4}{24} f_1 + \frac{s^5}{120} f_1' + (6)$$

$$(1) \quad x_2 = \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24} f_2 + \frac{s^5}{120} (f_1 + f_2') + (6)$$

$$x_3 = \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} f_2 + \frac{s^6}{720} (f_1 + 2f_2') + (7)$$

unde (6) însemnează termeni de un grad $\geqslant 6$. Cu ajutorul acestor desvoltări, găsim că volumul tetraedrului format de punctele $x(0)$, $x(s_1)$, $x(s_2)$, $x(s_3)$, va fi:

$$6V = \begin{vmatrix} x_1(s_1) & x_2(s_1) & x_3(s_1) \\ x_1(s_2) & x_2(s_2) & x_3(s_2) \\ x_1(s_3) & x_2(s_3) & x_3(s_3) \end{vmatrix} = \frac{s_1 s_2 s_3 (s_2 - s_3)(s_3 - s_1)(s_1 - s_2)}{12} \left\{ 1 + \right.$$

(2)

$$+ \frac{f_2}{60} (3\Sigma s_1^2 - 2\Sigma s_1 s_2) + \frac{1}{120} [(1 + 2f_2') \Sigma s_1^3 - f_1 \Sigma s_1^2 s_2 +$$

$$\left. + 2(f_1 - f_2') s_1 s_2 s_3] + (4) \right\}$$

în această expresie Σs_1^2, $\Sigma s_1 s_2$, etc., reprezintă funcțiuni simetrice de s_1, s_2, s_3. Cu ajutorul desvoltărilor (1), se găsește că planul osculator în punctul $x(s)$, are ecuația:

$$\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 - \delta = 0$$

$$\gamma = 1 + \frac{s^2}{2} f_2 - \frac{s^3}{6} (f_1 - f_2') + (4)$$

$$\beta = -\frac{s}{1} - \frac{s^3}{6} f_2 + \frac{s^4}{24} (f_1 - 2f_2') + (5)$$

$$\alpha = \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{24} f_2 - \frac{s^5}{120} (f_1 - 3f_2') + (6)$$

$$\delta = \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} f_2 - \frac{s^6}{720} (f_1 - 4f_2') + (7)$$

Volumul V_1 al tetraedrului format de planele osculatoare în punctele $x(0)$, $x(s_1)$, $x(s_2)$, $x(s_3)$ este:

$$6V_1 = \frac{|\alpha_1\beta_2\delta_3|^3}{|\alpha_2\beta_3| \cdot |\alpha_3\beta_1| \cdot |\alpha_1\beta_2| \cdot |\alpha_1\beta_2\gamma_3|}$$

unde $|\alpha_1\beta_2\delta_3|$ reprezintă determinantul având $\alpha_1\beta_2\delta_3$ ca diagonală principală, etc. Cu ajutorul desvoltărilor (1), găsim efectuând calculele:

$$(3)\quad 6V_1 = \frac{s_1s_2s_3(s_2-s_3)(s_3-s_1)(s_1-s_2)}{108}\left\{-1+\frac{f_2}{30}[3\Sigma s_1^2-2\Sigma s_1s_2]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{120}[3(f_1-2f_2')\Sigma s_1^3-(3f_1-2f_2')\Sigma s_1^2s_2+6f_1s_1s_2s_3]+(4)\right\}.$$

Raportul dintre V şi V_1 fiind presupus constant, din relaţia:

$$V + kV_1 \equiv 0$$

găsim anulând coeficienţii diferitelor puteri ale lui s_1, s_2, s_3:

$$k = 9 \quad f_1 = 0 \quad f_2 = 0$$

din ecuaţia lui WILCZYNSKI, rezultă $x_1^{IV} = x_2^{IV} = x_3^{IV} = 0$, prin urmare:

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}s + a_{i2}s^2 + a_{i3}s^3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

curba Γ este deci o parabolă cubică.

Cu ajutorul desvoltărilor (2) şi (3), mai găsim:

$$2V - 9V_1 = \frac{s_1s_2s_3(s_2-s_3)(s_3-s_1)(s_1-s_2)}{24} = (9)$$

deci când s_1, s_2, s_3 sunt infiniţi de acelaşi ordin, expresia precedentă este un infinit mic de ordinul 9.

Să observăm că în cazul curbelor plane, proprietatea în chestiune se poate transforma într'o proprietate cunoscută, caracteristică a parabolei. In adevăr fie M_0, M_n două puncte pe Γ şi $M_1, M_2, \ldots M_{n-1}$ o diviziune oarecare a arcului M_0M_n. Fie A aria cuprinsă între curbă şi coarda M_0M_n; A_1 aria cuprinsă între curbă şi cele două tangente în M_0 şi M_n, iar A' aria triunghiului format de coarda M_0M_n şi de tangentele la extremităţile acestei coarde. Fie deasemenea a_i aria triunghiului $M_0M_{i-1}M_i$ şi α_i aria triunghiului format de tangentele duse în vârfurile acestui triunghiu. Avem prin ipoteză:

$$a_1 = k\alpha_1 \quad a_2 = k\alpha_2 \ldots a_n = k\alpha_n$$

unde k este o constantă. Presupunând $n \to \infty$ şi fiecare din intervalele $M_{i-1}M_i$ tinzând către zero, avem prin însumare:

$$A = kA_1 = \Sigma a_i = k\Sigma\alpha_i$$

de unde:

$$\frac{A}{A'} = \frac{A}{A+A_1} = \frac{k}{1+k}$$

or proprietatea curbei de a avea constant raportul ariilor A şi A', este după cum se ştie, o proprietate caracteristică a parabolei.

D. B.

PROBLEMA 5264. *Dacă notăm cu* $\left| \overset{3}{\underset{M}{\triangle}} \right|_a^b$ *modulul determinantului magic de ordinul trei, format din toate numerele întregi, cuprinse între* a *şi* b *(inclusiv limitele) luate câte o singură dată, avem:*

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left| \overset{3}{\underset{M}{\triangle}} \right|_{9+8k}^{1+8k} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot (n+1)(4n+5).$$

CERCHEZ MIHU.

Soluţie dată de D-l MIHAIL I. TREFILOV (elev-inginer, Politechnica Bucureşti):

$$\overset{3}{\underset{M}{\triangle}} = \begin{vmatrix} 8+8k & 1+8k & 6+8k \\ 3+8k & 5+8k & 7+8k \\ 4+8k & 9+8k & 2+8k \end{vmatrix} = (15+24k) \begin{vmatrix} 1 & 1+8k & 6+8k \\ 1 & 5+8k & 7+8k \\ 1 & 9+8k & 2+8k \end{vmatrix} =$$

$$= (15+24k) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -72(5+8k).$$

Deci: $\left| \overset{3}{\underset{M}{\triangle}} \right| = 72(5+8k).$

Sumând dela 0 la n, avem;

$$\sum_{k=0}^{k=n} \left| \begin{matrix} 3 \\ \triangle \\ M \end{matrix} \right|_{9+8k}^{1+8k} = 72 \sum_{k=0}^{k=n} (5+8k) = 72\,[5+(5+8.1)+(5+8.2)+\ldots$$

$$\ldots+(5+8\,.\,n)] = 72\,[5+5n+8\,(1+2+\ldots+n)] =$$

$$= 72\,[5\,(n+1)+4n\,(n+1)] = 72\,(n+1)\,(5+4n) =$$

$$= 2^3\,.\,3^2\,(n+1)\,(4n+5).$$

Au mai trimis soluţii foarte bune, D-nii: PAUL DRĂGHICESCU, MIRCEA IACOMI (Lic. Militar Iaşi), STELIAN CETĂŢEANU (elev-inginer, Bucureşti), GH. R. PETRESCU (cl. VIII-a, Giurgiu), EMIL MODÂLCĂ (Pol. Bucureşti).

C. MIHU.

PROBLEMA 5348. *Să se găsească un număr ai cărui factori primi sunt 2, 5, 7, iar suma divizorilor este 26505.*

SLT. M. GRUMĂZESCU.

Fie $N = 2^\alpha\,.\,5^\beta\,.\,7^\gamma$, atunci suma divizorilor lui va fi:

$$S(N) = \frac{2^{\alpha+1}-1}{2-1} \cdot \frac{5^{\beta+1}-1}{5-1} \cdot \frac{7^{\gamma+1}-1}{7-1} = 26505 = 3^2\,.\,5\,.\,31\,.\,19.$$

Dar mai putem scrie:

$$(2^{\alpha+1}-1)\,(5^{\beta+1}-1)\,(7^{\gamma+1}-1) = 2^3\,.\,3^3\,.\,5\,.\,19\,.\,31 < 10^7.$$

Va trebui să avem deci:

$$\alpha < 18 \;\; ; \;\; \beta < 7 \;\; \text{şi} \;\; \gamma < 5.$$

In aceste condiţiuni observăm că avem: $7^3 - 1 = 2\,.\,3^2\,.\,19$, deci ne vor rămâne:

$$(2^{\alpha+1}-1)\,(5^{\beta+1}-1) = 2^2\,.\,3\,.\,5\,.\,31 < 10^4.$$

Ceea ce ne dă:

$$\alpha < 11 \;\; \text{şi} \;\; \beta < 6.$$

Incercând pentru diverse valori ale lui β, găsim: $\beta = 2$, deoarece avem: $5^3 - 1 = 2^2\,.\,31$. Prin urmare ne va rămâne:

$$2^{\alpha+1} - 1 = 3\,.\,5 = 15$$

ceea ce ne dă $\alpha = 3$.

Aşa dar soluţia problemei va fi:

$$N = 2^3 . 5^2 . 7^2 = 9800.$$

Notă. S'au primit soluţii bune dela D-şoara LIDIA M. TUDORAN şi dela D-nii: GH. BOGDAN, D. D. BOIANGIU şi P. P. DRĂGHICESCU.

I. L.

PROBLEMA 5374. *Intr'un vas cilindric vertical se află lichid până la înălţimea* l. *Dacă vasul se roteşte, suprafaţa liberă capătă forma unui paraboloid de rotaţie, a cărui înălţime fie* h.

1°. *Vârful paraboloidului se află la înălţimea* $\frac{h}{2}$ *de vechiul nivel.*

2°. *Iuţeala tangenţială periferică a vasului este egală cu iuţeala unui mobil greu căzând liber dela înălţimea* h, *după ce a parcurs această înălţime.*

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

Soluţie dată de D-l EMIL S. MODÂLCĂ, (student-inginer, Bucureşti).

Presupunând lichidul perfect (fără frecări între moleculele lui), asupra unei molecule dela suprafaţă, vor lucra forţele:

— N, normală la suprafaţă, reacţiunea.

— P, greutatea moleculei, verticală.

— Q, forţa centrifugă, orizontală.

Fie xx' axul vasului şi ax de rotaţie; $r'r$ o axă perpendiculară pe ax', trecând prin suprafaţa interioară a fundului vasului.

Suprafaţa lichidului fiind de rotaţie putem considera problema în planul xOr, iar curba ce vom obţine va fi generatoarea suprafeţei.

Proiectând forţele ce lucrează asupra unei molecule punct, pe tangenta în acest punct avem:

$$mg \sin\alpha = Q \cos\alpha.$$

Dar $Q = mr\omega^2$, ω fiind iuţeala unghiulară. Deci:

$$mg \sin\alpha = mr\omega^2 \cos\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{r\omega^2}{g}.$$

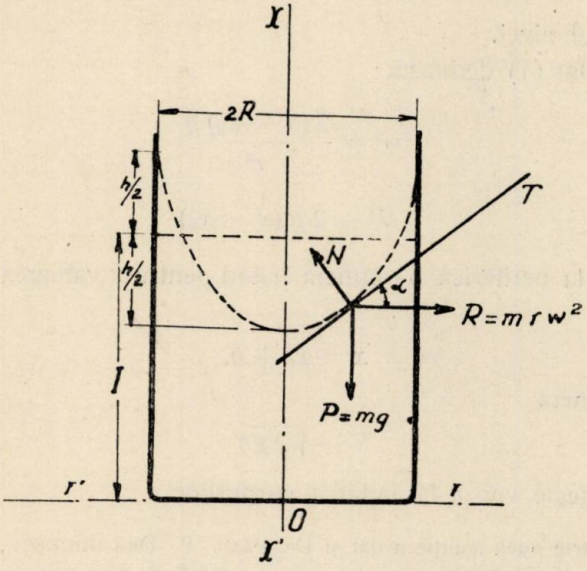
Dar

$$tg\alpha = \frac{dx}{dr} \qquad \frac{dx}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}.$$

Integrând obţinem:

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} r^2 + x_0$$

x_0 fiind o constantă.



Aceasta fiind ecuaţia unei parabole, înseamnă că lichidul capătă o suprafată de forma unui paraboloid.

Făcând în (1) $r = 0$ găsim

$$x = x_0.$$

Deci vârful paraboloidului are coordonatele $(0, x_0)$.

1°. Fie R raza vasului. Volumul lichidului e acelaşi, oricare ar fi suprafaţa lui. In stare de repaus, volumul lichidului e acela al unui cilindru de rază R şi înălţime I. In mişcare, volumul este diferenţa dintre volumul unui cilindru de înălţime $h + x_0$ şi volumul unui paraboloid de înălţime h. Egalând cele două volume avem:

$$\pi R^2 I = \pi R^2 (h + x_0) - \frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

De aci

$$I = \frac{h}{2} + x_0$$

$$x_0 = I - \frac{h}{2}.$$

Ceea ce arată că vârful paraboloidului se află la înălțimea $\frac{h}{2}$ sub vechiul nivel.

2°. Din (1) deducem:

$$\omega^2 = \frac{2(x - x_0)g}{r^2}$$

$$V^2 = 2g(x - x_0).$$

Iuțeala periferică o obținem luând pentru x valoarea maximă, adică

$$x = x_0 + h.$$

Obținem

$$V = \sqrt{2gh}$$

care amintește viteza la căderea corpurilor.

O foarte bună soluție a dat și D-l PAUL P. DRĂGHICESCU, elev Lic. mil. Iași, menționând că punctul 1° constitue o chestiune cunoscută în Hidraulică.

Soluții bune s'au primit și dela D-nii: C. D. EFTIMIE, (Elev-inginer) și C. BAKONYI (Bacalaureat, Timișoara).

Observațiuni. 1°. Deși era știut că suprafața liberă a lichidului ia forma unui paraboloid de rotație, totuși am menținut demonstrația acestui fapt în soluția D-lui MODÂLCĂ, pentru a fi de folos cititorilor gazetei cari n'au tratate de Hidraulică la dispoziție.

2°. Deasemenea este cunoscut că volumul paraboloidului este jumătate din volumul cilindrului circumscris. Următorul calcul invederează aceasta:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} r\,dr \int_{x_0}^{\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 + x_0} dx = \frac{1}{2}\pi R^2 \left(\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}R^2\right) = \frac{1}{2}\pi R^2 h.$$

V. GH.

PROBLEMA 5390. *Să se arate că avem relația*

$$\frac{p^2 - r_a^2}{p^2 + r_a^2} + \frac{p^2 - r_b^2}{p^2 + r_b^2} + \frac{p^2 - r_c^2}{p^2 + r_c^2} = 1 + \frac{r}{R}$$

notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu.

EMILIAN MEREUȚĂ.

Soluție dată de D-nii: BODNĂRESCU M. HORIA (student Șc. Polit. Buc.), BAKONYI C. C. (lic. Timișoara), CETĂȚEANU STELIAN, EFTIMIE D. C. (stud. Buc.), NEGREA A. MIRCEA Brăila, POPESCU FLORIN (lic. Marele Voevod Mihai Buc.), ȘTEFANOVICI MIRCEA (lic. Spiru Haret Buc.), STOIANOVICI ȘERBAN (lic. militar Predeal), STOENESCU D. MIREL (Șc. ofițeri Aviație Buc.) Slt. TILICĂ ȘTEFAN și VIJELIE E. (lic. milit. Predeal).

Folosind relațiile cunoscute:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \quad , \quad r_b = p \operatorname{tg} \frac{B}{2} \quad , \quad r_c = p \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

membrul întâiul al relației noastre, devine succesiv:

$$\sum \frac{p^2 - r_a^2}{p^2 + r_a^2} = \sum \frac{p^2 - p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{p^2 + p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} = \sum \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}$$

$$= \sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}} = \sum \cos A$$

ținând seama că:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

(C. de P. trig. V. CRISTESCU, Vol. II)

atunci:

$$\sum \frac{p^2 - r_a^2}{p^2 + r_a^2} = \sum \cos A = 1 + \frac{r}{R} .$$

Alte soluţii bune date de D-ra TUDORAN M. LYDIA (Şcoala centrală Buc.) şi D-nii: BÂRLEA-SUHĂŢEANU VICTOR (lic. milit. Predeal), CRUCERU C. (lic. Turnu-Severin), ANDONIE IANCU (lic. Sf. Sava Buc.), CHINTESCU MATEI (lic. milit. Predeal), DRĂGHICESCU PAUL (lic. milit. Iaşi), DUMITRESCU CEZAR (lic. milit. Câmpulung), GHEORGHIU OCTAV (student Buc.), GLIGOR IOAN (lic. Arad), IORGULESCU FLORIN (lic. Lazăr Buc.), MIHAIL I. GH. (lic. Turnu Severin), NEGRESCU C. I. (lic. Spiru Haret Buc.), NICULESCU MIRCEA (lic. Titu Maiorescu Buc.), POPESCU GH. M. (lic. Piteşti), RADU VOINEA (lic. Craiova), PANTELIMON C. (Şc. ofiţeri A. C. A.), SBÂRNEA GH. (lic. Tecuci), TREFILOV M. (stud. Buc.), VOICU GH. (Şc. ofiţeri Aviaţie Buc.), VASILIU GH. D. (lic. milit. Timişoara), ZAHARIA GH. (lic. milit. Timişoara), ZAMFIR IOAN (lic. milit. Iaşi).

E. M.

PROBLEMA 5420. *Să se arate că familia de cercuri*

$$x^2 + (y - \lambda)^2 - 4\lambda = 0,$$

unde λ *este un parametru şi familia de drepte*

$$y = \lambda x - (\lambda^2 + 1)$$

admit aceeaşi înfăşurătoare.

2°. *Să se determine pentru care valori ale lui* λ *cercurile îşi ating înfăşurătoarea în puncte reale şi să se arate proprietăţile cercului pentru* λ *având cea mai mică dintre valorile găsite ale lui* λ.

3°. *Ce relaţie există între valoarea* λ_1 *a parametrului unui cerc din familia dată şi valoarea* λ_2 *a parametrului unei drepte din familia de drepte date, tangentă la acest cerc?*

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie. Înfăşurătorile se obţin imediat anulând discriminanţii primelor părţi ale ecuaţiilor date, considerate ca polinoame de gr. II în λ. Se obţine în ambele cazuri înfăşurătoarea

$$y = \frac{x^2}{4} - 1, \qquad (1)$$

care este deci o parabolă având axa Oy ca axă de simetrie.

2°. Scoţând din (1) valoarea lui x^2 şi înlocuind-o în ecuaţia familiei de cercuri, obţinem ecuaţia

$$(y - \lambda)^2 + 4(y - \lambda) + 4 = [y - \lambda + 2]^2 = 0,$$

care dă ordonatele punctelor de contact ale cercurilor cu înfășurătoarea lor. Deoarece punctele *reale* de pe parabolă au toate ordonata mai mare sau egală cu — 1, trebue să avem

$$\lambda - 2 \geqslant -1 \quad , \quad \lambda \geqslant 1.$$

Observăm că figura compusă din cercurile familiei date și înfășurătoarea lor e simetrică față de Oy, fiecare cerc atingând parabola în două puncte simetrice față de Oy. Pentru $\lambda = 1$, cele două puncte de contact se confundă în vârful parabolei, cercul corespunzător fiind cercul osculator în vârful parabolei și având patru puncte comune confundate cu parabola. Contactul dintre cerc și parabolă e de ordinul al treilea. [Atrag atenția asupra unei chestiuni de nomenclatură, care pare a nu fi clară pentru unii corespondenți: dacă două curbe au *două* puncte comune confundate, contactul e de ordinul *întâi*; dacă au n puncte comune confundate contactul e de ord. $n - 1$].

3°. Problema revine la a găsi tangentele comune ale cercului

$$x^2 + (y - \lambda_1)^2 - 4\lambda_1 = 0$$

și parabolei (1).

Cercul și parabola fiind bitangente, singurele tangente comune sunt tangentele în punctele de contact ale celor două curbe, și aceste tangente sunt duble. Fie deci X, Y coordonatele punctului de contact dintre curbe. Tangenta la parabolă în acest punct are ecuația

$$y = \frac{X}{2} x - (Y + 2).$$

Parametrul λ_2 trebue deci să fie dat de relația

$$1 + \lambda_2^2 = Y + 2.$$

Dar ordonata Y a punctului de contact dintre cerc și parabolă ne e cunoscută prin calculul făcut la punctul 2°.

$$Y = \lambda_1 - 2$$

Relația căutată e deci

$$\lambda_1 = 1 + \lambda_2^2.$$

Au dat soluţii corecte şi complete D-nii: BODNĂRESCU HORIA, DRĂGHICESCU PAUL, BARBU FRIEDMAN, MIREL STOENESCU. D-nii: C. BAKONYI, ADRIAN ERMIN DRAGOMIR, C. D. EFTIMIE, EMIL MODÂLCĂ, MIRCEA NEGREA, MIRCEA NICULESCU, CONSTANTIN PANTELIMON, MIRCEA POPA, RADU VOINEA, au dat soluţii corecte dar nu au observat că cercul corespunzând valorii λ—1 e cercul osculator. Soluţia D-lui GHEORGHIU OCTAVIAN e corectă, dar D-sa nu a observat că relaţia între λ_1 şi λ_2 pe care o obţine e un pătrat perfect. D-l RUSU MIRCEA a dat o soluţie bună, afară de ordinul de contact între cercul osculator şi parabolă. D-ra MIOARA CRĂCIUNESCU dă o soluţie care din cauza unor greşeli de calcul, nu e conformă cu rezultatele obţinute de ceilalţi rezolvitori.

G. T.

PROBLEMA 5424. *Două numere consecutive de cinci cifre descompuse în factori primi, au formele:*

$$a^2 . b . 269 \quad \text{şi} \quad c . d . 2663.$$

Care sunt acele numere?

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: A. N. POPA (cl. VIII-a Lic. Militar, Iaşi) şi R. P. VOINEA (bacalaureat, Craiova).

Fie: $A = 269 . a^2 . b$ şi $B = 2663 . c . d$, atunci trebue să avem:

$$A - B = 1 \quad \text{sau} \quad B - A = 1.$$

Numerile fiind de cinci cifre, avem:

$$37 < a^2 . b < 371 \quad \text{şi} \quad 3 < c . d < 38.$$

I) $A - B = 1$. Deducem lesne că:

$$a^2 . b = 9 . c . d + \frac{242 . c . d + 1}{269}.$$

Se constată însă repede că trebue să avem $c . d = 10 = 2 . 5$ ceea ce ne dă $a^2 . b = 99 = 3^2 . 11$ şi deci:

$$A = 26631 \quad \text{şi} \quad B = 26630.$$

II) $B - A = 1$. Deducem de asemenea că:

$$a^2 . b = 9 . c . d + \frac{242 . c . d - 1}{269}.$$

Dar aceasta, în cazul nostru, nu are soluție, căci ar trebui să avem:

$$c \cdot d = 269 \cdot k - 10.$$

ceea ce nu convine.

Observațiuni. 1) Au dat soluții analoage însă incomplecte D-nii: T. A. ȘERBAN și T. TURCULEȚ.

2) Au rezolvat problema complect făcând mai multe încercări D-nii: F. D. CĂRUNTU, P. P. DRĂGHICESCU, C. D. EFTIMIE, D. MUSCELEANU, I. I. PINTILIE, GH. T. PUCHIU, C. BAKONY și GH. SBÂRNEA.

PROBLEMA 5438. *Unul din mijloacele de prezicere a viitorului este cătatul în bobi sau datul în bobi. Pentru aceasta se iau 41 de bobi, se descântă și apoi se împart în trei grupe la întâmplare. Se iau din fiecare grupă bobii 4 câte 4, iar ultimele 4 (sau mai puține) se dau la o parte așezându-se în linie cu cele rămase în același fel dela fiecare grupă.*

Bobii ce nu sunt în această linie se amestecă și se repetă încă de două ori această operație.

Se obțin astfel trei linii cu câte trei grupe de boabe în fiecare grupă fiind cel mult 4 bobi.

Din numărul total de bobi din prima linie depinde în mare parte soarta faptului pentru care se dau bobii (restul liniilor dând numai lămuriri în legătură cu ce dă prima).

Dacă bobii cad pe cinci (adică numărul total în prima linie e 5) este bine, de cad însă pe nouă, nu e bine.

Să se arate că nu există decât aceste două posibilități, adică bobii nu pot cădea decât pe cinci sau pe nouă.

CONST. SĂNDULACHE.

Soluție dată de d-nii: C. D. EFTIMIE (elev-inginer, București), MIRCEA L. RUSU (student, București), TEODOR ȘERBAN (elev-inginer), FLORIN IORGULESCU (lic. „Gh. Lazăr", București), CONST. G. NICOLAU (cl. VIII-a, lic. „Lazăr", București), CONST. STAICU (cl. V-a, lic. mil. Câmpulung), RADU L. HOLEA, LUCILIU C. NICOLAU, MIRCEA V. POPISCĂ (cl. VIII-a, lic. militar Câmpulung), RADU P. VOINEA (cl. VIII-a, lic. „Frații Buzești", Craiova), DORU MUSCELEANU, ION VINICIUS-MUSCELEANU (lic. Calafat), PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. militar Iași).

Fie A, B, C numărul de boabe din grupele pe care le formăm la început. Avem $A+B+C=41=M_4+1$.

Indepărtând bobii 4 câte 4 ne rămân resturile a, b, c, pentru care vom avea evident $a+b+c=M_4+1$.

Insă, conform enunţului, $1\leqslant a, b, c\leqslant 4$ de unde rezultă

$$3<a+b+c<12$$

şi ţinând seama că $(a+b+c)$ trebue să fie M_4+1 nu putem avea decât $a+b+c=5$ sau $a+b+c=9$.

S'au primit soluţii mai lungi dela d-nii: EMIL S. MODÂLCĂ (elev-inginer, Bucureşti), IOAN C. NEGRESCU (cl. VIII-a, lic. „Spiru Haret" Bucureşti), MIHAI M. ANDREESCU (cl. V-a, lic. militar Iaşi), GH. D. SBÂRNEA (cl. VIII-a, lic. Tecuci) şi CEZAR I. CORÂCI (particular, T. Severin).

Observare. 1) D-l MIRCEA RUSU arată că pe linia a doua pot fi 4, 8, 12 bobi şi tot aşa pe linia a treia. Apoi D-sa arată că sunt 5 cazuri distincte posibile, iar din acestea în 3 cazuri bobii vor cădea pe *nouă* şi în 2 cazuri vor cădea pe *cinci*. Apoi adaogă „concluzia practică este că omul să se aştepte mai repede la rău decât la bine".

2) S'au mai primit 10 soluţii dela elevii a două licee militare, dar nu pot fi luate în considerare din cauza asemănărilor evidente!

G. D. S.

PROBLEMA 5442. *Pe o parabolă de parametru* p, *fie* A *un punct fix la distanţa* d *de axă şi* M *variabil, care se proiectează în* N *pe normala din* A *şi în* P *pe paralela din* A *la axă; când* M *descrie parabola, avem*

$$\overline{MP}^2=2\sqrt{a^2+p^2}\cdot\overline{AN}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-ra ANA CHECIAN (studentă, Timişoara) şi D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU, GH. GH. BROŞTEANU, PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iaşi), ADRIAN E. DRAGOMIR (C. N. N. F., Predeal), OCTAVIAN E. GHEORGHIU (student), S-LT GRIGORE MARTEŞ, MIRCEA C. NICULESCU (lic. T. Maiorescu, Bucureşti), CONSTANTIN PANTELIMON (Şcoala Ofiţeri A. C. A., Bucureşti), FLORIN POPESCU, CONSTANTIN ŞERBAN, EUGEN GH. VIJELIE (C. N. N. Filipescu, Predeal).

Luăm ca axe coordonate, axa parabolei şi tangenta în vârf. Fie

$$A\left(\frac{a^2}{2p},\ a\right) \quad \text{şi} \quad M\left(\frac{\lambda^2}{2p},\ \lambda\right)$$

deci

$$\overline{PM} = \lambda - a.$$

Ecuaţia dreptei MN, paralelă cu tangenta în A, este

$$y - \lambda = \frac{p}{a}\left(x - \frac{\lambda^2}{2p}\right)$$

şi distanţa dela A la MN,

$$\overline{AN} = \frac{(a-\lambda)^2}{2\sqrt{a^2+p^2}}$$

deci

$$\overline{PM}^2 = 2\sqrt{a^2+p^2}\,.\,\overline{AN}.$$

Relaţia aceasta generalizează ecuaţia parabolei, pe care o regăsim când A este în vârf.

Observare. Altă soluţie analitică. Fie A originea şi tangenta în A axa Oy; m, panta axei parabolei. Ecuaţia ei este

$$(y - mx)^2 = kx$$

dacă trece şi prin M (u, v), avem

$$(v - mu)^2 = ku \quad \therefore \quad \frac{(v-mu)^2}{u} = k \text{ (constant)}$$

care este sub altă formă, relaţia din enunţ. Valoarea constantei o aflăm de exemplu, ducând pe M în vârf.

PROBLEMA 5483. *Să se găsească bazele* x *şi* y *ale sistemelor de numeraţie pentru care avem egalitatea:*

$$1700 \text{ } \textit{în baza } x = 900 \text{ } \textit{în baza } y.$$

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-nii: C. BAKONYI (lic. Loga, Timişoara); C. D. EFTIMIE (elev-inginer, Bucureşti); G. BOGDAN, GH. GH. BROŞTEANU, GH. BUCUR, FL. CĂRUNTU, P. P. DRĂGHICESCU, C. MILEA, AUREL POPA, GH. PUCHIU (dela liceul militar, Iaşi).

Chestiunea revine la a rezolva în întregi ecuația

$$(1) \qquad x^3 + 7x^2 = 9y^2$$

cu condițiile: $x > 7$ și $y > 9$.

Punând $3y = z$ avem succesiv:

$$x^3 + 7x^2 = z^2$$

$$x^2(x + 7) = z^2$$

ceea ce atrage că z^2 se divide prin x^2, adică $z = xu$ și deci

$$x = u^2 - 7$$

$$z = (u^2 - 7)u.$$

In definitiv, u fiind un întreg oarecare, numerele

$$(2) \qquad x = u^2 - 7 \quad y = \frac{u(u^2 - 7)}{3}$$

verifică ecuația (1). y e întreg pentru orice valoare întreagă a lui u, căci dacă $u = \text{Mult}\,3$, primul factor se împarte cu 3, iar dacă $u = \text{Mult}\,3 \pm 1$, avem $u^2 = \text{Mult}\,3 + 1$ și deci $u^2 - 7 = \text{Mult}\,3$.

Ținând seama de faptul că x trebue să fie mai mare ca 7, urmează că u poate lua orice valoare întreagă mai mare ca 3. Avem *o infinitate de soluții* date de relațiile (2). In particular:

Pentru $u = 4$ avem $x = 9$, $y = 12$ și deci $1700_9 = 900_{12}$

Pentru $u = 5$ avem $x = 18$, $y = 30$ și deci $1700_{18} = 900_{30}$

Pentru $u = 6$ avem $x = 29$, $y = 58$ și deci $1700_{29} = 900_{58}$

Pentru $u = 7$ avem $x = 42$, $y = 98$ și deci $1700_{42} = 900_{98}$

. . . . . .

PROBLEMA 5499. *Diferența de vârstă între doi frați în viață este 18 ani. Știind că anii lor de naștere reprezintă numere scrise cu aceleași cifre, suma cifrelor fiind cât mai mare, când s'au născut cei doi frați?*

COMANDOR I. LINTEȘ.

Soluție dată de D-nii C. ANDREI (student Politechnica București), C. BAKONYI (bacalaureat-Timișoara), C. GH. CRUCERU (bacalaureat T.-Severin) și R. P. VOINEA (cl. VIII Lc. Frații Buzești).

Fraţii fiind în viaţă şi admiţând un maximum de 100 ani viaţa unui om, urmează că ei pot fi născuţi în secolul XIX sau XX.

Dar suma cifrelor anilor lor de naştere, cari reprezintă numere scrise cu aceleaşi cifre, fiind cât mai mare, urmează că cei doi fraţi sunt născuţi către finele secolului XIX, deoarece vom avea o sumă a cifrelor mare. Aşa dar eliminăm dela început ipotezele că cei doi fraţi ar fi născuţi în secolul XX, care ar reprezenta numere a căror sumă maximă nu ar depăşi 22 pentru 1939; precum şi ipoteza că unul s'ar fi născut în secolul XIX şi altul în secolul XX, căci în acest caz suma cifrelor ar fi şi mai mică.

In consecinţă vom avea anii de naştere scrişi numai sub forma:

$$18x9 \quad \text{şi} \quad 189x$$

unde $x < 9$.

Dar diferenţa lor fiind 18, înseamnă că avem:

$$189x - 18x9 = 81 - 9.x = 18$$

de unde obţinem $x = 7$, adică anii de naştere ai celor doi fraţi

$$1879 \quad \text{şi} \quad 1897.$$

Notă. 1°. Dacă în enunţ nu s'ar fi pus condiţia ca suma cifrelor să fie cât mai mare, atunci s'ar mai fi găsit soluţiile:

$$1890 \text{ cu } 1908 \quad \text{şi} \quad 1913 \text{ cu } 1931.$$

2°. A rezolvat în mod analog problema, însă făcând mai multe încercări D-l P. P. DRĂGHICESCU.

3°. Au rezolvat problema examinând numai două cazuri D-nii: C. D. EFTIMIE, P. ELIAS, EM. MODÂLCĂ, N. E. MOSCOVICI, M. GH. POPESCU.

PROBLEMA 5526. *Să se integreze ecuaţia diferenţială:*

$$xy'y''' - 3xy''^2 + 3y'y'' = 0.$$

P. SERGESCU.

Soluţie dată de D-ra F. BRĂTILĂ (studentă la Cluj-Timişoara), D-nii MIRCEA NEGREA (Brăila), EMIL GR. ISAC şi C. D. EFTIMIE (elev inginer).

Ecuaţia are evident soluţia $y' = 0$, adică $y = \text{const.}$ Lăsând la o parte această soluţie ecuaţia dată se scrie succesiv

$$x\frac{y'y''' - 3y''^2}{y'^4} + \frac{3y''}{y'^3} = 0$$

$$x\frac{d}{dx}\left(\frac{y''}{y'^3}\right) + 3\frac{y''}{y'^3} = 0$$

$$x^3\frac{y''}{y'^3} = C$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{y'^2} + \frac{2C}{x^3} = 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{y'^2} = \frac{C}{x^2} + D$$

$$y' = \frac{x}{\pm\sqrt{C + Dx^2}}$$

$$y - E = \int \frac{xdx}{\pm\sqrt{C + Dx^2}} = \pm\frac{1}{D}\sqrt{C + Dx^2}$$

de unde:

$$(y - E)^2 = \frac{1}{D}x^2 + \frac{C}{D^2}$$

şi schimbând notaţia constantelor de integrare avem integrala generală:

$$y^2 = ax^2 + by + c.$$

Soluţia $y = \text{const.}$ semnalată la început corespunde, ca integrală particulară, cazului $a = c = 0$.

EXERCIŢII

6. Să se găsească valorile pozitive ale lui a pentru care expresiunea

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}$$

este raţională, numărul radicalilor suprapuşi fiind infinit.

P. P. DRĂGHICESCU.

R. Ridicând la patrat avem

$$x^2 = a + x$$

$$\therefore \quad x^2 - x - a = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

deci trebue să avem $a = k(k + 1)$.

PROBLEME PROPUSE

5580. Fie a, b, c, d patru laturi consecutive ale unui patrulater inscriptibil şi p, q diagonalele lui. Intre aceste şase lungimi există relaţiile

$$ac + bd = pq \quad \text{şi} \quad ab + bc/bc + ad = p/q.$$

Sunt suficiente aceste două relaţii pentru ca a, b, c, d, p, q să aparţină unui patrulater inscriptibil?

I. IONESCU.

5581. Să se găsească trei numere în progresie aritmetică, de câte două cifre fiecare, aşa încât scriindu-le unul după altul să se obţină un patrat perfect.

I. B. FLORESCU.

5582. Să se arate cum se pot găsi numerele ale căror cuburi de $m + n + p$ cifre au primele m cifre dela stânga şi ultimele p cifre dela dreapta, date. Să se aplice la cazul particular $m = p = 5$.

I. M. MIU.

5583. Dacă $p, q, r \ldots$ reprezintă toate numerele prime, care nu depăşesc un întreg oarecare n, atunci avem:

$$n! = \frac{\Pi\left[E\left(\frac{n}{p}\right)\right]!\ \Pi\left[E\left(\frac{n}{pqr}\right)\right]! \ldots\ \Pi(p)^{E\left(\frac{n}{p}\right)} \ldots}{\Pi\left[E\left(\frac{n}{p.q}\right)\right]!\ \Pi\left[E\left(\frac{n}{pqrs}\right)\right]! \ldots\ \Pi(pq)^{E\left(\frac{n}{pq}\right)} \ldots},$$

unde $E(x)$ reprezintă partea întreagă a lui x, iar

$$\Pi[E(x)]! = [E(x)]!\ [E(y)]! \ldots$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

5584. Fie AA', BB' bisectoare şi I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, în care $\sphericalangle A = \frac{\pi + C}{2}$.

Se cere locul proiecţiei lui B' pe CC', când cercul I este dat fix în plan.

C. V. PANTELIMON.

5585. Să se construiască un patrulater cunoscând unghiul diagonalelor şi lungimile dreptelor care unesc mijloacele laturilor opuse şi pe aceea a dreptei care uneşte mijloacele diagonalelor.

GH. POPESCU-BOTOŞANI.

5586. Un segment de lungime constantă se sprijină cu capetele lui pe două drepte perpendiculare neconcurente. Se cere locul unui punct determinat de pe acest segment.

AD. GHEORGHIU.

5587. Să se simplifice expresia:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}-\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}-3}}{\sqrt[3]{4}-1}.$$

G-L GH. BUICLIU.

5588. Să se calculeze suma:

$$S = \sin^2 a + C_m^1 \sin^2(a+b) + C_m^2 \sin^2(a+2b) + \ldots + \ldots + C_m^m \sin^2(a+mb).$$

GH. D. SIMIONESCU.

5589. Să se studieze seria cu termenul general

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sin\frac{\pi}{n} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sin\frac{\pi}{n+1},$$

după diferite valori ale lui α.

GH. TH. GHEORGHIU.

5590. O placă omogenă dată în formă de triunghiu dreptunghiu ABC, situată într'un plan vertical, articulată în vârful unghiului drept A pe planul orizontal, are prinse de vârfurile B şi C greutăţile P şi Q. Să se determine poziţia de echilibru şi să se discute rezultatul.

RADU P. VOINEA.

5591. Se dau două baze fixe, înclinate una faţă de alta cu un unghiu dat fix. Pe ele pot luneca prin intermediul a două inele mici A şi C, fără greutate şi fără frecare, două bare omogene AB şi BC, articulate între ele în B, de lungime l_1 şi l_2 de greutate g_1 şi g_2. Să se determine pe cale grafică poziţia lor de echilibru. Să se generalizeze pentru n bare articulate.

GABRIELA ŢIŢEICA.

ERATĂ. Problema rezolvată la pag. 136 din N-rul precedent, are numărul 3251, iar nu 3215, cum din eroare s'a publicat.

Până la sfârșitul lunii precedente, s'au primit și reținut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andrei C. (5499); *Bakonyi C.* (5424, 99); *Bodnărescu M. H.* (5504); *Boiangiu D. D.* (5022, 5318, 475, 99, 530, 43, 58, P); *Cruceru Gh. C.* (5268, 435, 76, 86, 544, 50); *Deac C. C.* (5544); *Dobrescu V. E.* (5447); *Drăghicescu P. P.* (4013, 22, 458, 621, 953, 79, 5079, 126, 34, 38, 40, 42, 58, 290, 92, 333, 51, 54, 475, 519, 32, 33, 34, 36, 45, N, P); *Gheorghiu E. Oct.* (1911, 2217, 4045, 710, 5003, 169, 77, 205, 20, 550); *Gligor N. Ioan* (5442, 47, 73, 77, 88, 507); *Gloden A.* (A); *Iacomi D. Elena* (5572); *Mihăiescu St.* (5577); *Miroslav T.* (5390); *Moscovici N.* (5499); *Petrescu Iulian* (P); *Popescu Gh. Marin* (5499, 532, 33); *Rusu L. M.* (5294); *Sbârnea D. Gh.* (5194, 236, 424, 75, 76); *Seni Cl.* (5544); *Văduva F. Marin* (5446); *Vasiliu Gh. D.* (5476, 531); *Vasiliu Gh. Paul D-tru* (5447); *Wegener E.* (4954, 5136, 206, 92, 363, N).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 80 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 75 255.

M2538

Biblioteca „...TRA"
— ...

0 - MAR 2014

222

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1942

SUMARUL

1. Generalizarea unei teoreme a lui Pappus. *D. V. Ionescu.*
2. Soluţia geometrică a problemei 1384 . *Gh. D. Simionescu.*
3. Corespondenţa prin tangente isocline . *D-tru Ion Mangeron.*
4. Raport pentru acordarea premiului „Nicolae G. Botea" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note Matematice: 19 — 23.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 308.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 1180, 3350, 4704, 5168, 5228, 5451, 5452, 5457.
11. Exerciţii: 7 — 10.
12. Probleme propuse: 5592 — 5603.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

74316

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **55**42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **6**00, 01, 02, 03.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GENERALIZAREA UNEI TEOREME A LUI PAPPUS

1. Să considerăm transformarea omografică

$$(1) \qquad k' = \frac{\mu - \nu + k(\mu - \nu + \lambda)}{\nu + k(\nu - \lambda)}$$

unde λ, μ, ν sunt constante, iar k este variabilă, şi să considerăm de asemenea transformările

$$(2) \qquad k'' = \frac{\nu - \mu + k'(\nu - \lambda + \mu)}{\lambda + k'(\lambda - \mu)}$$

$$(3) \qquad k''' = \frac{\lambda - \mu + k''(\lambda - \mu + \nu)}{\mu + k''(\mu - \nu)}$$

obţinute din (1) prin permutarea circulară a literelor λ, μ, ν şi prin înlocuirea lui k prin k' şi k''.

Să demonstrăm întâi că *produsul acestor trei transformări este transformarea identică*, adică

$$k''' = k.$$

Intr'adevăr înlocuind pe k'' din formula (3) cu membrul al doilea din formula (2), vom avea

$$k''' = \frac{\nu - \mu + k'\nu}{\mu - \nu + \lambda + k'(\lambda - \nu)}$$

şi rezolvând ecuaţia (1) în raport cu k, vom avea

$$k = \frac{\nu - \mu + k'\nu}{\mu - \nu + \lambda + k'(\lambda - \nu)}$$

de unde se deduce că avem

$$k''' = k,$$

şi teorema de mai sus este astfel demonstrată.

2. Să facem o aplicaţie a teoremei precedente. Să considerăm un triunghiu ABC, pe latura BC să luăm punctul M, şi cu ajutorul raportului

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -k$$

definim numărul k. Cu ajutorul formulelor (1) şi (2) calculăm numerele k' şi k'' iar pe laturile CA şi AB ale triunghiului ABC, luăm punctele N şi P astfel ca

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -k' \quad , \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -k''.$$

Să demonstrăm că *baricentrul maselor* λ, μ, ν *plasate în punctele* M, N, P *coincide cu baricentrul maselor* λ, μ, ν *plasate în punctele* A, B, C *oricare ar fi punctul* M *dela care s'a pornit construcţia triunghiului* MNP.

Intr'adevăr fie O un punct oarecare; avem

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{1+k}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OC} + k'\overrightarrow{OA}}{1+k'}, \quad \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + k''\overrightarrow{OB}}{1+k''}$$

şi se deduce că

$$\lambda\overrightarrow{OM} + \mu\overrightarrow{ON} + \nu\overrightarrow{OP} = \left(\frac{\mu k'}{1+k'} + \frac{\nu}{1+k''}\right)\overrightarrow{OA} +$$

$$+\left(\frac{\nu k''}{1+k''} + \frac{\lambda}{1+k}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\lambda k}{1+k} + \frac{\mu}{1+k'}\right)\overrightarrow{OC}.$$

Din formulele (1), (2) şi (3) se scoate

$$1+k' = \frac{\mu(1+k)}{\nu + k(\nu - \lambda)} \quad , \quad 1+k'' = \frac{\nu(1+k')}{\lambda + k'(\lambda - \mu)}$$

şi

$$1+k = \frac{\lambda(1+k'')}{\mu + k''(\mu - \nu)}.$$

Se observă apoi că

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\mu k'}{1+k'} + \dfrac{\nu}{1+k''} = \dfrac{\lambda + k'(\lambda - \mu)}{1+k'} + \dfrac{\mu k'}{1+k'} = \lambda \\ \dfrac{\nu k''}{1+k''} + \dfrac{\lambda}{1+k} = \dfrac{\mu + k''(\mu - \nu)}{1+k''} + \dfrac{\nu k''}{1+k''} = \mu \\ \dfrac{\lambda k}{1+k} + \dfrac{\mu}{1+k'} = \dfrac{\nu + k(\nu - \lambda)}{1+k} + \dfrac{\lambda k}{1+k} = \nu \end{cases}$$

astfel că avem

$$\boxed{\lambda\overrightarrow{OM} + \mu\overrightarrow{ON} + \nu\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}}$$

ceea ce demonstrează teorema enunţată mai sus.

In cazul când $\lambda = \mu = \nu$, avem şi $k = k' = k''$; teorema precedentă devine teorema clasică a lui PAPPUS care exprimă că cele două triunghiuri ABC, MNP au acelaşi centru de greutate.

3. Să notăm cu A', B', C' punctele luate pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC, astfel ca

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\nu}{\mu}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\lambda}{\nu}, \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

şi cu M', N', P' punctele luate pe laturile NP, PM, MN ale triunghiului MNP, astfel ca

$$\frac{\overline{M'N}}{\overline{M'P}} = -\frac{\nu}{\mu}, \quad \frac{\overline{N'P}}{\overline{N'M}} = -\frac{\lambda}{\nu}, \quad \frac{\overline{P'M}}{\overline{P'N}} = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

Să demonstrăm că *perechile de drepte* AM, A'M'; BN, B'N'; CP, C'P' *sunt paralele.*

Intr'adevăr fie O un punct oarecare; avem

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{\mu\overrightarrow{ON} + \nu\overrightarrow{OP}}{\mu + \nu}$$

sau

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{\mu}{\mu+\nu}\,\frac{\overrightarrow{OC} + k'\overrightarrow{OA}}{1+k'} + \frac{\nu}{\mu+\nu}\,\frac{\overrightarrow{OA} + k''\overrightarrow{OB}}{1+k''}$$

adică

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{\mu+\nu}\left[\frac{\mu k'}{1+k'} + \frac{\nu}{1+k''}\right]\overrightarrow{OA} + \\ + \frac{1}{\mu+\nu}\,\frac{\nu k''}{1+k''}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{\mu+\nu}\,\frac{\mu}{1+k'}\overrightarrow{OC}.$$

Ţinând seama de formulele (4), mai putem scrie

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{\lambda}{\mu+\nu}\overrightarrow{OA} + \frac{\mu - \dfrac{\lambda}{1+k}}{\mu+\nu}\overrightarrow{OB} + \frac{\nu - \dfrac{\lambda k}{1+k}}{\mu+\nu}\overrightarrow{OC},$$

adică

$$\overrightarrow{OM'} = \frac{\mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}}{\mu+\nu} + \frac{\lambda}{\mu+\nu}\left(\overrightarrow{OA} - \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{1+k}\right)$$

sau

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \frac{\lambda}{\mu+\nu}\overrightarrow{MA}.$$

Din această formulă rezultă că

$$(5) \qquad \boxed{\overrightarrow{A'M'} = \frac{\lambda}{\mu + \nu}\overrightarrow{MA}}$$

adică dreptele A'M', AM sunt paralele. La fel se demonstrează că B'N', BN sunt paralele şi că CP, C'P' sunt de asemenea paralele.

(Va urma) D. V. IONESCU.

SOLUŢIA GEOMETRICĂ A PROBLEMEI 1384 [1])

1. Problema 1384 oferă posibilitatea unui frumos studiu geometric, ce ne dă elementele necesare unei discuţii amănunţite, după poziţia punctului M şi a dreptei Δ. In acelaşi timp calea geometrică pune problema într'o altă lumină şi ne conduce la unele completări ce au scăpat soluţiei analitice [2]) din cauza formei destul de complicate a ecuaţiei (16).

2. *Soluţia geometrică.* Să ducem dreapta MDE şi să unim mijlocul A' al segmentului DE cu A. Dreapta AA' taie cercul O în F (ne interesează numai un punct) şi secanta BC în R. Tangenta în F întâlneşte pe BC în P, iar dreapta MDE întâlneşte pe Δ în Q.

Punctul P fiind polul dreptei AR, diviziunea (BCRP) este armonică, deci fascicolul A (BCRP) este armonic. Deoarece mijlocul A' al segmentului DE se află pe raza AR, după o teoremă cunoscută raza AP e paralelă cu MDE. Deci dacă se dă dreapta MDE se găseşte imediat punctul P şi AR, iar dacă se dă dreapta AF, se găseşte imediat punctul P şi ducând prin M paralela la AP se află punctul Q.

Problema va fi rezolvată dacă punctele P, Q, F vor fi coliniare, adică dacă dreapta PQ va fi tangentă la cerc. In acest caz unind M cu Q se obţine dreapta căutată MDE.

1) Enunţul problemei este: „Se dă un cerc O, o dreaptă Δ, un punct M şi tangentele AB, AC la O. Să se ducă dreapta MDE, care taie pe AB şi AC în D şi E aşa ca mediana ce pleacă din A în triunghiul ADE să taie cercul în punctul F, în care ducând o tangentă să taie pe MDE la intersecţia acesteia cu Δ". N. PROFIRI.

2) Vezi *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 480.

Pentru aceasta să căutăm înfășurătoarea dreptei PQ. Deoarece AP și MQ sunt paralele rezultă că punctele P și Q se găsesc într'o corespondență omografică având ca baze dreptele BC și Δ. Fie I intersecția lui BC cu Δ. Să ducem $AP_0 \parallel MI$ și $MQ_0 \parallel AI$. Punctele P_0 și Q_0 sunt omoloagele lui I în cele două diviziuni omografice și fiind în general distincte, dreapta PQ va înfășura o conică (Γ) tangentă în P_0 la BC și în Q_0 la Δ Când AP coincide cu AM, MQ coincide tot cu AM, deci conica va fi tangentă și dreptei AM. Când P e la infinit pe BC, MQ devine paralelă la BC în poziția MQ' care va fi tangentă conicei (Γ). De asemeni când Q e la infinit pe Δ, AP vine în poziția AP', tangentă aceleiași conice. Fie $K \equiv (MQ'; AP')$ și ω mijlocul lui KI. Conica (Γ) fiind înscrisă în paralelogramul KP'IQ' va avea centrul în ω și va fi elipsă sau iperbolă după cum punctele P_0 și Q_0 se găsesc în interiorul sau în afara segmentelor IP' și IQ [1]). In orice caz, cunoaștem cinci tangente, punctele P_0 și Q_0 și centrul ω, deci mai mult decât e necesar ca să putem construi conica (Γ).

Pentru ca dreapta PQ să fie în același timp tangentă cercului O, ea va trebui să fie o tangentă comună acestui cerc și conicei (Γ). Or, cele două conice au *cel mult* patru tangente comune, încât problema admite *cel mult patru soluții.* Ele ar putea să scadă la trei, două, una sau niciuna, după așezarea reciprocă a celor două conice, aceasta depinzând de M și Δ.

3. *Discuția.* Problema a fost studiată mai sus în cazul general. Ne întrebăm acum dacă există cazuri particulare interesante, când dreptele PQ se construesc simplu. Astfel, dacă conica (Γ) se reduce la un cerc, problema revine la construcția tangentelor comune a două cercuri (Γ) și (O). Pentru aceasta e necesar ca paralelogramul KP'IQ' să fie *romb*, iar ωP_0 și ωQ_0 să fie perpendiculare respectiv pe BC și Δ. Alte cazuri interesante sunt când conica (Γ) degenerează. Aceasta se poate întâmpla în următoarele două situații.

a) *Punctul* I *se găsește pe dreapta* AM. In acest caz punctele P_0 și Q_0 se confundă în I, deci I este propriul său omolog în cele două diviziuni. Se știe că dreapta PQ trece atunci printr'un punct fix, determinat de intersecția a două drepte PQ. Luând

---

1) G. PAPELIER: „Exercices de géom. moderne", IX, pag. 96.

dreptele AP' şi MQ' se vede că punctul fix este K. Să ducem din K cele două tangente la cercul O şi să notăm cu Q_1 şi Q_2 intersecţiile lor cu Δ. Soluţiile problemei sunt MQ_1 şi MQ_2.

Să notăm cu T_1 şi T_2 tangentele la cercul O, paralele cu BC. Dacă punctul M este în afara spaţiului cuprins între T_1 şi T_2, atunci punctul K se găseşte pe paralela dusă prin M la BC şi deci se pot duce totdeauna tangente la cerc, aşa că vom avea totdeauna *două soluţii*, afară de cazul când K se află şi pe una din dreptele AB sau AC, când o soluţie *devine banală.*

Când punctul M este între T_1 şi T_2, paralela prin M la BC taie cercul O în U şi V. Dacă Δ e paralelă cu o dreaptă cuprinsă între AU şi AV, atunci punctul K este interior cercului O şi *nu avem soluţii.* Dacă Δ e paralelă cu AU sau AV, K vine în U sau V şi avem *o singură soluţie.*

b) *Dreapta* Δ *este paralelă cu* BC. In acest caz P_∞ şi Q_∞ se corespund şi diviziunile sunt *asemenea* având bazele paralele. Dreapta PQ trece printr'un punct fix H [1]) şi cum AM este o poziţie particulară a dreptei PQ, rezultă că punctul H este pe dreapta AM. Tangentele din H la cercul O taie pe Δ în Q_1 şi Q_2. Soluţiile problemei sunt dreptele MQ_1 şi MQ_2. Când M e pe AB sau AC, una din soluţii devine banală.

4. In cazurile particulare studiate mai sus, soluţiile se obţin prin construcţii grafice cunoscute. Nu am discutat cazul când AM e paralelă cu BC pentrucă nu prezintă interes. Evident că problema se studiază la fel când în locul cercului **O,** se dă o conică.

5. *Completarea soluţiei analitice.* Din soluţia analitică rezultă că punctele F se găsesc la intersecţia cercului (O) cu cubica (notaţiile se păstrează):

$$(16)\quad b^2py\,[(nv+w)\,x-nuy+ur^2]^2-[p\,(x-a)+b^2ny]$$
$$\times[(nv+w)\,x-nuy+ur^2]\,[mvx-(mu+w)\,y-vr^2]$$
$$+n\,(x-a)\,[mvx-(mu+w)\,y-vr^2]^2=0$$

ceea ce dă *un număr maxim de şase soluţii,* faţă de cele *patru* găsite pe cale geometrică. Iată cum se explică această nepotrivire.

---

1) G. PAPELIER, idem, VII, pag. 50.

Printre diferitele drepte MDE ce se pot duce este şi dreapta MA, când D şi E se confundă în A. In acest caz orice dreaptă AF trece prin mijlocul lui DE. Fie Q_a intersecţia lui AM cu Δ şi F_a, F'_a punctele de contact ale tangentelor duse din Q_a la cercul *O*. F_a şi F'_a sunt două soluţii degenerate ale problemei, deci ele *trebue* să apară în soluţia analitică. Inlăturând aceste două puncte din soluţia analitică, cele două soluţii — geometrică şi analitică — sunt în perfect acord.

Căutând să verific aceste consideraţii geometrice pe cale analitică am ajuns la un rezultat neaşteptat: cubica (16) se descompune în dreapta $F_a F'_a$ şi o conică. Iată cum se poate face această descompunere. Punctul

$$Q_a\left[\frac{a(nv+w)-mw}{nv+pu}\,;\quad -\frac{n(au+w)}{nv+pu}\right]$$

are ca polară faţă de cercul *O* dreapta $F_a F'_a$ a cărei ecuaţie este:

$$(1)\quad D_p=[a(nv+w)-mw]\,x-n(au+w)\,y-r^2(nv+pu)=0.$$

Să facem notaţiile:

$$(2)\quad \Delta_1=(nv+w)\,x-nuy+ur^2\,;\quad \Delta_2=mvx-(mu+w)\,y-vr^2.$$

Se observă că între (1) şi (2) există relaţia:

$$(3)\qquad Dp=n\Delta_2-p\Delta_1,$$

iar cubica (16) se poate scrie succesiv:

$$b^2py\,\Delta_1^2-[p(x-a)+b^2ny]\,\Delta_1\Delta_2+n(x-a)\,\Delta_2^2=0$$

$$\therefore\quad b^2y\,\Delta_1(p\Delta_1-n\Delta_2)+(x-a)\,\Delta_2(n\Delta_2-p\Delta_1)$$

$$=(n\Delta_2-p\Delta_1)[(x-a)\,\Delta_2-b^2y\,\Delta_1]=0.$$

Deci ţinând seama de (3) cubica se desface în dreapta $Dp=0$ şi conica:

$$(x-a)\,\Delta_2-b^2y\,\Delta_1=0$$

ce trece prin punctul A. Intersecţiile acestei conice cu cercul **O** sunt punctele F care dau soluţiile problemei.

GH. D. SIMIONESCU.

CORESPONDENȚA PRIN TANGENTE ISOCLINE

1. Să considerăm într'un plan două curbe oarecare C_1 și C_2 și să stabilim o relație între punctele lor astfel ca în punctele corespunzătoare tangentele să formeze între ele un unghiu α dat. Se are atunci o *corespondență prin tangente isocline*[1]).

Unind punctele corespunzătoare prin drepte, se obține un sistem S de drepte având ca înfășurată o curbă E. Vom spune că curbele C_1 și C_2 sunt isocline dealungul sistemului S.

2. Să ne întrebăm dacă în afară de C_2 mai există și alte curbe isocline curbei C_1 dealungul sistemului S.

Fie

$$(1) \qquad x = x_1(t) \quad , \quad y = y_1(t)$$

ecuațiile curbei C_1 și

$$x = \xi_2(\tau) \quad , \quad y = \eta_2(\tau)$$

ecuațiile curbei C_2. Fie M_1 un punct oarecare al curbei C_1, t valoarea parametrului în acest punct și M_2 punctul de pe C_2 corespunzător punctului M_1 cu valoarea τ a parametrului. Deoarece tangentele în punctele corespunzătoare formează între ele unghiul α, avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\eta_2'(\tau)}{\xi_2'(\tau)} - \dfrac{y_1'(t)}{x_1'(t)}}{1 + \dfrac{\eta_2'(\tau)}{\xi_2'(\tau)}\dfrac{y_1'(t)}{x_1'(t)}} .$$

Din această relație se poate scoate τ în funcție de t și introduce în ecuațiile lui C_2. Se poate prin urmare — fără a micșora generalitatea problemei — să reprezentăm curbele C_1 și C_2 prin ecuațiile (I) și

$$(2) \qquad x = x_2(t) \quad , \quad y = y_2(t)$$

în care se corespund punctele date printr'o aceeași valoare a parametrului t.

---

1) Această notă mi-a fost sugerată de articolul D-lui A. MYLLER „*La correspondance par tangentes parallèles*". Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, 18 (1933), pp. 1—6.

Avem deci

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2' x_1' - y_1' x_2'}{x_1' x_2' + y_1' y_2'},$$

accentul indicând de aici încolo derivarea în raport cu parametrul.

O curbă oarecare din plan poate fi reprezentată prin ecuațiile

$$(4) \qquad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

unde λ e o funcție de t aleasă convenabil. Intr'adevăr, λ se determină introducând expresiunile (4) în ecuația $f(x, y) = 0$ a curbei.

Pentru ca curba (4) să fie isoclină curbei C_1 dealungul sistemului S, trebue să avem

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{(1+\lambda)(y_1' + \lambda y_2') + \lambda'(y_2 - y_1)}{(1+\lambda)(x_1' + \lambda x_2') + \lambda'(x_2 - x_1)} - \dfrac{y_1'}{x_1'}}{1 + \dfrac{y_1'}{x_1'} \dfrac{(1+\lambda)(y_1' + \lambda y_2') + \lambda'(y_2 - y_1)}{(1+\lambda)(x_1' + \lambda x_2') + \lambda'(x_2 - x_1)}}.$$

Calculând și ținând seama de (3), se obține pentru λ următoarea ecuație diferențială în care variabilele se separă:

$$[(x_1' \operatorname{tg}\alpha + y_1')(x_2 - x_1) + (y_1' \operatorname{tg}\alpha - x_1')(y_2 - y_1)]\,\lambda' + (x_1'^2 + y_1'^2) \operatorname{tg}\alpha\,(1 + \lambda) = 0.$$

De unde, punând

$$\theta_1 = -\operatorname{tg}\alpha \int_0^t \frac{(x_1'^2 + y_1'^2)\,dt}{(x_1' \operatorname{tg}\alpha + y_1')(x_2 - x_1) + (y_1' \operatorname{tg}\alpha - x_1')(y_2 - y_1)} =$$

$$= \int_0^t \frac{(y_1' x_2' - x_1' y_2')\,dt}{y_2'(x_2 - x_1) - x_2'(y_2 - y_1)},$$

avem

$$(6) \qquad \lambda = K_1 e^{\theta_1} - 1,$$

K_1 fiind o constantă arbitrară.

Există deci o infinitate de curbe isocline la C_1 dealungul sistemului S. Ele sunt date prin formulele (4) în care λ are valoarea (6) și rezultă totodată paralele în sensul D-lui MYLLER, la C_2.

Deasemenea, exprimând că curba (4) este isoclină curbei C_2 dealungul sistemului S, se găseşte pentru λ ecuaţia diferenţială

$$\frac{\lambda'}{\lambda(1+\lambda)} = -\operatorname{tg}\alpha \frac{x_2'^2 + y_2'^2}{(x_2' \operatorname{tg}\alpha - y_2')(x_2 - x_1) + (y_2' \operatorname{tg}\alpha + x_2')(y_2 - y_1)}.$$

De unde, punând

$$\theta_2 = -\operatorname{tg}\alpha \int_0^t \frac{(x_2'^2 + y_2'^2)\, dt}{(x_2' \operatorname{tg}\alpha - y_2')(x_2 - x_1) + (y_2' \operatorname{tg}\alpha + x_2')(y_2 - y_1)} =$$

$$= \int_0^t \frac{(y_1' x_2' - x_1' y_2')\, dt}{x_1'(y_2 - y_1) - y_1'(x_2 - x_1)},$$

avem

$$\lambda = \frac{e^{\theta_2}}{K_2 - e^{\theta_2}}, \tag{7}$$

K_2 fiind o constantă arbitrară.

Există deci o altă infinitate de curbe isocline curbei C_2 (şi paralele curbei C_1) dealungul sistemului S, date prin formulele (4) în care λ are valoarea (7).

Se poate enunţa deci următorul rezultat:

Prin fiecare punct N al unei drepte aparţinând sistemului S trec două (şi numai două) curbe respectiv isocline curbelor C_1 şi C_2 dealungul sistemului S; ele se taie în acest punct sub unghiul α şi constantele K_1 şi K_2 care le determină sunt legate prin relaţiunea

$$K_1 K_2 e^{\theta_1} - K_1 e^{\theta_1 + \theta_2} - K_2 = 0.$$

Dintr'un alt punct de vedere asupra căruia nu vrem să insistăm aici, se poate spune că s'a obţinut în acest chip o reţea de linii coordonate curbilinii oblice (de unghiul α), având curbele de bază, „axele", C_1 şi C_2.

In particular, λ devine constant pentru $\alpha = 0$ şi se are în acest caz următoarea teoremă a D-lui MYLLER:

„Există o infinitate de curbe paralele la C_1 şi C_2 dealungul sistemului S. Fiecare curbă paralelă împarte segmentele M_1M_2 tăiate de cele două curbe C_1 şi C_2 pe dreptele sistemului S, într'un raport simplu constant λ".

Vom spune că dreptele sistemului S sunt *aproapenormale* atât curbelor isocline C_1, C_2 cât şi celor două familii de curbe isocline găsite adineaori.

3. Să dăm acum o altă formulă care să reprezinte curbele isocline unei curbe date C_1 dealungul unui sistem de drepte. Să definim în acest scop sistemul de drepte ce se consideră prin înfăşurata lor E.

Fie

$$x = x_0(t) \quad , \quad y = y_0(t)$$

ecuaţiile înfăşuratei. Ecuaţiile curbei date C_1 le putem scrie sub forma

$$(8) \qquad x = x_0 - \rho \frac{dx_0}{dt} \quad , \quad y = y_0 - \rho \frac{dy_0}{dt},$$

ρ fiind o funcţie de t care urmează a se determina prin introducerea expresiunilor (8) în ecuaţia $\varphi(x, y) = 0$ a curbei C_1 şi prin rezolvarea ei în raport cu ρ. Să transformăm formulele (8) prin introducerea unui alt parametru σ, legat de t prin formula

$$\rho(t) = \frac{\sigma(t)}{\sigma'(t)} .$$

Se obţine

$$x = x_0 - \sigma \frac{dx_0}{d\sigma} \quad , \quad y = y_0 - \sigma \frac{dy_0}{d\sigma} .$$

Fie

$$(9) \qquad \bar{x} = x_0 - \rho(\sigma) \frac{dx_0}{d\sigma} \quad , \quad \bar{y} = y_0 - \rho(\sigma) \frac{dy_0}{d\sigma},$$

ecuaţiile uneia din curbele isocline curbei C_1. Pantele celor două curbe considerate sunt date prin egalităţile ce urmează

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d^2y_0}{d\sigma^2}}{\dfrac{d^2x_0}{d\sigma^2}} \quad , \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\dfrac{dy_0}{d\sigma} - \rho' \dfrac{dy_0}{d\sigma} - \rho \dfrac{d^2y_0}{d\sigma^2}}{\dfrac{dx_0}{d\sigma} - \rho' \dfrac{dx_0}{d\sigma} - \rho \dfrac{d^2x_0}{d\sigma^2}} .$$

De aici, exprimând printr'o relaţie analoagă relaţiunei (5) că cele două tangente corespunzătoare la o aceeaşi valoare a parametrului σ formează între ele unghiul constant α, se găseşte pentru ρ următoarea ecuaţie diferenţială liniară:

$$[x_0'' y_0' - x_0' y_0'' + \operatorname{tg}\alpha (x_0' x_0'' + y_0' y_0'')] \rho' + \operatorname{tg}\alpha (x_0''^2 + y_0''^2) \rho +$$
$$+ x_0' y_0'' - x_0'' y_0' - \operatorname{tg}\alpha (x_0' x_0'' + y_0' y_0'') = 0$$

a cărei integrare se face pe o cale elementară.

Introducând valoarea lui ρ astfel determinată în (9), se obține familia de isocline căutată.

In particular, pentru $tg\alpha = 0$, avem $\rho = \sigma - c$, c fiind o constantă arbitrară, deoarece, natural, se poate presupune $x_0'' y_0' - x_0' y_0'' \neq 0$, și familia de curbe paralele curbei C_1 este dată prin ecuațiile

$$x = x_0 - (\sigma - c)\frac{dx_0}{d\sigma} \quad , \quad y = y_0 - (\sigma - c)\frac{dy_0}{d\sigma} .$$

Vom numi înfășurata E *aproapedesfășurata* curbei $C_1 (C_2)$ și a isoclinelor sale.

(Va urma).

DUMITRU ION MANGERON
Seminarul Matematic al Universității din Iași.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

Premiul « NICOLAE G. BOTEA » se acordă anual elevului de liceu, școală militară, Politehnică sau studentului de Facultate din țară pentru cea mai bună lucrare (articol, problemă rezolvată) de geometria triunghiului și a tetraedrului, publicată în ultimul volum al *Gazetei Matematice.*

In volumul XLVI nu au apărut articole sau note conforme condițiilor de mai sus.

Luându-se în cercetare activitatea de rezolvitori ai problemelor propuse din domeniul geometriei triunghiului, a corespondenților noștri, am constatat că premiul se poate acorda pentru acest fel de activitate, D-lui PAUL DRĂGHICESCU, elev în clasa VIII-a a Liceului G-l Makarovici, Iași.

Problemele 2717, 5385 îl au unic rezolvitor, altele îl numără printre puținii lor rezolvitori, iar coperta revistei ne arată că D-l PAUL DRĂGHICESCU are în prezent o bogată activitate.

Propunem să-i fie acordate ca premiu volumele:

1. N. ABRAMESCU, Curs de Geometrie Analitică.
2. TH. ANGHELUȚĂ, Curs de Algebră.

3. GABRIELA ŢIŢEICA şi AL. STOENESCU, Probleme de Calcul Vectorial.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"
GABRIELA ŢIŢEICA, E. BOTEA,
C. IONESCU-BUJOR.

Acest raport a fost citit şi aprobat în şedinţa Adunării Generale Extraordinare dela 18 Septemvrie 1941.

NOTE MATEMATICE

19. *Asupra problemei 5424.* Soluţia acestei probleme a fost dată la pag. 192. Ea arată că descompunerea numerelor căutate în factori primi nu e necesară spre a găsi soluţiile; era destul a se şti factorii lor 269 şi 2663. Necunoscutele se găsesc formând ecuaţia nedeterminată de gradul I,

$$269x - 2663y = \pm 1,$$

care deslegată după metodele cunoscute dă de-a-dreptul pe x şi y.

I. I.

20. *Asupra problemei 5359.* La redijarea soluţiei problemei Nr. 5359 s'a omis a se trece printre rezolvitori D-l TEODOR A. ŞERBAN, student-inginer.

D-sa a rezolvat problema aşa cum s'a publicat în G. M., Vol. XLVI, pag. 656.

C-pt. M. I. F.

21. *Asupra unui contur poligonal.* D-l Profesor VIRGIL GHIŢESCU, într'un articol din *Gazeta Matematică*[1]) demonstrează elementar şi foarte elegant, mai multe proprietăţi. Vreau să fac câteva observaţii parţiale, în legătură cu două din aceste chestiuni.

1) VIRGIL GHIŢESCU: *Asupra unui contur poligonal în legătură cu un triunghiu* (G. M. XLVI—624)

1. Chestiunea 1^0 poate fi pusă în legătură cu aşa numita figură THOMSEN [1]), ţesutul fiind format de drepte ce trec respectiv prin punctul dela infinit al fiecărei laturi.

2. Chestiunea 4^0 pune în evidenţă o figură D_3 [2]), ABC fiind un triunghiu al ţesutului pentru $M_1 \equiv A$.

3. In sensul precedentelor, obţinem o generalizare, luând α, β, γ trei puncte arbitrare pe laturile BC, CA, AB; luăm pe M_1 pe AB; $M_1\alpha$ taie pe AC în M_2 şi avem succesiv şi celelalte intersecţii: $M_3 \equiv (M_2\gamma,\ BC)$, $M_4 \equiv (M_3\beta,\ AB)$, $M_5 \equiv (M_4\alpha,\ AC)$, $M_6 \equiv (M_5\gamma,\ BC)$, $M_7 \equiv (M_6\beta,\ AB)$. M_7 *coincide cu* M_1.

Avem şi aici o poziţie pentru care diagonalele M_1M_6, M_2M_3, M_4M_5 sunt *concurente* fiindcă există un punct M_3 pe BC şi *unul singur* [3]) astfel că dacă $R \equiv (M_3\gamma,\ M_4\alpha)$, $S \equiv (R\beta,\ BC)$, $T \equiv (S\gamma,\ M_4\alpha)$, $U \equiv (T\beta,\ BC)$ — U coincide cu C.

Dacă α, β, γ sunt colineare pe o dreaptă Δ, punctele M_i sunt aşezate pe o conică Γ; iar în poziţia de concurenţă a diagonalelor, punctul comun ω este *polul* dreptei Δ faţă de Γ sau *polul trilinear* al dreptei Δ. Când Δ este dreapta dela infinit, ω este centrul de greutate al triunghiului. (Cazul considerat în articolul citat).

N. M.

22. *Asupra problemei 3518* (G. M., XXXVI—223). Se cere să se arate că dacă d este un divizor oarecare al unui număr întreg, avem:

$$\Sigma\, \varphi(d^2) = \Sigma\, d\, \varphi(d)$$

şi se cere examinarea cazurilor mai generale.

Printre generalizările date este:

$$\Sigma\, \varphi(d^n) = \Sigma\, d^{n-1}\, \varphi(d)$$

sau chiar:

$$\Sigma\, \varphi(d^n) = \Sigma\, d^k\, \varphi(d^{n-k})$$

Simbolul $\varphi(i)$ fiind acela al indicatorului.

---

1) W. BLASCHKE şi G. BOL: *Geometrie der Gewebe*, pag. 20 ex. 1, fig. 28 *(Thomsens Dreieck)*.

2) Idem, pag. 13, fig. 24.

3) Idem, pag. 13.

Imi propun însă să examinez cazul şi mai general, adică:

$$\Sigma \varphi_m(d^n) = \Sigma d^k . \varphi_m(d^{n-k})$$

unde $\varphi_m(i)$ înseamnă indicatorul de ordinul m a lui i.

Să presupunem mai întâi că $d = a^\alpha$, atunci avem:

$$\varphi_m(d^n) = a^{n\alpha-m} . (a-1) . A_m$$

$$\varphi_m(d^{n-k}) = a^{(n-k)\alpha-m} . (a-1) . A_m .$$

Ceea ce ne arată că egalitatea subsistă.

Fie acum $d = a^\alpha . b^\beta$, atunci avem:

$$\varphi_m(d^n) = \varphi_m(a^{\alpha n}) . \varphi_m(b^{\beta n}) . a^{\varepsilon n} . A_m . B_m$$

$$\varphi_m(d^{n-k}) = \varphi_m[a^{\alpha(n-k)}] . \varphi_m[b^{\beta(n-k)}] \times a^{\varepsilon m} . A_m . B_m .$$

Egalitatea devine deci:

$$\varphi_m(a^{\alpha n}) . \varphi_m(b^{\beta n}) = a^{\alpha k} . \varphi_m[a^{\alpha(n-k)}] \times b^{\beta k} . \varphi_n[b^{\beta(n-k)}].$$

Care în baza primei generalizări, este valabilă, căci avem:

$$\varphi_m(a^{\alpha n}) = a^{\alpha k} . \varphi_m[a^{\alpha(n-k)}]$$

$$\varphi_m(b^{\beta n}) = b^{\beta k} . \varphi_m[b^{\beta(n-k)}]$$

In mod analog, dar din ce în ce mai complicat, se poate dovedi existenţa egalităţii pentru d cuprinzând oricâţi factori.

COMANDOR I. LINTEŞ.

23. *Asupra unei propoziţiuni în legătură cu dreapta lui* SIMSON. In cele ce urmează îmi propun a demonstra următoarea propoziţie [1]).

Se consideră două triunghiuri înscrise în acelaşi cerc. Triunghiurile determinate de dreptele lui SIMSON *ale vârfurilor unuia din triunghiuri în raport cu celălalt formează două triunghiuri asemenea şi proporţionale cu triunghiurile date.*

Această propoziţie cuprinde două părţi. Prima parte, este relativă la asemănarea triunghiurilor formate de dreptele lui SIMSON, cu triunghiurile date. Aceasta rezultă imediat dacă se reaminteşte

1) Această propoziţie forma obiectul problemei 4001, din Vol. XLIII, pag. 670, care fiind cunoscută, a fost anulată şi înlocuită cu alta la pag. 102, Vol. XLVII.

că unghiul dreptelor lui SIMSON a două puncte M şi N are aceeaşi măsură ca jumătatea arcului după cercul circumscris triunghiului şi subîntins de coarda MN.

Demonstraţia ce voiesc să arăt aci are drept obiect partea doua a aceleiaşi propoziţiuni: acea relativă la proporţionalitatea triunghiurilor formate. Această demonstraţie are avantajul de a pune în evidenţă valoarea factorului de proporţionalitate.

Pentru aceasta utilizez următoarele propoziţiuni clasice:

1. *Dreptele lui* SIMSON *ale aceluiaşi punct în raport cu două triunghiuri* S — *înscrise în acelaşi cerc şi circumscrise la aceeaşi parabolă — sunt paralele.*

2. *Locul geometric al ortopolurilor unei drepte fixe în raport cu triunghiurile înscrise în acelaşi cerc şi circumscrise la aceeaşi parabolă este o dreaptă paralelă cu directoarea.*

Fie acum $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ două triunghiuri înscrise în acelaşi cerc (O). Fie de asemeni, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ triunghiul format de dreptele lui SIMSON ale vârfurilor primului triunghiu, în raport cu cel de al doilea. Rezultă din cele două propoziţiuni amintite, că laturile triunghiului $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ rămân fixe ca mărime şi direcţiune dacă se substitue triunghiului $A_2B_2C_2$ un altul care să fie S în raport cu el.

Considerăm deci, triunghiul $A_2'B_2'C_2'$ care este S în raport cu $A_2B_2C_2$ şi în care vârfurile B_2' şi C_2' sunt diametral opuse lui B_1 şi C_1. In acest triunghiu, laturile $A_2'B_2'$ şi $A_2'C_2'$ sunt tangente parabolei înscrise în patrulaterul determinat de laturile triunghiului $A_2B_2C_2$ şi de dreapta $B_2'C_2'$.

Notăm cu D, E şi F proiecţiunile lui A_1 respectiv pe laturile $B_2'C_2'$, $C_2'A_2'$ şi $A_2'B_2'$. Laturile triunghiurilor $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ şi $A_2'EF$ sunt egale şi paralele.

Punctele A_1, A_2', E, F fiind pe acelaşi cerc de diametru A_1A_2' avem:

$$EF = A_1A_2' \sin \sphericalangle EA_2'F.$$

Pe de altă parte, R fiind raza cercului (O), avem:

$$A_1A_2' = 2R \sin \sphericalangle A_1C_2'A_2'.$$

Din patrulaterul inscriptibil A_1DEC_2' deducem:

$$\sin \sphericalangle A_1C_2'A_2' = \sin \sphericalangle A_1DE = \sin \omega$$

ω fiind unghiul dreptelor lui SIMSON a unui punct în raport cu triunghiul $A_1B_1C_1$ şi triunghiul $A_2B_2C_2$ sau triunghiul $A_2'B_2'C_2'$.

Rezultă, în definitiv, că avem:

$$EF = B_2'C_2' \sin\omega = B_1C_1 \sin\omega.$$

Rezultă de asemeni, că raportul dintre triunghiul $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ determinat de dreptele lui SIMSON ale vârfurilor triunghiului $A_2B_2C_2$ şi acest triunghiu este egal tot cu $\sin\omega$ şi deci proporţionalitatea triunghiurilor formate de dreptele lui SIMSON cu triunghiurile iniţiale.

Proporţionalitatea dintre cele patru triunghiuri se păstrează şi când triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ sunt S. In acest caz particular, avem:

$$\sin\omega = 0,$$

iar triunghiurile $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ şi $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ se reduc la un punct.

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Sesiunea Septemvrie — Octomvrie

MATEMATICI GENERALE

I.

1. Să se calculeze $\sin 5a$ şi $\cos 5a$. Punând: $\cos^2 a = x$, să se calculeze valoarea fracţiei:

$$\frac{5 \sin a \cos 5a - \cos a \sin 5a}{\sin a \cos 5a + 3 \cos a \sin 5a - 8 \sin 2a}$$

numai în funcţie de x. Să se facă toate simplificările posibile.

2. Să se găsească natura seriei cu termenul general

$$u_n = \frac{n\sqrt{n}}{1 + n^3}.$$

3. Să se studieze variaţia funcţiunii

$$y = \frac{x - 3}{\sqrt{1 - x^2}},$$

şi să i se facă graficul.

4. Să se determine a în aşa fel ca suma a două rădăcini ale ecuaţiei

$$x^4 + 3x^3 - 12x^2 + ax = 15 = 0,$$

să facă — 2. Să se rezolve apoi ecuaţia.

II.

1. Să se scrie expresia

$$\frac{1+i}{2-i} - \frac{(3+i)(i-4)}{(1-i)(2+i)},$$

sub forma $A + iB$.

2. Să se rezolve sistemul

$$x+y+z=3a \quad , \quad x+y-z=a+2 \quad , \quad 2ax-(a-1)y-(a+1)z=2,$$

cu ajutorul regulei lui CRAMER. Discuţie.

3. Să se faca graficul funcţiunii

$$y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

4. Să se arate că ecuaţia

$$x^3-6x-3=0,$$

are o singură rădăcină pozitivă. Să se calculeze această rădăcină cu două zecimale exacte.

GEOMETRIE ANALITICĂ

I.

1. Fie

$$313x^2+50xy+313y^2+526x-1202y-47217=0,$$

ecuaţia conicei (C). Să se determine: *a)* centrul conicei (C); *b)* axele conicei (C); *c)* vârfurile conicei (C); *d)* focarele şi directoarele corespunzătoare; *e)* să se construiască conica; *f)* care este ecuaţia suprafeţei născută de conica (C) când se roteşte în jurul axei ei; *g)* care este ecuaţia suprafeţei născută de conica (C) când se roteşte în jurul axei Ox.

2. Să se construiască curba dată prin ecuaţia

$$\varphi(x, y) \equiv x^3-8y^3+6y^2=0.$$

II.

1. Să se construiască curba plană, dată într'un sistem de axe ortogonale, prin ecuaţia

$$\varphi(x, y) \equiv x^3-y^3-4(x+y)^2=0.$$

2. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice care are drept curbă directoare curba

$$(\Omega) \qquad z = 0 \ , \ \varphi(x, y) = x^3 - y^3 - 4(x + y)^2 = 0$$

iar generatoarele paralele cu dreapta

$$(\Delta) \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}.$$

3. Să se scrie ecuaţia suprafeţei de rotaţie născută de curba (Ω) în jurul axei Ox.

4. Să se scrie ecuaţia suprafeţei de rotaţie născută de aceeaşi curbă în jurul axei $x = y = z$.

ANALIZA MATEMATICĂ

1. Să se calculeze aria comună curbelor

$$x^2 + y^2 = 5 \ , \ x^2 = 4xy.$$

2. Să se efectueze integralele definite

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx \ , \ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

3. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 27\frac{dy}{dx} = e^{-3x} + x.$$

MECANICA

1. In vârfurile unui triunghiu ABC se aplică forţele paralele şi de acelaşi sens α', β', γ' având centrul în m. Se aplică apoi aceleaşi forţe una din ele având, rând pe rând sens opus şi obţinem centrele respective m_1, m_2, m_3. Să se arate că A, B, C sunt pe laturile triunghiului $m_1m_2m_3$.

2. Un punct m descrie uniform un cerc C, care se roteşte în jurul unui punct fix O din plan cu o vitesă unghiulară egală şi de sens contrar cu a punctului m. Care-i mişcarea lui m ?

3. Două mobile m_1 şi m_2 se mişcă într'un plan, respingându-se cu o forţă egală cu de şase ori distanţa dintre ele şi fiind atrase de un punct fix O al planului cu o forţă egală cu de 16 ori respectiv distanţa lor la O. Ştiind că în momentul iniţial cele două puncte se găsesc pe o dreaptă ce trece prin O, astfel ca $Om_1 = 3a$, $Om_2 = a$, $v_1 = 0$, $v_2 = 8a$ şi paralelă la Oy, să se studieze mişcarea punctelor m_1 şi m_2. Să se arate că ele descriu aceeaşi traiectorie a cărei natură să se precizeze. Să se arate apoi că dreapta m_1m_2 rămâne tangentă la traiectorie şi că tangentele în m_1 şi m_2 sunt perpendiculare, punctul lor de intersecţie fiind situat pe cercul tritangent la traiectorie.

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico. Ano XIV. No. 14. Setiembre de 1941. Buenos Aires. La începutul mijlocului anului XIV de B. BAIDAFF.

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Tome XXIV. No. 1. Sur la représentation des groupes abéliens infinis II et III, par GR. C. MOISIL.

Idem. No. 2. Sur une propriété générale de certaines fonctions algébriques, par P. POPOVĂŢ. Sur la représentation des groupes abéliens infinis IV, par GR. C. MOISIL. Sur les surfaces dont une famille de lignes de courbure sont des courbes planes semblables, par G. GHEORGHIEV. Sur une extension du mouvement tautochrone plan, par RADU BĂDESCU. Sur l'énergie propre de l'électron et l'introduction d'une longueur en mécanique quantique, par M. DRĂGAN. Sur la pseudo-sphère de BACALOGLU, par FLORICA CÂMPAN.

Idem. No. 3. Comment peut-on déduire d'un cliché photographique la distribution de la matière cosmique dans l'espace d'une nébuleuse dont la forme est connue, par C. POPOVICI.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Nr. 10. Decemvrie 1941. Timişoara. Transformarea expresiunii $\sqrt{A+\sqrt{B+\sqrt{C}}}$, de E. VIŞA.

ION IONESCU, *Maxime şi minime geometrice.* Apărute în *Biblioteca Gazeta Matematică* „GEORGE ŢIŢEICA". Nr. 1. Bucureşti 1941.

Familia regretatului Profesor şi Academician GEORGE ŢIŢEICA a constituit la Societatea *Gazeta Matematică* un fond din venitul căruia să se înfiinţeze o *Bibliotecă de monografii matematice*, cu subiecte elementare pentru extinderea cunoştinţelor elevilor din liceele noastre şi pentru desvoltarea gustului de cercetări matematice originale. Publicaţiile se vor face în broşuri, cu formatul 120×185 broşate şi cartonate purtând titulatura: *Biblioteca matematică* „GEORGE ŢIŢEICA".

Regulamentul acestei Biblioteci s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Anul XLVI (1940—1941), pag. 113.

Familia lui GEORGE ŢIŢEICA şi-a exprimat dorinţa ca Nr. 1 din această *Bibliotecă* să cuprindă *Geometrie elementară* şi pentru a se începe tipărirea cât mai neîntârziat, a oferit totdeodată sumele necesare pentru publicare, în afară de sumele depuse pentru constituirea fondului Bibliotecii.

D-l ION IONESCU, fost coleg timp de 44 ani cu GEORGE ŢIŢEICA la Redacţia *Gazetei Matematice* s'a oferit să scrie D-sa primul Nr. din *Biblioteca Gazeta Matematică* „GEORGE ŢIŢEICA", alegând ca subiect chestiunea *Maximele şi minimele geometrice.* Manuscrisele prezentate au fost aprobate de Comisiunea de cercetare prevăzută de Regulament. Raportul s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Anul XLVI, pag. 350.

Broşura conţine 172 pagini şi depăşeşte limita impusă de Regulament de 100 pagini, însă D-l ION IONESCU s'a oferit să achite D-sa surplusul de cheltuială.

Broşura conţine patru părţi: I. *Generalităţi:* Istoric, Definiţii, Principii, Teoreme, Reciprocitatea maximului şi minimului; II. *Probleme de Geometrie plană:* Metode de rezolvare; III. *Teoria isoperimetriei figurilor;* IV. *Probleme de Geometrie în spaţiu.*

Deşi manuscrisele au fost gata de tipărit încă din Martie 1941, broşura nu a putut apare decât în Decemvrie 1941, din cauza lipsurilor de material şi lucrători provocate de războiu.

Broşura se vinde la *Gazeta Matematică*, Bucureşti, Calea Griviţei 158, cu preţul de 135 lei. Din sumele rezultate din vânzare şi din veniturile fondului se vor aduna sumele necesare pentru publicarea unei noui monografii în *Biblioteca Matematică* „GEORGE ŢIŢEICA".

REDACŢIA.

N. BĂRBULESCU, *Die Zustandsgleichung der Oberfläche.* (Extras din *Physikalische Zeitschrift*, 1930).

N. BĂRBULESCU, *Sur la thermodynamique des phénomènes superficiels.* (Extras din *Journal de Chimie-physique).* Paris 1932.

N. BĂRBULESCU, *Le théorie dipolaire des solutions.* (Extras din *Journal de Chimie physique).* Paris 1935.

N. BĂRBULESCU, *Le principe de la relativité restreinte et le temps absolu.* (Extras din *Revue générale des sciences).* Paris 1939.

N. BĂRBULESCU, *Sur l'additivité de la constante* a *de* VAN DER WAALS. (Extras din *Journal de Chimie-physique).* Paris 1938.

CERERI

308 [1]). Există exemple de calcule numerice pentru aria cercului sau de volume pentru buţi scrise cu mâna, în limba română înainte de secolul XIX?

I. I.

1) Cererea din numărul precedent are numărul 307, iar nu 306, cum din eroare s'a imprimat.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

FEDERICO AMODEO, ALBRECHT DÜRER precursore di MONGE. Napoli 1907.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

FEDERICO AMODEO. Uno sguardo al secolo in cui vive GALILEO GALILEI Napoli 1914.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. A. BJERKNES, NIELS-HENRIK ABEL. Paris 1885.

Donată *Gazetei Matematice* de D-l I. IONESCU, Inginer.

FEDERICO AMODEO. Gli Istituti d'istruzioni e scientifici in Napoli intorno al 1800. Napoli 1900.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

SPIRU C. HARET. Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. Thèse. Paris 1878.

Donată de D-l N. N. MIHĂILEANU.

SPIRU C. HARET. Paris 1885. (Extras din Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires. Tome XVIII).

Donată de D-l N. N. MIHĂILEANU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1180. *Să se formeze toate sistemele de rezolvante de gradele* 2, 3 *şi* 5, *de care depinde rezolvarea ecuaţiei* $z^{31} - 1 = 0$.

Fie

$$(1) \qquad z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p = 0$$

şi

$$(2) \qquad z^q + b_1 z^{q-1} + \ldots + b_q = 0,$$

ecuaţiile finale în z, *în două sisteme de rezolvante; să se găsească numărul rădăcinilor comune ale ecuaţiilor* (1) *şi* (2) *şi cum se pot exprima unele în raport cu altele.*

A. G. IOACHIMESCU.

Scoţând rădăcina $z = 1$, avem de rezolvat ecuaţia:

(I) $$z^{30} + z^{29} + \ldots + z + 1 = 0;$$

α fiind o rădăcină a acestei ecuaţii şi 3 o rădăcină primitivă a numărului prim 31, rădăcinile ecuaţiei (I) pot fi reprezentate prin

$$\alpha^{3^0}, \alpha^{3^1}, \alpha^{3^2}, \alpha^{3^3}, \ldots, \alpha^{3^{28}} \text{ şi } \alpha^{3^{29}},$$

sau, înlocuind exponenţii prin resturile diviziunilor lor prin 31, rădăcinile vor fi reprezentate prin:

$\alpha, \alpha^3, \alpha^9, \alpha^{-4}, \alpha^{-12}, \alpha^{-5}, \alpha^{-15}, \alpha^{-14}, \alpha^{-11}, \alpha^{-2}, \alpha^{-6}, \alpha^{13}, \alpha^8, \alpha^{-7}, \alpha^{10},$

$\alpha^{-1}, \alpha^{-3}, \alpha^{-9}, \alpha^4, \alpha^{12}, \alpha^5, \alpha^{15}, \alpha^{14}, \alpha^{11}, \alpha^2, \alpha^6, \alpha^{-13}, \alpha^{-8}, \alpha^7, \alpha^{-10}.$

Vom putea forma atâtea sisteme de rezolvante, în câte moduri vom putea permuta numerele 2, 3 şi 5; astfel vom avea:

Grupa I rezolvante de gradele 2, 3 şi 5;
„ II „ „ „ 2, 5 şi 3;
„ III „ „ „ 3, 2 şi 5;
„ IV „ „ „ 3, 5 şi 2;
„ V „ „ „ 5, 2 şi 3;
„ VI „ „ „ 5, 3 şi 2.

I. x_1 şi x_2 fiind rădăcinile rezolvantei de gradul 2, avem:

$$x_1 = \alpha^{3^0} + \alpha^{3^2} + \ldots + \alpha^{3^{26}} + \alpha^{3^{28}} = \alpha + \alpha^9 + \alpha^{-12} + \alpha^{-15} + \alpha^{-11} + \alpha^{-6} + \alpha^8 + \alpha^{10} + \alpha^{-3} + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^{14} + \alpha^2 + \alpha^{-13} + \alpha^7,$$

$$x_2 = \alpha^{3^1} + \alpha^{3^3} + \ldots + \alpha^{3^{27}} + \alpha^{3^{29}} = \alpha^3 + \alpha^{-4} + \alpha^{-5} + \alpha^{-14} + \alpha^{-2} + \alpha^{13} + \alpha^{-7} + \alpha^{-1} + \alpha^{-9} + \alpha^{12} + \alpha^{15} + \alpha^{11} + \alpha^6 + \alpha^{-8} + \alpha^{-10};$$

$x_1 + x_2$ reprezintă suma tuturor rădăcinilor ecuaţiei I şi este egală cu -1; în produsul $x_1 x_2$ avem $15 \times 15 = 225$ produse parţiale, din acestea 15 sunt de forma $\alpha^r \times \alpha^{-r} = 1$, suma lor este egală cu 15, celelalte 210 produse reproduc de 7 ori suma rădăcinilor ecuaţiei I, suma lor va fi -7, prin urmare $x_1 x_2 = 15 - 7 = 8$, iar rezolvanta căutată va fi:

$$(\alpha) \quad x^2 + x + 8 = 0.$$

Ca să formăm rezolvantele de gradul 3, pornim dela rădăcinile care ne dau pe x_1.

Fie

$$y_1 = \alpha^{3^0} + \alpha^{3^6} + \ldots + \alpha^{3^{24}} = \alpha + \alpha^{-15} + \alpha^8 + \alpha^4 + \alpha^2,$$

$$y_2 = \alpha^{3^2} + \alpha^{3^8} + \ldots + \alpha^{3^{26}} = \alpha^9 + \alpha^{-11} + \alpha^{10} + \alpha^5 + \alpha^{-13},$$

$$y_3 = \alpha^{3^4} + \alpha^{3^{10}} + \ldots + \alpha^{3^{28}} = \alpha^{-12} + \alpha^{-6} + \alpha^{-3} + \alpha^{14} + \alpha^7;$$

avem $y_1 + y_2 + y_3 = x_1$; suma produselor $y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3$ este formată din 75 termeni, din care 60 reproduc de 2 ori suma rădăcinilor ecuației I și deci este egală cu -2, iar celelalte 15 produse dau pe x_2, deci

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = x_2 - 2 = -(x_1 + 3).$$

Tot astfel $y_1 y_2 y_3$ este format din 125 de termeni, din care 120 reprezintă de 4 ori suma rădăcinilor ecuației I și este egală cu -4, iar celelalte 5 produse sunt de forma $\alpha^r \times \alpha^{-r} = 1$ și deci fac 5, prin urmare $y_1 y_2 y_3 = 5 - 4 = 1$. Cu modul acesta ecuația care dă pe y_1, y_2 și y_3, va fi:

$$(\beta) \qquad y^3 - x_1 y^2 - (x_1 + 3) y - 1 = 0.$$

Tot astfel, pornind dela x_2 vom obține o nouă rezolvantă de gradul 3, $(\beta')\ y^3 - x_2 y^2 - (x_2 + 3) y - 1 = 0$, ale cărei rădăcini vor fi:

$$y' = \alpha^{3^1} + \alpha^{3^7} + \ldots + \alpha^{3^{25}} = \alpha^3 + \alpha^{-14} + \alpha^{-7} + \alpha^{12} + \alpha^6,$$

$$y'' = \alpha^{3^3} + \alpha^{3^9} + \ldots + \alpha^{3^{27}} = \alpha^{-4} + \alpha^{-2} + \alpha^{-1} + \alpha^{15} + \alpha^{-8},$$

$$y''' = \alpha^{3^5} + \alpha^{3^{11}} + \ldots + \alpha^{3^{29}} = \alpha^{-5} + \alpha^{13} + \alpha^{-9} + \alpha^{11} + \alpha^{-10}.$$

Ca să formăm rezolvantele de gradul 5, considerăm rădăcinile care formează pe y_1, adică:

$$z_1 = \alpha,\ z_2 = \alpha^{-15},\ z_3 = \alpha^8,\ z_4 = \alpha^4,\ z_5 = \alpha^2,$$

formând suma lor, sumele produselor câte 2, câte 3... obținem:

$$\Sigma z_1 = y_1\ ,\ \Sigma z_1 z_2 = y' + y_2\ ,\ \Sigma z_1 z_2 z_3 = y''' + y_3,$$

$$\Sigma z_1 z_2 z_3 z_4 = y''\ ,\ z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 = 1,$$

iar ecuația care ne dă pe z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 va fi

$$(\gamma_1) \qquad z^5 - y_1 z^4 + (y' + y_2) z^3 - (y''' + y_3) z^2 + y'' z - 1 = 0.$$

In acelaşi mod rădăcinile, care formează pe y_2 şi y_3, sunt date de ecuaţii analoage cu (γ_1), în care indicii şi accentele lui y se schimbă în mod circular; aceste ecuaţii vor fi:

$$(\gamma_2) \quad z^5 - y_2 z^4 + (y'' + y_3) z^3 - (y' + y_1) z^2 + y''' z - 1 = 0,$$

$$(\gamma_3) \quad z^5 - y_3 z^4 + (y''' + y_1) z^3 - (y'' + y_2) z^2 + y' z - 1 = 0.$$

Tot astfel rădăcinile, care formează pe y', y'' şi y''', vor fi date de ecuaţii de gradul 5, analoage cu ecuaţiile (γ); aceste ecuaţii sunt:

$$(\gamma') \quad z^5 - y' z^4 + (y'' + y_2) z^3 - (y''' + y_1) z^2 + y_3 z - 1 = 0,$$

$$(\gamma'') \quad z^5 - y'' z^4 + (y''' + y_3) z^3 - (y' + y_2) z^2 + y_1 z - 1 = 0,$$

$$(\gamma''') \quad z^5 - y''' z^4 + (y' + y_1) z^3 - (y'' + y_3) z^2 + y_2 z - 1 = 0.$$

In modul acesta am obţinut toate sistemele de rezolvante, care aparţin grupului de ecuaţii de gradele 2, 3 şi 5; aceste sisteme sunt:

(1) α, β, γ_1 ; (2) α, β, γ_2 ; (3) α, β, γ_3;

(4) α, β', γ' ; (5) α, β', γ'' ; (6) $\alpha, \beta', \gamma'''$.

Ecuaţiile finale în z nu au nicio rădăcină comună, fiecare având ca rădăcini 5 rădăcini diferite ale ecuaţiei I.

II. Să formăm sistemele de rezolvante din grupa a doua, adică de gradele 2, 5 şi 3.

Ecuaţia de gradul 2 este ecuaţia (α) de mai sus.

Ca să formăm rezolvantele de gradul 5, pornim dela x_1 şi luăm:

$$u_1 = \alpha^{3^0} + \alpha^{3^{10}} + \alpha^{3^{20}} = \alpha \quad + \alpha^{-6} + \alpha^5,$$

$$u_2 = \alpha^{3^2} + \alpha^{3^{12}} + \alpha^{3^{22}} = \alpha^9 \quad + \alpha^8 \quad + \alpha^{14},$$

$$u_3 = \alpha^{3^4} + \alpha^{3^{14}} + \alpha^{3^{24}} = \alpha^{-12} + \alpha^{10} + \alpha^2,$$

$$u_4 = \alpha^{3^6} + \alpha^{3^{16}} + \alpha^{3^{26}} = \alpha^{-15} + \alpha^{-3} + \alpha^{-13},$$

$$u_5 = \alpha^{3^8} + \alpha^{3^{18}} + \alpha^{3^{28}} = \alpha^{-11} + \alpha^4 \quad + \alpha^7.$$

Avem: $\Sigma u_1 = x_1$; $\Sigma u_1 u_2$ este formată din 10 sume parţiale de câte 9 termeni, în total 90 termeni, care reproduc de câte 3 ori suma rădăcinilor ec. I, deci $\Sigma u_1 u_2 = -3$; $\Sigma u_1 u_2 u_3$ este formată din 270 termeni, din care 15 sunt de forma $\alpha^r \times \alpha^{-r} = 1$ şi

deci egal cu 15, 240 reproduc de 8 ori suma rădăcinilor ecuației I și deci egal cu -8, iar restul de 15 sunt rădăcinile care formează pe x_2, deci $\Sigma u_1 u_2 u_3 = 15 - 8 + x_2 = 6 - x_1$; $\Sigma u_1 u_2 u_3 u_4$ este formată din 405 produse, din care 15 sunt de forma $\alpha^r \times \alpha^{-r} = 1$, deci egal cu 15, iar restul de 390 termeni reproduc de 13 ori suma rădăcinilor ec. I și deci egală cu -13, deci $\Sigma u_1 u_2 u_3 u_4 = 15 - 13 = 2$; în fine $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ este format din 243 produse, din care 3 de forma $\alpha^r \times \alpha^{-r} = 1$, iar restul de 240 reproduc de 8 ori suma rădăcinilor ec. I, deci $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = 3 - 8 = -5$. Ecuația care admite pe u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ca rădăcini va fi:

$$(\delta) \quad u^5 - x_1 u^4 - 3u^3 - (6 - x_1) u^2 + 2u + 5 = 0.$$

Pornind apoi dela x_2 și punând:

$$u' = \alpha^{3^1} + \alpha^{3^{11}} + \alpha^{3^{21}} = \alpha^3 + \alpha^{13} + \alpha^{15},$$

$$u'' = \alpha^{3^3} + \alpha^{3^{13}} + \alpha^{3^{23}} = \alpha^{-4} + \alpha^{-7} + \alpha^{11},$$

$$u''' = \alpha^{3^5} + \alpha^{3^{15}} + \alpha^{3^{25}} = \alpha^{-5} + \alpha^{-1} + \alpha^6,$$

$$u^{IV} = \alpha^{3^7} + \alpha^{3^{17}} + \alpha^{3^{27}} = \alpha^{-14} + \alpha^{-9} + \alpha^{-8},$$

$$u^V = \alpha^{3^9} + \alpha^{3^{19}} + \alpha^{3^{29}} = \alpha^{-2} + \alpha^{12} + \alpha^{-10},$$

obținem prin permutări ecuația:

$$(\delta') \quad u^5 - x_2 u^4 - 3u^3 - (6 - x_2) u^2 + 2u + 5 = 0,$$

care admite rădăcinile precedente.

Pentru a obține ecuațiile finale în z, de gradul 3, considerăm pe u_1 și punem:

$$z_1 = \alpha^{3^0} = \alpha^1 \quad , \quad z_2 = \alpha^{3^{10}} = \alpha^{-6} \quad , \quad z_3 = \alpha^{3^{20}} = \alpha^5,$$

avem

$$z_1 + z_2 + z_3 = u_1 \quad , \quad z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = u''' \quad , \quad z_1 z_2 z_3 = 1,$$

obținem astfel ecuația

$$(\varepsilon_1) \qquad z^3 - u_1 z^2 + u''' z - 1 = 0,$$

pornind dela $u_2, u_3 \ldots$ prin permutări obținem ecuațiile:

$$(\varepsilon_2)\ z^3 - u_2 z^2 + u^{IV} z - 1 = 0 \quad , \quad (\varepsilon_3)\ z^3 - u_3 z^2 + u^V z - 1 = 0,$$

$$(\varepsilon_4)\ z^3 - u_4 z^2 + u' z - 1 = 0 \quad , \quad (\varepsilon_5)\ z^3 - u_5 z^2 + u'' z - 1 = 0.$$

In mod analog pornind dela u', u''... vom obține ecuațiile:

$$(\varepsilon')\, z^3 - u' z^2 + u_4 z - 1 = 0 \quad , \quad (\varepsilon'')\, z^3 - u'' z^2 + u_5 z - 1 = 0,$$

$$(\varepsilon''')\, z^3 - u''' z^2 + u_1 z - 1 = 0 \quad , \quad (\varepsilon^{IV})\, z^3 - u^{IV} z^2 + u_2 z - 1 = 0,$$

$$(\varepsilon^{V})\, z^3 - u^{V} z^2 + u_3 z - 1 = 0.$$

Sistemele de rezolvante aparținând grupului II, de gradele 2, 5 și 3, vor fi deci:

$$(7)\ \alpha, \delta, \varepsilon_1 \ ; \ (8)\ \alpha, \delta, \varepsilon_2 \ ; \ (9)\ \alpha, \delta, \varepsilon_3 \ ; \ (10)\ \alpha, \delta, \varepsilon_4 ;$$

$$(11)\ \alpha, \delta, \varepsilon_5 \ ; \ (12)\ \alpha, \delta', \varepsilon' \ ; \ (13)\ \alpha, \delta', \varepsilon'' \ ; \ (14)\ \alpha, \delta, \varepsilon''' ;$$

$$(15)\ \alpha, \delta', \varepsilon^{IV} \ ; \ (16)\ \alpha, \delta', \varepsilon^{V}.$$

Cele 10 ecuații (ε) în z, nu au nici o rădăcină comună; dar ec. (ε) din grupa a doua și ec. (γ) din grupa întâi au rădăcini comune. Rădăcinile comune sunt de forma $\alpha^{3^{2n}}$ pentru ecuațiile cu indici și de forma $\alpha^{3^{2n+1}}$ pentru ecuațiile cu accente; dacă α e o rădăcină comună din prima categorie și β din a doua, avem $\beta = \alpha^3$.

III. Pentru formarea sistemului de rezolvante de gradele 3, 2 și 5, vom considera funcțiunile:

$$x_1 = \alpha^{3^0} + \alpha^{3^3} + \ldots + \alpha^{3^{27}} = \alpha^1 + \alpha^{-4} + \alpha^{-15} + \alpha^{-2} + \alpha^8 + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^{15} + \alpha^2 + \alpha^{-8},$$

$$x_2 = \alpha^{3^1} + \alpha^{3^4} + \ldots + \alpha^{3^{28}} = \alpha^3 + \alpha^{-12} + \alpha^{-14} + \alpha^{-6} + \alpha^{-7} + \alpha^{-3} + \alpha^{12} + \alpha^{14} + \alpha^6 + \alpha^7,$$

$$x_3 = \alpha^{3^2} + \alpha^{3^5} + \ldots + \alpha^{3^{29}} = \alpha^9 + \alpha^{-5} + \alpha^{-11} + \alpha^{13} + \alpha^{10} + \alpha^{-9} + \alpha^5 + \alpha^{11} + \alpha^{-13} + \alpha^{-10}.$$

Avem

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1.$$

Produsul $x_1 x_2$ cuprinde 100 termeni din care câte 40 reproduc de câte 4 ori pe x_1 și x_3, iar 20 reproduc de 2 ori pe x_2, deci

$$x_1 x_2 = 4(x_1 + x_3) + 2x_2 = 2(x_1 + x_2 + x_3) + 2(x_1 + x_3) = 2(x_1 + x_3) - 2,$$

prin permutări

$$x_2 x_3 = 2(x_2 + x_1) - 2, \ x_3 x_1 = 2(x_3 + x_2) - 2$$

$$\therefore \quad \Sigma x_1 x_2 = 4(x_1 + x_2 + x_3) - 6 = -4 - 6 = -10.$$

Multiplicând produsele $x_1 x_2 \ldots$ respectiv cu x_3, x_1 şi x_2 şi adunând avem:

$$3x_1 x_2 x_3 = 2(\Sigma x_1 x_2 + \Sigma x_1^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2[\Sigma x_1 x_2 + (\Sigma x_1)^2 -$$
$$- 2\Sigma x_1 x_2] - 2\Sigma x_1 = 2[(\Sigma x_1)^2 - \Sigma x_1 x_2] - 2\Sigma x_1 = 2(1+10) + 2$$

$$\therefore \quad x_1 x_2 x_3 = 8.$$

x_1, x_2, x_3 vor fi deci rădăcinile ecuaţiei:

$$(a) \quad x^3 + x^2 - 10x - 8 = 0.$$

Ca să formăm rezolvantele de gradul 2, vom considera din x_1, pe

$$y_1 = \alpha^{3^0} + \alpha^{3^6} + \ldots + \alpha^{3^{24}} = \alpha + \alpha^{-15} + \alpha^8 + \alpha^4 + \alpha^2,$$

şi

$$y_2 = \alpha^{3^3} + \alpha^{3^9} + \ldots + \alpha^{3^{27}} = \alpha^{-4} + \alpha^{-2} + \alpha^{-1} + \alpha^{15} + \alpha^{-8},$$

avem

$$y_1 + y_2 = x_1 \quad , \quad y_1 y_2 = 5 + x_1 + x_2 = 4 - x_3,$$

y_1 şi y_2 vor fi deci rădăcinile ecuaţiei:

$$(b) \qquad y^2 - x_1 y + 4 - x_3 = 0.$$

Pornind dela x_2 şi x_3 vom putea forma rezolvantele:

$$(b') \quad y^2 - x_2 y + 4 - x_1 = 0 \quad \text{şi} \quad (b'') \quad y^2 - x_3 y + 4 - x_2 = 0.$$

Rezolvantele de gradul 5 corespunzătoare lui y_1 vor avea rădăcinile:

$$z_1 = \alpha, \quad z_2 = \alpha^{-15}, \quad z_3 = \alpha^8, \quad z_4 = \alpha^4, \quad z_5 = \alpha^2,$$

găsim:

$$\Sigma z_1 = y_1, \quad \Sigma z_1 z_2 = y_1' + y_1'', \quad \Sigma z_1 z_2 z_3 = y_2' + y_2'', \quad \Sigma z_1 z_2 z_3 z_4 = y_2, \quad z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 = 1,$$

iar ec. corespunzătoare va fi:

$$(c_1) \quad z^5 - y_1 z^4 + (y_1' + y_1'') z^3 - (y_2' + y_2'') z^2 + y_2 z - 1 = 0;$$

prin permutări obţinem încă ecuaţiile:

$$(c_2) \quad z^5 - y_2 z^4 + (y_2' + y_2'') z^3 - (y_1' + y_1'') z^2 + y_1 z - 1 = 0,$$
$$(c_1') \quad z^5 - y_1' z^4 + (y_1 + y_1'') z^3 - (y_2 + y_2'') z^2 + y_2' z - 1 = 0,$$
$$(c_2') \quad z^5 - y_2' z^4 + (y_2 + y_2'') z^3 - (y_1 + y_1'') z^2 + y_1' z - 1 = 0,$$
$$(c_1'') \quad z^5 - y_1'' z^4 + (y_1 + y_1') z^3 - (y_2 + y_2') z^2 + y_2'' z - 1 = 0,$$
$$(c_2'') \quad z^5 - y_2'' z^4 + (y_2 + y_2') z^3 - (y_1 + y_1') z^2 + y_2' z - 1 = 0.$$

Cu modul acesta am obținut încă următoarele sisteme de rezolvante:

(17) $a,\ b,\ c_1$; (18) $a,\ b,\ c_2$; (19) $a,\ b,\ c_1'$;

(20) $a,\ b',\ c_2'$; (21) $a,\ b'',\ c_1''$; (22) $a,\ b'',\ c_2''$.

Ecuațiile finale din acest grup au aceleași rădăcini ca și ecuațiile finale ale grupului I.

IV. Să formăm sistemele de rezolvante de gradele 3, 5 și 2.

Ecuația de gradul 3 va fi ecuația (a) de mai sus cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$ arătate acolo.

O rezolvantă de gradul 5 va avea ca rădăcini:

$$y_1 = \alpha^{30} + \alpha^{315} = \alpha^1 + \alpha^{-1},\ y_2 = \alpha^{-4} + \alpha^4,\ y_3 = \alpha^{-15} + \alpha^{15},$$

$$y_4 = \alpha^{-2} + \alpha^2,\ y_5 = \alpha^8 + \alpha^{-8}.$$

Avem $\Sigma y_1 = x_1$. Avem apoi

$$y_1 y_2 = \alpha^5 + \alpha^{-5} + \alpha^3 + \alpha^{-3},\ y_2 y_3 = \alpha^{12} + \alpha^{-12} + \alpha^{11} + \alpha^{-11} \ldots$$

$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_4 + y_4 y_5 + y_5 y_1 = x_2 + x_3;$$

$$y_1 y_3 = \alpha^{15} + \alpha^{-15} + \alpha^{14} + \alpha^{-14},\ y_2 y_4 = \alpha^6 + \alpha^{-6} + \alpha^2 + \alpha^{-2} \ldots$$

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 + y_3 y_5 + y_4 y_1 + y_5 y_2 = x_1 + x_2;$$

iar $$\Sigma y_1 y_2 = x_2 + x_3 + x_1 + x_2 = x_2 - 1.$$

$$y_1 y_2 y_3 = \alpha^{-11} + \alpha^{10} + \alpha^{-13} + \alpha^{12} + \alpha^{-10} + \alpha^{11} + \alpha^{-12} + \alpha^{13} \ldots$$

$$y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 + y_3 y_4 y_5 + y_4 y_5 y_1 + y_5 y_1 y_2 = 3x_3 + x_2,$$

$$y_1 y_3 y_4 = \alpha^{15} + \alpha^{-13} + \alpha^{14} + \alpha^{-12} + \alpha^{13} + \alpha^{-15} + \alpha^{12} + \alpha^{-14} \ldots$$

$$y_1 y_3 y_4 + y_2 y_4 y_5 + y_3 y_5 y_1 + y_4 y_1 y_2 + y_5 y_2 y_3 = x_1 + 2x_2 + x_3,$$

iar $$\Sigma y_1 y_2 y_3 = x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2x_2 + 3x_3 - 1.$$

$\Sigma y_1 y_2 y_3 y_4$ cuprinde 80 termeni, din aceștia 60 reproduc de 2 ori rădăcinile ecuației I, iar 20 reprezintă de 2 ori pe x_3, deci $\Sigma y_1 y_2 y_3 y_4 = 2x_3 - 2 = 2(x_3 - 1)$. Produsul $y_1 y_2 y_3 y_4 y_5$ coprinde 32 termeni, din aceștia 30 reprezintă rădăcinile ecuației I, iar 2 sunt de forma $\alpha^r \times \alpha^{-r} = 1$, deci $y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 = -1 + 2 = 1$. Rezolvanta de gradul 5 va fi:

$$(d)\ y^5 - x_1 y^4 + (x_2 - 1) y^3 - (2x_2 + 3x_3 - 1) y^2 + 2(x_3 - 1) y - 1 = 0.$$

In acelaş mod, pornind dela rădăcinile care formează pe x_2 şi x_3, prin permutări circulare, găsim rezolvantele:

$$(d')\ y^5 - x_2 y^4 + (x_3 - 1) y^3 - (2x_3 + 3x_1 - 1) y^2 + 2(x_1 - 1) y - 1 = 0,$$
$$(d'')\ y^5 - x_3 y^4 + (x_1 - 1) y^3 - (2x_1 + 3x_2 - 1) y^2 + 2(x_2 - 1) y - 1 = 0.$$

Pornind dela y_1 vom avea pentru rădăcinile rezolvantei în z, $z_1 = \alpha^1$ şi $z_2 = \alpha^{-1}$, această ecuaţie va fi:

$$(e_1)\ z^2 - y_1 z + 1 = 0,$$

dela $y_2, y_3 \ldots$ vom obţine rezolvantele

$$(e_2)\ z^2 - y_2 z + 1 = 0 \quad , \quad (e_3)\ z^2 - y_3 z + 1 = 0,$$
$$(e_4)\ z^2 - y_4 z + 1 = 0 \quad , \quad (e_5)\ z^2 - y_5 z + 1 = 0.$$

Pornind dela rădăcinile ecuaţiilor

$$(d')\ \text{şi}\ (a'')\ [y_1', y_2', \ldots, y_5', y_1'', y_2'', \ldots, y_5''],$$

obţinem rezolvantele:

$$(e_1')\ z^2 - y_1' z + 1 = 0, \ldots, (e_1'')\ z^2 - y_1'' z + 1 = 0 \ldots$$

In această grupă vom avea deci rezolvantele:

(23) a, d, e_1; (24) a, d, e_2; (25) a, d, e_3; (26) a, d, e_4; (27) a, d, e_5;
(28) a, d, e_1'; (29) a, d, e_2'; (30) a, d, e_3'; (31) a, d, e_4'; (32) a, d, e_5';
(33) a, d, e_1''; (34) a, d, e_2''; (35) a, d, e_3''; (36) a, d, e_4''; (37) a, d, e_5''.

Ecuaţiile finale din această grupă au câte o rădăcină comună cu ecuaţiile finale din grupa III; această rădăcină comună este de forma $\alpha^{3^{m3}}$ pentru ecuaţiile (c) şi (e) fără accent, de forma $\alpha^{3^{m3+1}}$ pentru ecuaţiile (c') şi (e') şi de forma $\alpha^{3^{m3+2}}$ pentru ecuaţiile (c'') şi (e''). De asemenea ecuaţiile finale din această grupă au câte o rădăcină comună cu ecuaţiile finale din grupa a II-a.

V. Să formăm sistemele de rezolvante de gradele 5, 2 şi 3.

Pentru aceasta considerăm funcţiunile de rădăcinile ecuaţiei I care aparţin subgrupului de ordinul 5, adică:

$$x_1 = \alpha^{3^0} + \alpha^{3^5} + \ldots + \alpha^{3^{25}} = \alpha^1 + \alpha^{-5} + \alpha^{-6} + \alpha^{-1} + \alpha^5 + \alpha^6,$$
$$x_2 = \alpha^{3^1} + \alpha^{3^6} + \ldots + \alpha^{3^{26}} = \alpha^3 + \alpha^{-15} + \alpha^{13} + \alpha^{-3} + \alpha^{15} + \alpha^{-13},$$
$$x_3 = \alpha^{3^2} + \alpha^{3^7} + \ldots + \alpha^{3^{27}} = \alpha^9 + \alpha^{-14} + \alpha^8 + \alpha^{-9} + \alpha^{14} + \alpha^{-8},$$
$$x_4 = \alpha^{3^3} + \alpha^{3^8} + \ldots + \alpha^{3^{28}} = \alpha^{-4} + \alpha^{-11} + \alpha^{-7} + \alpha^4 + \alpha^{11} + \alpha^7,$$
$$x_5 = \alpha^{3^4} + \alpha^{3^9} + \ldots + \alpha^{3^{29}} = \alpha^{-12} + \alpha^{-2} + \alpha^{10} + \alpha^{12} + \alpha^2 + \alpha^{-10}.$$

Avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -1$$

$$x_1x_2 = \alpha^4 + \alpha^{-14} + \alpha^{14} + \alpha^{-2} + \alpha^{-15} + \alpha^{-12} + \alpha^{-2} + \alpha^{11} + \alpha^8 + \alpha^{-8}$$
$$+\alpha^{10} + \alpha^{13} + \alpha^{-3} + \alpha^{10} + \alpha^7 + \alpha^{-9} + \alpha^9 + \alpha^{12} + \alpha^2 + \alpha^{15}$$
$$+\alpha^{12} + \alpha^{-4} + \alpha^{14} + \alpha^{-14} + \alpha^8 + \alpha^{-10} + \alpha^{-13} + \alpha^{-2} + \alpha^{-11}$$
$$+ \alpha^{-8} + \alpha^9 + \alpha^{-9} + \alpha^{-12} + \alpha^3 + \alpha^{-10} + \alpha^{-7}$$
$$= x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -1 - x_1 + x_3 + x_5;$$

prin permutări circulare

$$x_2x_3 = -1 - x_2 + x_4 + x_1 \quad , \quad x_3x_4 = -1 - x_3 + x_5 + x_2,$$
$$x_4x_5 = -1 - x_4 + x_1 + x_3 \quad , \quad x_5x_1 = -1 - x_5 + x_2 + x_4$$
$$\therefore \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_2 = -6.$$

In mod analog găsim

$$x_1x_3 = 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = x_2 + x_3 - x_1 - 1,$$

prin permutări:

$$x_2x_4 = x_3 + x_4 - x_2 - 1 \quad , \quad x_3x_5 = x_4 + x_5 - x_3 - 1 \quad , \quad x_4x_1 = x_5 + x_1 - x_4 - 1,$$
$$x_5x_2 = x_1 + x_2 - x_5 - 1 \quad \therefore \quad x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_1 + x_5x_2 = -6,$$

iar

$$\Sigma x_1x_2 = -12.$$

Pentru a forma suma produselor câte 3 ale rădăcinilor, avem:

$$x_1x_2x_3 = (x_3 + x_5 - x_1 - 1)x_3 = x_3^2 + x_3x_5 - x_1x_3 - x_3,$$
$$x_2x_3x_4 = x_4^2 + x_4x_1 - x_2x_4 - x_4 \quad , \quad x_3x_4x_5 = x_5^2 + x_5x_2 - x_3x_5 - x_5,$$
$$x_4x_5x_1 = x_1^2 + x_1x_3 - x_4x_1 - x_1 \quad , \quad x_5x_1x_2 = x_2^2 + x_2x_4 - x_2x_5 - x_2$$
$$\therefore \quad x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_1x_2$$
$$= \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 = (\Sigma x_1)^2 - 2\Sigma x_1x_2 - \Sigma x_1 = 1 + 24 + 1 = 26.$$

Avem apoi:

$$x_1x_3x_4 = (x_2 + x_3 - x_1 - 1)x_4 = x_2x_4 + x_3x_4 - x_1x_4 - x_4,$$

prin permutări

$$x_2x_4x_5 = x_3x_5 + x_4x_5 - x_2x_5 - x_5 \, , \, x_3x_5x_1 = x_4x_1 + x_5x_1 - x_3x_1 - x_1,$$
$$x_4x_1x_2 = x_5x_2 + x_1x_2 - x_4x_2 - x_2 \, , \, x_5x_2x_3 = x_1x_3 + x_2x_3 - x_5x_3 - x_3,$$
$$\therefore \quad x_1x_3x_4 + x_2x_4x_5 + x_3x_5x_1 + x_4x_1x_2 + x_5x_2x_3 =$$
$$= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - \Sigma x_1 = -6 + 1 = -5.$$
$$\Sigma x_1x_2x_3 = 26 - 5 = 21.$$

Pentru a forma suma produselor câte 4, avem:

$$x_1x_2x_3 = (-1-x_1+x_3+x_5)\,x_3 = (-1-x_1-1-x_1-x_2-x_4)\,x_3 =$$
$$-(2+2x_1+x_2+x_4)\,x_3 = -2x_3-2x_1x_3-x_2x_3-x_3x_4 =$$
$$-2x_3+2(1+x_1-x_2-x_3)+(1+x_2-x_4-x_1)+(1+x_3-x_5-x_2)=$$
$$4+x_1-2x_2-x_3-x_4-x_5 = 5+2x_1-x_2-2x_3.$$

$$\therefore \quad x_1x_2x_3x_4 = 5x_4+2x_1x_4-x_2x_4-2x_3x_4$$
$$= 5x_4+2(x_5+x_1-x_4-1)-(x_3+x_4-x_2-1)-2(x_5+x_2-x_3-1)$$
$$= 1+2x_1-x_2+x_3+2x_4,$$

prin permutări

$$x_2x_3x_4x_5 = 1+2x_2-x_3+x_4+2x_5,$$

$x_3x_4x_5x_1 = 1+2x_3-x_4+x_5+2x_1$, $x_4x_5x_1x_2 = 1+2x_4-x_5+x_1+2x_2$,

$x_5x_1x_2x_3 = 1+2x_5-x_1+x_2+2x_3$ $\therefore$ $\Sigma x_1x_2x_3x_4 = 5-2+1-1-2 = 1.$

Din

$$x_1x_2x_3x_4 = 1+2x_1-x_2+x_3+2x_4$$

deducem

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = x_5+2x_1x_5-x_2x_5+x_3x_5+2x_4x_5 =$$
$$x_5+2(x_2+x_4-x_5-1)-(x_1+x_2-x_5-1)+(x_4+x_5-x_3-1)+$$
$$2(x_1+x_3-x_4-1) = -4+(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) = -4-1 = -5$$

Puteam încă din

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = x_5+2x_1x_5-x_2x_5+x_3x_5+2x_4x_5$$

să deducem prin permutări şi adunând:

$$5x_1x_2x_3x_4x_5 = \Sigma x_1+2\Sigma x_1x_2 = -1+2(-12) = -25$$
$$\therefore \quad x_1x_2x_3x_4x_5 = -5.$$

Rezolvanta de gradul 5 va fi:

(A) $\qquad x^5+x^4-12x^3-21x^2+x+5 = 0.$

Rezolvanta de gradul 2 va avea ca rădăcini pe

$$y_1 = \alpha^1+\alpha^{-6}+\alpha^5 \quad \text{şi} \quad y_2' = \alpha^{-5}+\alpha^6+\alpha^{-1},$$

ecuaţia corespunzătoare este

(B_1) $\qquad y^2-x_1y+(x_4+3) = 0.$

Vom forma de asemenea rezolvantele:

$$(B_2) \qquad y^2 - x_2 y + (x_5 + 3) = 0,$$
$$(B_3) \qquad y^2 - x_3 y + (x_1 + 3) = 0,$$
$$(B_4) \qquad y^2 - x_4 y + (x_2 + 3) = 0,$$
$$(B_5) \qquad y^2 - x_5 y + (x_3 + 3) = 0.$$

Ecuațiile finale în z vor avea ca rădăcini pe α, α^{-6}, α^5, ... acestei ecuații sunt

$$(C_1)\ z^3 - y_1 z^2 + y_1' z - 1 = 0\ ,\ (C_2)\ z^3 - y_2 z^2 + y_2' z - 1 = 0 \ldots$$

VI. Ca să formăm sistemele de rezolvante de gradele 5, 3 și 2, avem pentru ecuația de gradul 5 ecuația (A); ecuațiile de gradul 3 vor avea ca rădăcini pe

$$u_1 = \alpha^1 + \alpha^{-1}\ ,\ u_2 = \alpha^5 + \alpha^{-5}\ ,\ u_3 = \alpha^6 + \alpha^{-6},$$

aceste ecuații sunt:

$$(D_1) \qquad u^3 - x_1 u^2 + (x_1 + x_4) u - (x_5 + 2) = 0 \ldots$$

O rezolvantă de gradul 2 va avea ca rădăcini:

$$z_1 = \alpha \text{ și } z_2 = \alpha^{-1},$$

această ecuație va fi:

$$(E_1) \qquad z^2 - u_1 z + 1 = 0, \ldots$$

celelalte prin permutări.

In grupul V avem 10 ecuații finale în z, iar în grupul VI 15 asemenea ecuații, acestea, împreună cu cele 37 ecuații din grupurile precedente, formează peste tot 62 rezolvante în z. Ecuațiile finale de același grad nu au rădăcini comune, cele aparținând la grupuri diferite au asemenea rădăcini.

D. GEORGESCU
Profesor, Pitești.

Soluția D-lui Profesor GEORGESCU am primit'o de mult timp, am așteptat crezând că vor mai veni și altele, dar nu am mai primit niciuna. Cum se vede din soluția de mai sus, calculele sunt laborioase, D-l GEORGESCU le-a condus cu multă pricepere și exactitate; la verificările făcute am găsit numai două nepotriviri și anume la ecuația (A) — cea mai greu de stabilit — ultimii 2 termeni sunt $x + 5$ în loc de $-30x - 6 : 5$.

A. G. l.

PROBLEMA 3350. *Să se arate că inegalitatea:*

$$(1) \qquad ab\,(2n)^m\, sh\,\beta n > \pi$$

este posibilă, a, b, n, m, β *fiind niște constante pozitive supuse condițiunilor:*

$$(2) \qquad m = \frac{ae^{bn}(e^{bn}-1)}{\log 2}, \qquad (3) \qquad b > \beta + \frac{m\log 2n}{2n}.$$

V. VÂLCOVICI.

Fie u, v, w trei numere reale îndeplinind condițiile:

$$(4) \qquad v > u > 1, \quad \frac{v}{u} > w > 1.$$

Să observăm că ecuația

$$(5) \qquad x\log x = k,$$

unde k este numărul pozitiv

$$(6) \qquad k = \frac{4u^2 \log 2 \,.\, \log u \,.\, \log v \,.\, \log w}{\pi v\,(v-1)},$$

nu are decât o singură soluție reală x_1, ceea ce se vede ușor dacă se studiază variația funcțiunii:

$$f(x) = x\log x.$$

Această funcție este negativă în intervalul $x = (0, 1)$, se anulează pentru $x = 1$ și crește monoton tinzând spre infinit, în intervalul $x = (1, \infty)$. Deci, în intervalul $x = (0, \infty)$ funcția nu va lua decât o singură dată valoarea pozitivă k, anume pentru $x = x_1 > 1$.

Imi propun a demonstra că dacă dăm mărimilor m, a, b, β următoarele valori:

$$(7) \qquad \frac{2\log u}{\log 2n}, \; a = \frac{2\log 2 \,.\, \log u}{v\,(v-1)\log 2n}, \; b = \frac{\log v}{n}, \; \beta = \frac{\log w}{n},$$

n fiind un număr oarecare cuprins între $\frac{1}{2}$ și $\frac{x_1}{2}$:

$$(8) \qquad \frac{1}{2} < n < \frac{x_1}{2},$$

relațiile din enunț vor fi îndeplinite, oricare ar fi numerele u, v, w satisfăcând inegalitățile (4). In adevăr, ținând seama de (4),

condiția (1) în care vom fi înlocuit prealabil pe $sh\beta n$ printr'un număr mai mic, βn, devine:

$$\frac{2u^2 \log 2 \,.\, \log u \,.\, \log v \,.\, \log w}{nv(v-1)\log 2n} > \pi$$

sau, ținând seama de valoarea (6) a lui k:

$$2n \log 2n < k,$$

inegalitate, evident, satisfăcută, dacă n este supus relațiilor (8). Celelalte două condiții din enunț, (2) și (3), se verifică fără nicio dificultate, dacă ținem seama de valorile (7) ale mărimilor m, a, b, β.

Observare. In articolul intitulat „Asupra unei inegalități", (G. M., Vol. 30, p. 281) care a dat naștere problemei de față, se poate găsi explicația formei particulare a relațiilor din enunț.

V. V.

PROBLEMA 4704. *Două drepte mobile în jurul unui punct O fac necontenit un unghiu constant și întâlnesc o dreaptă fixă în punctele* A, B. *Infășurătoarea cercului* OAB *este un cerc.*

C. COȘNIȚĂ.

I. *Soluție* geometrică, dată de D-l M. D. POPA (Lic. militar Iași).

Transformăm figura prin inversiune luând pe O ca pol. Dreapta dată Δ se transformă în un cerc fix (O') care trece prin O iar cercul AOB se transformă în o dreaptă Δ' care întâlnește în A' și B' pe OA și OB, punctele A' și B' fiind inversele lui A și B. Unghiul A'OB' înscris în cercul O' fiind constant, dreapta Δ' înfășoară un cerc fix (W) concentric cu (O'). Inversa cercului fix (W), care este un cerc fix (Ω) cu centrul pe Ow, va fi continuu tangent cercului AOB, ceea ce demonstrează proprietatea din enunț.

II. *Soluție* analitică, dată de D-l M. D. POPA (Lic. militar Iași).

Luăm origina în O, iar ca axe o perpendiculară și o paralelă la dreapta dată și avem

$$(\Delta)\ x = a \quad ; \quad (OA)\ y = mx \quad ; \quad (OB)\ y = nx$$

cu condiția

$$\frac{m-n}{1+mn} = k. \qquad (1)$$

Se deduce $A(a, am)$, $B(a, an)$, de unde ecuația cercului OAB:

$$x^2 + y^2 + a(mn - 1)x - a(m + n)y = 0 \qquad (2)$$

Eliminăm pe m între (1) și (2) și obținem ecuația cercului OAB în funcție de parametrul variabil n:

$$f(n) = (1 - kn)(x^2 + y^2) + a(n^2 + 2kn - 1)x + a(kn^2 - 2n - k)y = 0$$

Eliminând pe n între această ecuație și derivata ei, sau anulând realizantul ecuației în n, găsim ecuația înfășurătoarei cercului OAB, care după efectuarea tuturor calculelor devine:

$$[x^2 + y^2][k^2x^2 + k^2y^2 - 4a(k^2 + 1)x + 4a^2(k^2 + 1)] = 0$$

care se descompune în un cerc și în dreptele izotrope.

PROBLEMA 5168. *Se dă un patrulater, ale cărui diagonale se taie în punctul* O. *Se prelungește diagonala* AC *cu segmentele*

$$\overline{AA'} = \overline{OC} \quad \text{și} \quad \overline{CC'} = \overline{OA},$$

apoi diagonala BD *cu segmentele*

$$\overline{BB'} = \overline{OD} \quad \text{și} \quad \overline{DD'} = \overline{OB}.$$

Notăm punctele

M (AB, A'B'), N (BC, B'C'), P (CD, C'D'), Q (DA, D'A').

Să se demonstreze că dreptele MP *și* NQ *sunt paralele respectiv cu* B'C' *și* C'D', *dreptele* MQ *și* NP *se întâlnesc pe diagonala* BD, *iar* MN *și* PQ *pe diagonala* AC.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluție dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (bacalaureat), M. AL. VASILESCU-ȘTABU (cl. VII-a, lic. Lazăr, București), MIHAIL I. TREFILOV (cl. VIII-a, lic. Brăila), PAUL P. DRĂGHICESCU (clasa VII-a, lic. mil. Iași), CONSTANTIN PANTELIMON, MIRCEA D. POPA și ALEX. I. ROHR (lic. mil. Iași).

Triunghiurile A'OB' și C'OD', tăiate respectiv de transversalele MAB și PDC ne dau

$$(1) \quad \frac{\overline{MA'}}{\overline{MB'}} \times \frac{\overline{BB'}}{\overline{BO}} \times \frac{\overline{AO}}{\overline{AA'}} = 1 \quad \text{și} \quad \frac{\overline{PD'}}{\overline{PC'}} \times \frac{\overline{CC'}}{\overline{CO}} \times \frac{\overline{DO}}{\overline{DD'}} = 1.$$

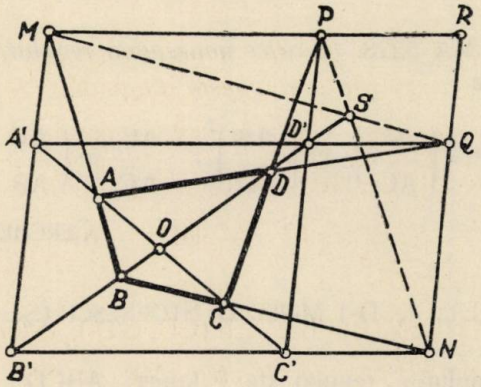
Insă ţinând seama de enunţ, $\overline{AA'} = \overline{OC}$ etc., aşa încât comparând relaţiile (1) rezultă:

$$(2) \qquad \frac{\overline{MA'}}{\overline{MB'}} = \frac{\overline{PD'}}{\overline{PC'}} .$$

Sau aplicând o proprietate a proporţiilor

$$(2') \qquad \frac{\overline{MA'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{PD'}}{\overline{D'C'}} .$$

Figura A'B'C'D' este un paralelogram deoarece diagonalele, conform construcţiei, se taie în părţi egale, aşa încât $\overline{A'B'} = \overline{C'D'}$; atunci (2') arată că $\overline{MA'} = \overline{PD'}$, adică şi figura MPC'B' este tot paralelogram, deci MP e paralelă cu B'C'.



Analog se arată că NQ este paralelă cu C'D'.

Să presupunem că dreptele MQ şi NP taie diagonala BD în două puncte diferite S, S'. Triunghiurile A'B'D' şi B'C'D' tăiate respectiv de transversalele MQ şi NP ne dau:

$$(3) \qquad \frac{\overline{SD'}}{\overline{SB'}} \times \frac{\overline{MB'}}{\overline{MA'}} \times \frac{\overline{QA'}}{\overline{QD'}} = 1 \text{ şi } \frac{\overline{S'D'}}{\overline{S'B'}} \times \frac{\overline{NB'}}{\overline{NC'}} \times \frac{\overline{PC'}}{\overline{PD'}} = 1.$$

Insă pe figură se vede imediat că

$$\overline{MB'} = \overline{PC'} \; ; \; \overline{QA'} = \overline{NB'} \; ; \; \overline{MA'} = \overline{NC'} \; ; \; \overline{QD'} = \overline{NC'}$$

aşa încât avem imediat:

$$\frac{\overline{SD'}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{S'D'}}{\overline{S'B'}}$$

ceea ce arată că punctele S şi S' se confundă.

In mod analog se demonstrează că dreptele MN şi PQ se întâlnesc pe diagonala AC.

S'a primit dela D-l AUREL I. CORNĂŢEANU o soluţie bună *analitică*, luând ca axe oblice chiar diagonalele patrulaterului.

D-l GEORGE SILAŞ a trimes o soluţie — cam lungă — trigonometrică.

S'au mai primit două soluţii, dela doi camarazi — colegi de clasă — în care prima parte e bună, dar în a doua parte a demonstraţiei au un raţionament fals identic.

Observaţie. Pentru a demonstra a doua parte a problemei se pot duce dreptele MP şi NQ până se întâlnesc în R şi obţinem paralelogramul MRNB', în care A'Q şi C'P sunt paralele cu laturile lui. Se poate aplica acestei figuri proprietatea din „G. M", Nota 26, Vol. XL, pag. 305.

PROBLEMA 5228. *In orice nonecagon regulat,* ABCDEFGHI *există relaţiile:*

$$\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = 2\left(\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\right) + 3\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}\right)^2; \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 - 2.$$

CERCHEZ MIHU.

Soluţie dată de D-l MIREL D. STOENESCU (Şc. Ofiţeri aviaţie Bucureşti).

Fie un poligon regulat de l laturi: ABCD... L, înscris în cercul de rază R, şi 2α unghiul la centru subîntins de fiecare latură.

Avem:

$$AB = 2R\sin\alpha;\ AC = 2R\sin 2\alpha;\ AD = 2R\sin 3\alpha;\ AE = 2R\sin 4\alpha.$$

Prima relaţie devine:

$$4\cos^2\alpha = 2 \cdot 2\cos 2\alpha + \frac{3\sin^2\alpha}{\sin^2 3\alpha}$$

sau:

$$4\cos^2\alpha = 4(2\cos^2\alpha - 1) + \frac{3\sin^2\alpha}{\sin^2 3\alpha};$$

$$(1) \quad \frac{3\sin^2\alpha}{\sin^2 3\alpha} = 4\sin^2\alpha \quad ; \quad \sin^2\alpha(4\sin^2 3\alpha - 3) = 0;$$

Neglijând soluția $\sin\alpha = 0$; obținem: $\sin 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; de unde: $\alpha = \frac{\pi}{9}$. Poligonul pentru care există această relație este un nonecagon regulat, fiecare latură subîntinzând un unghiu la centru egal cu $\frac{2\pi}{9}$.

Procedând analog pentru relația doua rectificată, obținem relația:

$$2\cos 2\alpha = 4\cos^2\alpha - 2;$$

care este verificată pentru orice valoare a lui α, fiind o identitate.

Relația doua este deci adevărată oricare ar fi poligonul regulat cu un număr de laturi $\geqslant 5$.

Au mai trimis soluții bune D-nii: POPA D. MIRCEA, DRĂGHICESCU P. PAUL (Lic. Militar Iași); BODNĂRESCU M. HORIA (elev-inginer Politehnica București); ALDEA V. MINEA (Buzău).

C. MIHU.

PROBLEMA 5451. *Una din aventurile „Profesorului* NIMBUS*“ constă în aruncarea unei săgeți cu un arc clasic, săgeata fiind legată de o măsea (pe care* NIMBUS *voia astfel să și-o scoată). Săgeata este asvârlită însă cu o viteză așa de mare, încât antrenează și pe* NIMBUS, *admițând — bine înțeles — că sfoara rezistă, iar măseaua nu cedează. Admițând că viteza săgeții nu scade până ce sfoara se întinde, că sfoara are o greutate neglijabilă și că este inextensibilă, că greutatea săgeții este 700 gr., iar a corpului lui* NIMBUS *70 kg.; se pun întrebările:*

1) *Cu ce viteză a fost asvârlită săgeata, viteza cu care este antrenat* NIMBUS *fiind de 10 m/sec.?*

2) *Este posibil să se realizeze această viteză cu un arc clasic, strunit de un om?*

CPT. C-DOR I. LINTEȘ.

1) Fie m_N masa „Profesorului NIMBUS“, m_s masa săgeții și V_s viteza cu care a fost asvârlită săgeata; atunci avem:

$$m_N \cdot 10 + m_s \cdot 10 = m_s \cdot V_s$$

Prin urmare:

$$V_s = 10 \cdot \frac{m_N + m_s}{m_s} = 10 \cdot \frac{70 + 0{,}7}{0{,}7} = 1010 \text{ m/sec.}$$

Aşa dar ar trebui o viteză de 1010 m/sec.

2) Energia necesară realizării acestei viteze este:

$$E = \frac{1}{2} m_s \cdot 1010^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}7}{9{,}81} \cdot 1010^2 = 36392{,}0675 \text{ kgm.}$$

Or, este imposibil ca un om să fie capabil de o asemenea energie. Dacă strunirea arcului s'ar face chiar într'un minut, ceea ce este totuşi greu, atunci *puterea* necesară ar depăşi *8 C.V.*, ceea ce nu este posibil unui om.

Altă cale pentru dovedirea imposibilităţei.

Dacă presupunem că strunirea arcului s'ar face pe o lungime de *un* metru (coarda s'ar deforma înspre înapoi, deplasându-se cu *un* metru), atunci *forţa* necesară ar trebui să fie de *3 6392,0675* kg., ceea ce nu este posibil unui om, care — în cele mai bune condiţiuni — abia poate depăşi rare ori, cu puţin, o forţă de 50 kg.

Notă. A rezolvat complet problema D-l I. I. INCULEŢ, care pentru al doilea punct a calculat forţa necesară.

A rezolvat numai primul punct al problemei D-l C. D. EFTIMIE,

I. L.

PROBLEMA 5452. *Se cer numerele* szu *şi* s'zu *de câte trei cifre care au pe* zu *ca divizor comun maxim.*

I. IONESCU.

Problema revine la a căuta mai întâi numerele de trei cifre *abc*, care se divid prin numărul format de ultimele lor două cifre *bc*.

Deci:

$$100a + bc = k \cdot bc$$

$$\therefore \quad 100a = (k - 1) \cdot bc.$$

Studiez problema după valorile cifrei a. $(0 < a < 10)$, şi avem tabloul:

a	bc
1	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50
2	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50
3	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75
4	1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20 25, 40, 50, 80
5	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50
6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75
7	1, 2, 4, 5, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 50, 70
8	1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 80
9	1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75

Este clar că putem forma, cu ajutorul acestui tablou, toate numerele de trei cifre *abc*, care se divid prin numărul *bc*, format de ultimele două cifre ale lui.

Printre numerele *abc* se găsesc şi numerele *szu* şi *s'zu* care au pe *zu* ca divizor comun maxim. Câturile lui *abc* prin *zu* trebue deci să fie prime între ele.

Voiu studia deci problema după diferitele valori ce le poate lua *zu*, valori care le are *bc* după tabloul alcătuit.

1. $zu = 01$. Putem lua *szu*, *s'zu* = 101, 201, 301, 401, 501, 601, 701, 801, 901. Putem grupa aceste numere câte două, afară de 201 cu 501 sau cu 801 şi pe 501 cu 801 care sunt M3. Deci avem $\frac{1}{2} 9 \times 8 - 3 = 33$ soluţii.

2. $zu = 02$. Putem lua *szu*, s'*zu* = 102, 202, 302, 402, 502, 602, 702, 802, 902. Putem grupa aceste numere câte două afară de 102 cu 402 sau 702 şi 402 cu 702 care sunt şi M3, nu numai de 2. Deci avem şi aci 33 soluţii.

3. $zu = 03$. Putem lua *szu*, *s'zu* = 303, 603, 903. Combinate câte două, obţinem 3 soluţii.

4. $zu = 04$. Putem lua *szu*, *s'zu* = 104, 204, 304, 404, 504, 604, 704, 804, 904. Observăm că numerele 104, 304, 504, 704, 904 sunt M8 şi nu pot fi împerechiate spre a da soluţii. Apoi

204, 504, 804 sunt M3 şi nu le putem împerechia. Rămân în acest caz numai 23 soluţii.

5. $zu = 05$. Putem lua *szu*, $s'zu = 105$, 205, 305, 405, 505, 605, 705, 805, 905. Observăm că 105, 405, şi 705 sunt M3 şi 105 şi 845 sunt M7. Deci se pierd 4 soluţii şi rămân 32.

6. $zu = 06$. Putem lua *szu*, $s'zu = 306$, 606, 906, care se pot grupa câte două în trei feluri. Deci avem aci 3 soluţii.

7. $zu = 07$. Putem lua *szu*, $s'zu = 707$ numai. Nu avem soluţie.

8. $zu = 08$. Putem lua *szu*, $s'zu = 208$, 408, 608, 808 care se pot grupa în 5 feluri. Deci avem aci 5 soluţii.

9. $zu = 09$. Putem lua numai *szu*, $s'zu = 909$. Nu avem nicio soluţie, căci nu putem găsi o pereche de numere.

10. $zu = 10$. Putem lua *szu*, $s'zu = 110$, 210, 310, 410, 510, 610, 710, 810, 910. Insă numerele 210, 510, 810 sunt M3 şi 210 şi 910 sunt M7. Deci se pierd patru perechi şi rămân 32 soluţii.

11. $zu = 12$. Putem lua *szu*, $s'zu = 312$, 612, 912. Acestea dau două perechi, deci 2 soluţii.

12. $zu = 14$. Putem lua numai *szu*, $s'zu = 714$. Deci nu avem nici o soluţie.

13. $zu = 15$. Putem lua *szu*, $s'zu = 315$, 615, 915. Deci trei grupe şi prin urmare 3 soluţii.

14. $zu = 16$. Putem lua *szu*, $s'zu = 416$, 816. Deci o singură soluţie.

15. $zu = 18$. Putem lua numai *szu*, $s'zu = 918$. Deci nu avem soluţie în acest caz.

16. $zu = 20$. Putem lua *szu*, $s'zu = 120$, 220, 320, 420, 520, 620, 720, 820, 920. Insă 120, 320, 520, 720, 920 sunt M8 pe când *zu* nu are factorul 8. Apoi 120, 420, 720 sunt M3. Grupa 120, 720 se întâlneşte în ambele cazuri. Deci ne rămân 24 soluţii.

17. $zu = 25$. Putem lua *szu*, $s'zu = 125$, 225, 325, 425, 525, 625, 725, 825, 925. Insă 125 şi 625 sunt $M5^3$ pe când *zu* numai $M5^2$; numerele 225, 525 şi 825 sunt M3. Găsim aci 32 soluţii.

18. $zu = 28$. Putem lua *szu*, $s'zu = 728$. Nu avem soluţie.

19. $zu = 30$. Putem lua *szu*, $s'zu = 330$, 630, 930. Deci 3 soluţii.

20. $zu = 32$. Putem lua *szu*, $s'zu = 832$. Nu avem soluţie.

21. $zu = 35$. Putem lua *szu*, $s'zu = 735$. Nicio soluţie.

22. $zu = 36$. Putem lua *szu*, $s'zu = 936$. Nicio soluţie.

23. $zu = 40$. Putem lua *szu*, $s'zu = 240$, 440, 640, 840. Cu acestea putem forma 4 soluţii.

24. $zu = 45$. Putem lua *szu*, $s'zu = 945$. Nu avem soluție.

25. $zu = 50$. Putem lua *szu*, $s'zu = 150$, 250, 350, 450, 550, 650, 750, 850, 950. Observăm că 150, 450, 850 sunt M3, iar 250 și 750 sunt $M5^2$. Deci se pierd patru împerechieri și ne rămân 32 soluții.

26. $zu = 60$. Putem lua *szu*, $s'zu = 360$, 660, 960 care ne dau 2 soluții.

27. $zu = 70$. Putem lua *szu*, $s'zu = 770$, Nu avem soluție.

28. $zu = 75$. Putem lua *szu*, $s'zu = 375$, 675, 975, care ne dau 3 soluții.

29. $zu = 80$ Putem lua *szu*, $s'zu = 480$, 880. Deci 1 soluție.

Problema admite prin urmare:

$$33+33+3+23+32+3+0+5+0+32+2+0+3+1+0+24+$$
$$+32+0+3+0+0+0+4+0+32+2+0+3+1=271 \text{ soluții}$$

P. P. DRĂGHICESCU
(Elev, Liceul Militar, Iași)

D-l IOAN C. NEGRESCU (Elev, clasa VIII-a, Liceul „Spiru Haret", București), a rezolvat problema numai pentru cazul când *zu* este efectiv de două cifre, neadmițând soluții formale cu $zu = 01, 02, \ldots$

PROBLEMA 5457. *Fie* M, N, P *trei puncte în planul triunghiului* ABC *astfel ca*

$$\sphericalangle BAP = \sphericalangle NAC = \alpha$$

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle MBC = \beta$$

$$\sphericalangle BCM = \sphericalangle NCA = \gamma.$$

Fie P', M', N' *punctele determinate de perechile de drepte* (BM, AN); (CN, BP); (AP, CM). *Dreptele* MM', NN', PP' *taie laturile* BC, CA, AB *în punctele* M", N", P". *Să se arate că*

1°. *Dreptele* AM, BN, CP *sunt concurente.*

2°. *Dreptele* AM', BN', CP' *sunt concurente.*

3°. *Dreptele* AM", BN", CP" *sunt concurente.*

4°. *Dreptele* MM', NN', PP' *sunt concurente.*

MIRCEA D. POPA.

Soluție dată de D-l PAUL I. DRĂGHICESCU, liceul militar, Iași. Știm că dacă trei ceviene sunt concurente și isogonalele lor sunt concurente [1]) și reciproc. MB, M'B și MC, M'C fiind isogonale în unghiurile B, C rezultă că și AM, AM' sunt isogonale în unghiul A. Analog sunt isogonale NB, N'B și PC, P'C.

1°. Din concurența triplelor (MA, MB, MC); (NA, NB, NC) și (PA, PB, PC) rezultă

$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin (B-\beta)} \cdot \frac{\sin (C-\gamma)}{\sin \gamma} = 1$$

și analoagele. Inmulțind, avem

$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC} \cdot \frac{\sin NBC}{\sin NBA} \cdot \frac{\sin PCA}{\sin PCB} = 1$$

adică dreptele AM, BN, CP sunt concurente într'un punct Q.

2°. In mod analog, dreptele AM', BN', CP' sunt concurente într'un punct Q', inversul lui Q.

3°. In triunghiurile BM'M'' și CM'M'' avem

$$\frac{\overline{M''B}}{\overline{M''C}} = \frac{\sin M''M'B}{\sin M''M'C} \cdot \frac{\sin M'CM''}{\sin M'BM''}$$

dar în triunghiul M'BC, dreptele M'M'', BM, CM sunt concurente, deci

$$\frac{\sin M''M'B}{\sin M''M'C} \cdot \frac{\sin MBC}{\sin MBA} \cdot \frac{\sin MCA}{\sin MCB} = 1$$

de unde

$$\frac{\overline{M''B}}{\overline{M''C}} = \frac{\sin (B-\beta)}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin (C-\gamma)} \cdot \frac{\sin (C-\gamma)}{\sin (B-\beta)} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

și analoagele; înmulțind, obținem

$$\frac{\overline{M''B}}{\overline{M''C}} \cdot \frac{\overline{N''C}}{\overline{N''A}} \cdot \frac{\overline{P''A}}{\overline{P''B}} = 1$$

deci dreptele AM'', BN'', CP'' sunt concurente.

---

1) Culegere de Probleme de Geometrie, IX, 32.

4°. Vârfurile opuse M, M′; Q, Q′ ale patrulaterului complect determinat fiind isogonale şi celelalte două vârfuri sunt isogonale [1]); deci dreptele M′Q, MQ′ se taie pe BC; rezultă că triunghiurile QM′N şi Q′MN′ sunt omologice deci MM′, NN′ se taie într'un punct pe QQ′ şi analog şi PP′.

Problema aceasta generalizează problema 4956 [2]), rezolvată în Vol. XLV.

EXERCIŢII

7. In triunghiul ABC fie θ unghiul făcut de înălţimea AA′ cu dreapta care uneşte ortocentrul H cu mijlocul A_1 al laturei BC. Avem relaţia

$$2\,\mathrm{tg}\theta = \mathrm{tg}B - \mathrm{tg}C.$$

V. ECKSTEIN.

R. Avem:

$$A'A_1 = R\sin(B-C) \quad , \quad HA' = 2R\cos B\cos C$$

deci

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{A'A_1}{HA'} = \frac{\sin(B-C)}{2\cos B\cos C} = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}B - \mathrm{tg}C).$$

8. Intr'un triunghiu dreptunghic punctul lui LEMOINE se găseşte la mijlocul simedianei ce pleacă din vârful unghiului drept.

P. P. DRĂGHICESCU.

R. Fie AA′, BB′, CC′ simedianele şi K punctul lor de întâlnire. După teorema lui VAN AUBEL

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KA'}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} + \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

însă

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{c^2}{a^2} \text{ şi } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{KA}}{\overline{KA'}} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = 1.$$

1) Problema 2985 propusă în G. M., Vol. XXVIII şi a cărei soluţie încă nu s'a publicat.

2) O. N. ŢINO, G. M., XLV, 48.

9. Fie I un punct în planul triunghiului ABC şi D, D_1 două drepte paralele. Perpendicularele din I pe BC, CA, AB taie pe D în M, N, P. Perpendicularele în M, N, P pe D taie pe D_1 în M_1, N_1, P_1. Să se arate că perpendicularele din M_1, N_1, P_1 pe BC, CA, AB sunt concurente.

RADU P. VOINEA.

R. Fie I_1 intersecţia perpendicularelor din M_1 pe BC şi din I pe D. Patrulaterul II_1M_1M cu laturile opuse paralele este paralelogram deci $\overline{II_1} = \overline{MM_1}$ = distanţa (D, D_1); rezultă că I_1 nu depinde de M; atunci dreptele din enunţ trec toate prin I_1.

10. Se dă triunghiul isoscel ABC şi un punct fix I pe latura AC egală cu CB. Fie M intersecţia laturii AB cu o paralelă dusă prin I la BC. Ştiind că I şi M sunt fixe, se cere locul lui A.

C. V. PANTELIMON.

R. Avem pe figură

$$\sphericalangle IMA = \sphericalangle ABC$$

ca alterne interne şi cum AC = BC rezultă că

$$\sphericalangle AMI = \sphericalangle MAI,$$

deci

$$\overline{IA} = \overline{IM} = const.$$

Locul cerut este cercul cu centrul I şi raza IM.

PROBLEME PROPUSE

5592. Care este mia de numere consecutive, cele mai mici, în care nu se găseşte nici o putere perfectă?

I. IONESCU.

5593. Să se arate că numărul obţinut intercalând între cifrele numărului 111 câte n zerori este divizibil cu 111 atunci când n este nedivizibil cu 3.

COMANDOR GR. ZAPAN.

5594. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$\varphi_4(7^x \cdot 11^y) = 2^z,$$

unde $\varphi_i(I)$ înseamnă indicatorul de ordinul i al lui I.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5595. Să se găsească un bipătrat perfect ştiind că cele nouă cifre cu care se scrie acel bipătrat şi rădăcina a patra a sa, sunt toate diferite între ele.

V. THÉBAULT.

5596. Dacă α, β, γ sunt punctele în care dreapta lui EULER întâlneşte laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu în care $\sphericalangle A > \sphericalangle B > \sphericalangle C$, atunci avem relaţiile

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} - \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} = \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} + \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} = \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}} - \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}.$$

IULIAN PETRESCU.

5597. Ştiind că axul ortic al triunghiului ABC este paralel cu latura BC, se cere să se construiască triunghiul când se cunoaşte lungimea laturii BC, direcţia ei şi distanţa dela ea la axul ortic.

M. L. RUSU.

5598. Să se demonstreze că polarele unui punct de pe axa adicală a două cercuri se întâlnesc pe acea axă radicală.

Reciproc, dacă polarele unui punct M faţă de cercurile C_1, C_2 se întâlnesc pe axa radicală a acestor cercuri, atunci M se află pe axa lor radicală.

G-L GH. BUICLIU.

5599. La finele fiecărui an se depune la o bancă suma a imp de k ani. In cei k ani următori se depune suma $2a$, apoi în următorii k ani suma $3a$, şi aşa mai departe.

Ştiind că aceste depuneri se fac cu dobândă compusă cu procentul de r lei la un leu, să se arate că valoarea capitalului definitiv după nk ani este dată de formula

$$A = \frac{a}{r}\left[\frac{(1+r)^{nk}-1}{(1+r)^k-1}(1+r)^k - n\right].$$

GH. BASACOV.

5600. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul al doilea şi cu coeficienţi raţionali, astfel ca polinomul $P[(x-a)(x-b)(x-1)]$ să fie divizibil prin polinomul $P[(x-a)(x-b)]$, a şi b fiind cantităţi raţionale date.

G. G. CONSTANTINESCU.

5601. Se consideră şirul cu termenul general u_n, astfel ca

$$u_n = pu_{n-1} + u_{n-2} \quad , \quad u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = p,$$

p fiind un număr dat. Să se demonstreze că seria:

$$\frac{1}{u_0 u_{2k}} + \frac{1}{u_k u_{3k}} + \ldots + \frac{1}{u_{nk} u_{(n+2)k}} + \ldots$$

este convergentă şi să i se găsească suma.

M. GHERMĂNESCU.

5602. Să se calculeze suma:

$$S = 1^2 . \sin(a+b) + 2^2 . \sin(a+2b) + \ldots + m^2 \sin(a+mb).$$

GH. D. SIMIONESCU.

5603. Un proiectil de greutate P este asvârlit sub unghiul de tragere α cu iuţeală v_0. Ajungând în punctul cel mai înalt, proiectilul explodează spărgându-se în trei schije.

Prima schijă, de greutate P_1, urmează mai departe traiectoria pe care ar fi avut-o proiectilul în cazul când n'ar fi făcut explozie. Schija a doua, de greutate P_2, cade pe verticală fără iuţeală iniţială.

Să se studieze mişcarea schijei a treia. Să se arate că în tot timpul mişcării, cele trei schije se găsesc pe o orizontală.

Rezistenţa aerului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. 1°. La enunţul problemei 5381 se va adăuga: . . . ştiind că

$$\frac{x_0^2}{a^2 - \rho^2} + \frac{y_0^2}{b^2 - \rho^2} + \frac{z_0^2}{c^2 - \rho^2} = 1.$$

2°. Membrul întâi al egalităţii a doua a problemei 5580 propusă la pag. 199 în numărul trecut trebue citit

$$\frac{ab + bc}{bc + ad}.$$

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Ardeleanu Gh. (5531); *Bosinceanu I. C.* (5531); *Căpriţiu G. I.* (5557); *Chiţulescu Tr.* (5569); *Claudiu S.* (5569); *Constantinescu I. Em.* (5543); *Cotariu D. M.* (4991, 5544); *Cruceru Gh. C.* (5531, 47); *Drăghicescu P. P.* (4445, 4920, 5095, 527, 35, 36, 39, 57, 66, 74, A, N, P); *Gaiu Gh. N.* (A, N); *Gheorghiu E. Oct.* (3632, 5167, 76, 431, 56, 87, 530, 31, 61, P); *Ieşan St. Al.* (5569); *Lupu N. A.* (5550, 69); *Manoil E.* (5543, 69); *Manolache E. M.* (5569); *Mateescu A.* (5569); *Mihăiescu St.* (5577); *Mihalea I. I.* (5527, 69); *Oprea D. Gh.* (5543, 44, 69); *Pantelimon Const.* (5556); *Petrescu N. E.* (5544); *Popa N. A.* (5500, 30, 31); *Sbârnea D. Gh.* (5537, 44, 47); *Seni Cl.* (5072, 572, 74); *Stoenescu D. Mirel* (5473, 77, 562); *Stoianovici I. S.* (5536, 44, 69); *Tarcsewski A.* (5569); *Teodorescu St. I.* (5391, 517, P); *Thébault V.* (P); *Voicu D. Gh.* (5468, 73, 77, 86, 88, 507),

---

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea I-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 80 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 75767.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1942

BIBLIOTECA CENTR... ACADEMIEI R.P.R. SIBIU

SUMARUL

1. Matematica românească în Transnistria. *I. Ionescu.*
2. Curba, care, încovoiată, nu se schimbă. *A. Myller.*
3. Generalizarea unei teoreme a lui Pappus (urmare şi sfârşit). . . . . *D. V. Ionescu.*
4. Corespondenţa prin tangente isocline (urmare şi sfârşit) . . . . . *D-tru Ion Mangeron.*
5. Concursul „Gazetei Matematice". . . *Delegaţia Societăţii.*
6. Note Matematice: 24—26.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 2566, 4396, 4872, 5042, 5134, 5194, 5208, 5233, 5369, 5469, 5556, 5557.
11. Exerciţii: 11.
12. Probleme propuse: 5523, 5604 — 5616.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **55**42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, €00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

MATEMATICA ROMÂNEASCĂ IN TRANSNISTRIA

Dincolo de Nistru, pe lățimi destul de apreciabile, chiar până dincolo de Bug și în unele locuri și dincolo de Nipru s'au răspândit Moldoveni din Basarabia pentru care Rușii creaseră o administrație a parte, zisă *moldovenească*. Pentru Românii de acolo s'au făcut școli primare și secundare (*medii* sau *mijlocii*) cu predarea cursurilor în limba română. Pentru aceasta a fost nevoie a se tipări cărți didactice în limba română.

D-l Profesor G. G. CONSTANTINESCU, a luat parte la luptele dintre Nistru și Bug, la ocuparea orașului *Balta*. D-sa s'a dus la *Institutul Moldovenesc* care era în flacări și a găsit acolo cărți matematice pentru școală, din care a luat 17 volume pe care le-a adus la București și le-a făcut donație Bibliotecii *Gazetei Matematice*. Printre acestea unele sunt referitoare la Școlile primare, altele pentru cele medii și pentru Școlile de adulți și cuprind *aritmetică, geometrie, algebră* și *trigonometrie*.

Cărțile sunt traduse sau adaptate după autori ruși; ele sunt tipărite în *Editura de Stat a Moldovei*, la Tiraspol sau Balta. Cărțile sunt scrise cu litere latine, cu o ortografie îngrijită, puțin diferită de a noastră. Formulele algebrice sunt bine aranjate, deși nu peste tot în mod estetic. Nomenclatura este cea românească cu mici diferențe. Pe pagina interioară cu Titlul cărții este o stampilă de înregistrare a cărții în Bibliotecă pe care este scris: „*Technicului Pedagogic Moldovenesc or Balta, Biblioteca înv.* No....". Pe unele coperte este scris: „MOLDOCOOPCARTEA".

Ca particularitate, găsim pe pagini dela început și dela fine numele Redactorului răspunzător sau responsabil, numele Redactorului literar, al Redactorului technic, al traducătorului și al corectorilor; în fine Tipografia la care s'a tipărit. După aceste informațiuni se spune când a fost dată cartea la cules, când a fost iscălită pentru tipar, numărul comenzii, tirajul, prețul cărții și al broșatului cartonat.

Este curios că unitățile de măsură întrebuințate în aceste cărți sunt cele ale sistemului metric. Unitățile ruseşti sunt date numai pentru echivalarea cu ale sistemului metric.

Cărțile aduse de D-l G. G. CONSTANTINESCU ar fi trebuit menționate în rubrica DIVERSE: *Sporirea Bibliotecii*, însă cum

ele prezintă un interes deosebit pentru matematica Românilor de dincolo de frontierele Regatului României întregite, le analizăm puţin aci. Vom grupa cărţile după specialităţi.

I. ARITMETICA

1. S. POPOVA. Manual de *aritmetică*, pentru Şcoala primară. Partea III. Anul al 3-lea şi al 4-lea de învăţământ. Tiraspol 1933. Se caută să se facă aplicaţii pentru priceperea regulilor; aşa de exemplu se aplică *abaca* cu bile căreia îi zice *socotelniţă*, se aplică regulile de operaţii la exemple de geometrie la scări, planuri, diagrame dreptunghiulare şi circulare, la arii şi volume. Calculul mintal nu este neglijat. Despărţirea zecimalelor se face cu virgulă.

2. I. POPOV. *Aritmetica*. Manual pentru Şcoala medie. Anul al cincilea de învăţământ. Tiraspol 1933. Cartea cuprinde Insemnarea şi citirea numerelor. Măsuri. Sistemul metric. Adunarea şi scăderea numerelor întregi. Inmulţirea şi împărţirea numerelor întregi. Ordinea operaţiilor, paranteze. Divizibilitatea numerelor. Insuşiri generale ale fracţiilor ordinare. Adunarea şi scăderea fracţiilor. Aflarea unei părţi dintr'un număr dat şi aflarea numărului după partea lui dată. Inmulţirea fracţiei cu un număr întreg. Impărţirea fracţilor ordinare. Fracţiile zecimale. Operaţii comune cu fracţii ordinare şi zecimale. Rapoarte şi proporţii. Procente. Formule şi calcularea după formule.

3. E. S. BEREZANSCAIA. *Culegere de probleme* şi exerciţii *de aritmetică* pentru Şcoala medie. Clasa 5. Tradusă după ediţia rusă. Ediţia II. Tiraspol 1935. Cartea conţine 1374 probleme enunţate, unele având date răspunsuri la fine.

4. I. BOGDANOV, Ş. CANTOR, A. COROLCOV. *Culegere de probleme de aritmetică* pentru şcoala de adulţi, cu puţină ştiinţă de carte, tradusă după ediţia a treia rusă. Ediţia II. Tiraspol-Balta 1935. Cartea conţine 1406 probleme, multe fiind cu aplicaţiuni la geometrie, diagrame, *graficiri*. Problemelor mai grele li s'au dat soluţiile la urmă sau numai răspunsurile.

(Va urma) I. IONESCU.

CURBA CARE, INCOVOIATĂ, NU SE SCHIMBĂ

„L'antiradiale de la spirale hyperbolique est la courbe qui se transforme en elle-même, quand on la courbe uniformément, c'est-à-dire on la courbe de manière que la grandeur de n'importe quel angle de deux tangentes, se change dans un rapport constant".

Zicem că o curbă e încovoiată uniform, atunci când e transformată într'alta astfel că, luând orice arc al curbei, acest arc, după transformare, păstrându-şi lungimea, se încovoaie în aşa fel, că unghiul format de tangentele la extremităţile lui se schimbă într'altul, a cărui mărime stă în raport constant faţă de aceea a celui dintâi.

Să notăm cu s arcul unei curbe date C socotit dela o origine fixă, cu φ unghiul format de tangentele la extremităţile lui şi cu s', φ' arcul şi unghiul curbei transformate C'. Incovoierea se exprimă prin relaţiile:

$$s = s'$$

$$\varphi = k\varphi'.$$

Fie ρ şi ρ' razele de curbură la curbele C şi C' şi

(1) $$\rho = f(s)$$

ecuaţia intrinsecă a curbei C. Din cauza relaţiilor

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds'}{k\,d\varphi'} = \frac{\rho'}{k}$$

ecuaţia curbei încovoiate C' va fi

(2) $$\rho' = kf(s').$$

Deoarece curba C poate fi reprezentată nu numai prin (1) dar şi prin

(3) $$\rho = f(s - s_0), \qquad (s_0 = \text{const.})$$

curba încovoiată C' va fi identică cu curba primitivă C, când ecuaţiile (2) şi (3) vor fi identice. Va trebui deci să avem

$$kf(s) = f(s - s_0).$$

Soluţia acestei ecuaţii funcţionale este:

$$f = ae^{ms} \qquad (k = e^{-ms_0})$$

şi deci

$$\rho = ae^{ms}$$

este ecuaţia curbei ce nu se schimbă prin încovoiere.

Această curbă e cunoscută; a fost indicată de E. CESARO *(Vorlesungen über natürliche Geometrie)* şi sunt stabilite două proprietăţi ale ei: este evolventa curbei *Antiloga* şi e antiradiala *Spiralei hiperbolice*. Forma ei e ca şi a acestei spirale.

A. MYLLER.

GENERALIZAREA UNEI TEOREME A LUI PAPPUS

(Urmare dela pag. 204)

4. Din formula (5) rezultă că *dacă punctul* M *este variabil pe* BC, *locul geometric al punctului* M', *este o dreaptă paralelă cu* BC, care întâlneşte pe AB şi AC în punctele B_1 şi C_1, astfel ca

$$(6) \qquad \frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1B}} = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1C}} = -\frac{\mu + \nu - \lambda}{\lambda}.$$

Se ştie că dacă avem $k = k' = k''$, ceea ce se întâmplă când $\lambda = \mu = \nu$, locul geometric al mijlocului lui NP, este dreapta care uneşte mijloacele locurilor AB şi AC ale triunghiului ABC. Rezultatul de mai sus, este generalizarea acestei proprietăţi când numerele λ, μ, ν sunt diferite între ele.

5. Dreapta PN unind puncte de pe AB şi AC care se corespund omografic, înfăşură o conică. Luând dreptele AB şi AC ca axe Ox şi Oy şi notând $AB = c$, $AC = b$ este uşor de văzut că ecuaţia acestei conice este

$$(7) \qquad \left(\frac{x}{\frac{c}{\nu}(\nu - \lambda + \mu)} - \frac{y}{\frac{b}{\mu}(\nu - \lambda + \mu)} - 1 \right)^2 = \frac{4y}{\frac{b}{\mu}(\nu - \lambda + \mu)}.$$

Se vede că această conică este o parabolă, a cărei axă este paralelă cu dreapta

$$\frac{\nu}{c} x = \frac{\mu}{b} y.$$

Dreapta aceasta coincide cu AA', deoarece coordonatele punctului A'

$$x = \frac{\mu c}{\mu + \nu} \quad , \quad y = \frac{\nu b}{\mu + \nu}$$

verifică ecuația dreptei.

Parabola precedentă este tangentă la AB și la AC în punctele B_a și C_a și avem

$$(8) \qquad \begin{cases} \overline{AB_a} = \dfrac{c}{\nu}(\nu - \lambda + \mu) \\ \overline{AC_a} = \dfrac{b}{\mu}(\nu - \lambda + \mu). \end{cases}$$

Se știe că dacă $\lambda = \mu = \nu$, atunci înfășurătoarea dreptei PN este o parabolă tangentă în B și C la AB și AC și a cărei axă este paralelă cu mediana dusă din A. Rezultatele de mai sus sunt generalizarea acestei proprietăți când λ, μ, ν sunt diferite între ele.

Observări.

1°. Dacă din formula (6) se calculează $\overline{AB_1}$ se găsește

$$\overline{AB_1} = c\,\frac{\mu + \nu - \lambda}{\mu + \nu}.$$

Calculându-se $\overline{B_1 B_a}$ se găsește

$$\overline{B_1 B_a} = \overline{AB_a} - \overline{AB_1}$$

adică

$$\overline{B_1 B_a} = \frac{c\mu}{\nu}\,\frac{\mu + \nu - \lambda}{\mu + \nu}.$$

Rezultă că

$$(9) \qquad \boxed{\frac{\overline{B_1 A}}{\overline{B_1 B_a}} = -\frac{\nu}{\mu}}.$$

Se știe că în cazul $\lambda = \mu = \nu$, B_1 este mijlocul lui AB și că B_a coincide cu B. In cazul când λ, μ, ν sunt diferite atunci avem relația (9).

Vom avea de asemenea

$$\frac{\overline{C_1 A}}{\overline{C_1 C_a}} = -\frac{\mu}{\nu}, \quad \text{de unde rezultă că} \quad \frac{\overline{B_1 A}}{\overline{B_1 B_a}} = \frac{\overline{C_1 C_a}}{\overline{C_1 A}}.$$

2°. Să notăm cu C_b, A_b punctele unde înfășurătoarea dreptei MP atinge dreptele BC, BA și cu A_c, B_c punctele unde înfășurătoarea dreptei MN atinge dreptele CA, CB. Să dovedim că

$$(10)\qquad \boxed{\overline{B_c C_b} = \overline{BC},\ \overline{C_a A_c} = \overline{CA},\ \overline{A_b B_a} = \overline{AB}}\ .$$

Într'adevăr după formulele (8), avem

$$(8')\qquad \overline{AB_a} = \frac{\overline{AB}}{\nu}(\nu - \lambda + \mu),\ \overline{AC_a} = \frac{\overline{AC}}{\mu}(\nu - \lambda + \mu)$$

și în mod analog

$$(8')\qquad \begin{cases} \overline{BC_b} = \dfrac{\overline{BC}}{\lambda}(\lambda - \mu + \nu),\ \overline{BA_b} = \dfrac{\overline{BA}}{\nu}(\lambda - \mu + \nu) \\ \overline{CA_c} = \dfrac{\overline{CA}}{\mu}(\mu - \nu + \lambda),\ \overline{CB_c} = \dfrac{\overline{CB}}{\lambda}(\mu - \nu + \lambda). \end{cases}$$

Avem

$$\overline{B_c C_b} = \overline{B_c C} + \overline{CB} + \overline{BC_b}$$

sau

$$\overline{B_c C_b} = \frac{\overline{BC}}{\lambda}(\lambda - \mu + \nu) + \frac{\overline{BC}}{\lambda}(\mu - \nu + \lambda) - \overline{BC}$$

adică

$$\overline{B_c C_b} = \overline{BC}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

6. Vom termina acest studiu cu câteva rezultate cu privire la aria triunghiului MNP.

Vom nota cu S *aria orientată* $\overline{ABC}$ și cu Σ *aria orientată* $\overline{MNP}$.

Este ușor de văzut că

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{1 + kk'k''}{(1+k)(1+k')(1+k'')}\ .$$

Înlocuind pe k' și k'' în funcție de k cu ajutorul formulelor (1) și (2), vom avea

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{\nu(\lambda-\mu+\nu)+(\lambda-\mu+\nu)(2\nu-\lambda-\mu)k+(\mu-\nu+\lambda)(2\mu-\nu-\lambda)k+\mu(\mu-\nu+\lambda)k^3}{\mu\nu(1+k)^3}\ .$$

Observăm că numărătorul are factorul $1+k$; simplificând vom avea

$$(11)\qquad \boxed{\frac{\Sigma}{S}=\frac{\mu(\mu-\nu+\lambda)k^2-(\mu-\nu+\lambda)(\nu-\mu+\lambda)k+\nu(\nu-\mu+\lambda)}{\mu\nu(1+k)^2}}$$

Din această formulă vom trage două concluzii:

1°. *Dacă* $\lambda+\mu+\nu=0$, atunci avem

$$\frac{\Sigma}{S}=-2,$$

ceea ce înseamnă că *triunghiurile* ABC, MNP *au orientări diferite şi că aria lui* MNP *este independentă de* k, *egală cu dublul ariei triunghiului* ABC.

2°. Să presupunem că $\lambda+\mu+\nu\neq 0$ şi să determinăm valorile lui k, k', k'' pentru care triunghiul MNP are aria minimă.

Derivând membrul al doilea al formulei (11), avem

$$\left(\frac{\Sigma}{S}\right)'=\frac{\lambda+\mu+\nu}{\mu\nu}\,\frac{(\mu-\nu+\lambda)k-(\lambda-\mu+\nu)}{(1+k)^3}.$$

Anulând derivata găsim valoarea lui k

$$k=\frac{\lambda-\mu+\nu}{\mu-\nu+\lambda}$$

iar valorile corespunzătoare ale lui k' şi k'' sunt date de formulele (1) şi (2), adică

$$k'=\frac{\mu-\nu+\lambda}{\nu-\lambda+\mu},\qquad k''=\frac{\nu-\lambda+\mu}{\lambda-\mu+\nu}.$$

Vom nota cu M_0, N_0, P_0 poziţiile punctelor M, N, P pentru aceste valori ale lui k, k' şi k''.

Observăm că

$$k.k'k''=1$$

ceea ce dovedeşte că *dreptele* AM_0, BN_0, CP_0 *sunt concurente.*

Aria triunghiului $M_0N_0P_0$ este

$$\Sigma_0=\frac{(\lambda-\mu+\nu)(\mu-\nu+\lambda)(\nu-\lambda+\mu)}{4\lambda\mu\nu}S.$$

Când $\lambda = \mu = \nu$, avem $k = k' = k''$ şi se ştie că minimul ariei triunghiului MNP este $\frac{1}{4}$ S şi are loc când M, N, P sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB; ceea ce se verifică şi pe formulele de mai sus.

Observare. Dreptele AM, BN, CP sunt concurente, pentru valorile lui k pentru care

$$kk'k'' = 1.$$

Această ecuaţie de gradul al treilea

$$\mu(\mu - \nu + \lambda)k^3 + [2\mu^2 - \mu(\lambda + \nu) - (\lambda - \nu)^2]k^2 +$$

$$+ [(\lambda - \mu)^2 + \nu(\lambda + \mu) - 2\nu^2]k - \nu(\lambda - \mu + \nu) = 0$$

are rădăcina

$$k = \frac{\lambda - \mu + \nu}{\mu - \nu + \lambda}$$

şi alte două rădăcini date de ecuaţia de gradul al doilea

$$\mu k^2 + (\mu + \nu - \nu)k + \nu = 0.$$

7. Pentru a termina să observăm că M_0 *este mijlocul segmentelor* $\overline{BC_b}$, $\overline{CB_c}$; N_0 *este mijlocul segmentelor* $\overline{CA_c}$, $\overline{AC_a}$; P_0 *este mijlocul segmentelor* $\overline{AB_a}$, $\overline{BA_b}$.

Intr'adevăr din formula

$$\frac{\overline{M_0B}}{\overline{M_0B}} = -\frac{\lambda - \mu + \nu}{\mu - \nu + \lambda},$$

se deduce că

$$\overline{BM_0} = \frac{1}{2}\frac{\overline{BC}}{\lambda}(\lambda - \mu + \nu)$$

$$\overline{CM_0} = \frac{1}{2}\frac{\overline{CB}}{\lambda}(\mu - \nu + \lambda)$$

şi comparând cu formulele (8'), se deduce

$$\overline{BM_0} = \frac{1}{2}\overline{BC_b} \quad , \quad \overline{CM_0} = \frac{1}{2}\overline{CB_c}$$

ceea ce justifică enunţul de mai sus.

D. V. IONESCU.

CORESPONDENȚA PRIN TANGENTE ISOCLINE

(Urmare dela pag. 212)

4. Să considerăm curbele C_1 și C_2 și pe ele perechi de puncte corespunzătoare M_1, M_2; M_1', M_2'; M_1'', M_2'';.... Să ducem printr'un punct fix P al planului, pe care-l numim *pol*, razele vectoare PR, PR', PR'',... egale și paralele segmentelor M_1M_2, M_1M_2', $M_1'M_2''$,... Extremitățile R, R', R'',... ale acestor raze dau naștere la o curbă G pe care o vom numi *aproapespirală*.

Dacă ecuațiunile curbelor C_1 și C_2 sunt (1) și (2) și dacă se ia ca pol originea, ecuațiunile aproapespiralei devin

$$x = x_2(t) - x_1(t) \quad , \quad y = y_2(t) - y_1(t).$$

Această curbă are panta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}.$$

Unghiurile φ_1 și φ_2 formate de tangenta într'unul din punctele sale și tangentele corespunzătoare ale curbelor C_1 și C_2, sunt date respectiv de relațiile

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{x_1' y_2' - x_2' y_1'}{x_1' x_2' + y_1' y_2' - x_1'^2 - y_1'^2}$$

și

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{x_1' y_2' - x_2' y_1'}{x_1' x_2' + y_1' y_2' - x_2'^2 - y_2'^2}$$

S'ar putea deduce aici, în aceeași ordine de idei, ecuația înfășuratei tangentelor la aproapespirală în punctele curbei $C_2(C_1)$ când polul ei parcurge curba $C_1(C_2)$. In cazul corespondenței prin tangente paralele (unghiul $\alpha = 0$), avem $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ și regăsim faptele geometrice sugestive, enunțate de D-l MYLLER.

Să ne ocupăm o clipă de un caz particular.

Să considerăm sistemul S format din drepte normale la C_1. Unghiul α fiind fixat, curbele C_2, isocline curbei C_1 dealungul acestui sistem, apar ca traiectorii ce taie dreptele sistemului S sub un unghiu constant $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ecuațiunile curbelor C_2, păstrând notațiile obișnuite, sunt date prin egalitățile

$$x_2 = x_1 + \rho \frac{y_1'}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}} = x_1 + \rho \frac{dy_1}{ds},$$

$$y_2 = y_1 - \rho \frac{x_1'}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2}} = y_1 - \rho \frac{dx_1}{ds}$$

unde ρ satisface la următoarea ecuație diferențială

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg}\beta \frac{d\rho}{ds} - \frac{\rho}{r} - 1 = 0,$$

r fiind raza de curbură a curbei C_1 în punctul corespunzător valorii t a parametrului.

Ecuațiile aproapespiralei ce-și are polul ei în origine sunt

$$x = \rho \frac{dy_1}{ds}, \quad y = -\rho \frac{dx_1}{ds}.$$

Unghiul V al aproapespiralei cu raza vectoare corespunzătoare este dat prin relația

$$\operatorname{cotg} V = \left(1 + \frac{r}{\rho}\right) \operatorname{cotg}\beta.$$

Curba C_1 rămânând oarecare, aceste formule ne dau $\rho = \text{cst.}$, $V = \frac{\pi}{2}$ pentru $\alpha = 0 \left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$. Prin urmare aproapespirala se reduce în acest caz la un cerc. Pentru $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ (și, în consecință, $\alpha \neq 0$), nu vom semnala decât un caz particular și anume acel în care curba C_1 și isoclinele sale de unghiul α dealungul sistemului considerat sunt astfel că se are relația $\rho = mr$, m fiind o constantă. Ecuația intrinsecă a acestor curbe este atunci

$$r = \frac{m+1}{m} s \operatorname{cotg}\beta + c,$$

c fiind o constantă arbitrară.

Ele sunt, împreună cu aproapespiralele corespunzătoare niște spirale logaritmice.

Se poate regăsi pe această cale, alegând pentru sistemul S drepte ce taie C_1 sub un unghiu constant şi particularizând apoi valoarea lui ρ, proprietăţile clasice ale spiralei logaritmice şi, în particular, aceea care i-a dat şi pronumele de „spira mirabilis“ [1]).

5. Să stabilim acum o formulă care să dea curbele isocline unei curbe date C_1 când se defineşte aproapenormala în M_1 prin unghiul ω ce-l face cu Ox. Unghiul θ pe care-l formează tangenta în M_1 cu Ox este atunci o funcţie

$$\theta = \theta(\omega)$$

de unghiul ω.

Fie (I) ecuaţiunile curbei C_1 şi ρ lungimea segmentului M_1M cuprins între C_1 şi isoclina sa. Coordonatele punctului M vor fi

$$x = x_1 + \rho\cos\omega \quad , \quad y = y_1 + \rho\sin\omega.$$

Să exprimăm, pentru a-l determina pe ρ, că tangentele în M_1 şi M formează unghiul α.

Vom găsi astfel pentru ρ următoarea ecuaţie diferenţială liniară:

$$[(x_1'\cos\omega + y_1'\sin\omega)\,\mathrm{tg}\alpha - x_1'\sin\omega + y_1'\cos\omega]\,\rho' +$$

$$+ [(y_1'\cos\omega - x_1'\sin\omega)\,\mathrm{tg}\alpha - x_1'\cos\omega - y_1'\sin\omega]\,\rho\omega' + \mathrm{tg}\alpha\,(x_1'^2 + y_1'^2) = 0,$$

care devine, introducând ca parametru arcul s al curbei C_1, socoti dela un punct de pe C_1 luat ca origine,

$$(11) \qquad [\mathrm{tg}\alpha\cos(\theta - \omega) + \sin(\theta - \omega)]\frac{d\theta}{ds} +$$

$$+ [\mathrm{tg}\alpha\sin(\theta - \omega) - \cos(\theta - \omega)]\,\rho\frac{d\omega}{ds} + \mathrm{tg}\alpha = 0.$$

Sistemul S, pentru $\theta = \omega$, este format de tangentele la curba C_1. Curbele C_2 apar ca fiind traiectoriile ce taie sub un unghiu constant tangentele la curba C_1. In fine, regăsim, pentru $\omega - \theta = \frac{\pi}{2}$, ecuaţia (10) şi cazul considerat la numărul precedent.

Numai în cazul unei corespondenţe prin tangente paralele avem $\alpha = 0$ şi ecuaţia (11) se reduce la

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\,d\omega\,\mathrm{cotg}(\omega - \theta),$$

căpătând u-se astfel ecuaţia aproape spiralei în coordonate polare ρ şi ω

1) v. d. ex. Enc. der math. Wiss., III D. 4, p. 211.

6. Corespondența prin tangente isocline a curbelor C_1 și C_2 — observăm acest lucru în treacăt — induce o alta de același unghiu între desfășuratele lor D_1 și D_2.

7. Să considerăm tangentele corespunzătoare curbelor C_1 și uneia din isoclinele sale. Locul punctelor de intersecție ale acestor tangente dă naștere la o curbă pe care o numim *curba-satelit* a isoclinelor considerate.

Ecuațiile ei sunt

$$x = x_1 + \lambda(1+\lambda)\frac{x_2'(y_2-y_1) + y_2'(x_1-x_2)}{\lambda'[y_1'(x_2-x_1) - x_1'(y_2-y_1)] + \lambda(1+\lambda)(x_2'y_1' - x_1'y_2')}x_1'$$

și

$$y = y_1 + \lambda(1+\lambda)\frac{x_2'(y_2-y_1) + y_2'(x_1-x_2)}{\lambda'[y_1'(x_2-x_1) - x_1'(y_2-y_1)] + \lambda(1+\lambda)(x_2'y_1' - x_1'y_2')}y_1'$$

In particular, pentru cazul limită $\lambda = \infty$, se găsesc ecuațiile curbei-satelit a curbelor C_1 și C_2 și anume

$$x = x_1 + \frac{x_2'(y_2-y_1) + y_2'(x_1-x_2)}{x_2'y_1' - x_1'y_2'}x_1'$$

și

$$y = y_1 + \frac{x_2'(y_2-y_1) + y_2'(x_1-x_2)}{x_2'y_1' - x_1'y_2'}y_1'.$$

Nu e poate lipsit de interes să facem aici o observație aproape evidentă. Considerând problema determinării curbei-satelit dintr'un alt punct de vedere, aceasta ne apare ca locul vârfurilor unui unghiu constant circumscris la două curbe date distincte sau coincidente.

Fie $\operatorname{tg}\psi$ panta tangentei la curba-satelit, $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, pantele tangentelor la curbele isocline C_1 și C_2 și $\operatorname{tg}\omega$ panta aproape-normalei, toate corespunzătoare la o aceeași valoare t a parametrului. Se are relația

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\omega-\alpha_1) - \sin\alpha_2 \sin(\omega-\alpha_2)}{\cos\alpha_1 \sin(\omega-\alpha_1) - \cos\alpha_2 \sin(\omega-\alpha_2)}$$

unde

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha.$$

Din aceste formule şi din acelea din numerele precedente, studenţii noştri, căci ei sunt acei cărora li-am destinat această lucrare, vor putea afla un izvor de multe exerciţii, particularizând fie curbele C_1 şi C_2, fie valoarea unghiului α, fie poziţia sistemului S de drepte faţă de una din curbele considerate, şi să regăsească astfel o mulţime de rezultate elementare clasice din geometria diferenţială sau din geometria analitică.

DUMITRU ION MANGERON
Seminarul Matematic al Universităţii din Iaşi.

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE"

După cum s'a anunţat în numărul 2, din Octomvrie 1941, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi studenţii anului I al Politehnicei din Bucureşti.

Au fost admişi următorii candidaţi pentru concurs:

Clasa IV-a: *Bârzescu Mircea, Ciumaşu Viorel, Nache D. Dumitru.*

Clasa V-a: *Columbeanu D. Petre, Ghiţă M. Vasile, Ieşan St. Alexandru, Mihăilescu I. Ştefan, Munteanu P. Vlad, Pavica A. Victor, Pitiş L. Nicolae, Roşu T. Nicolae, Şerbănescu I. Victor.*

Clasa VI-a: *Andreescu Mihai, Andrei G. Aurel, Balea I. Ioan, Căpriţă G. Ioan, Dumitrescu F. Dan, Fânaru N. Dumitru, Gâţă G. Gheorghe, Ionescu Marieta, Mihalcu I. Ilie, Staicu I. Constantin, Turculeţ D. Tiberiu, Vasiliu G. Dumitru.*

Clasa VII-a: *Aron I. Gheorghe, Căruntu D. Florin, Constantinescu I. Emil, Dobrescu V. Eugen, Oprea D. Gheorghe, Popa T. Teodor, Popescu G. Marin, Puchiu T. Gheorghiu, Stoianovici I. Şerban.*

Clasa VIII-a: *Aldea Virgil, Arendt R. Emil, Bogdan Gr. Gheorghe, Diaconescu V. Constantin, Drăghicescu P. Paul, Floreşteanu Alexandru, Mănescu G. Ioan, Miroslav Tudorel, Musceleanu S. Doru, Musceleanu S. Vinicius Ştefan Ion, Popa N. Aurel.*

Anul I al Politehnicei Bucureşti: *Cruceru Gh. Constantin, Mărgărit I. Nicolae, Sbârnea D. Gheorghe.*

Adică 3 candidaţi pentru clasa IV-a, 9 pentru clasa V-a, 12 pentru clasa VI-a, 9 pentru clasa VII-a, 11 pentru clasa VIII-a şi 3 pentru anul I al Politehnicei Bucureşti.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă va avea loc Joi 9 Aprilie 1942, dela ora 8^{30} până la 11^{30}; iar a doua lucrare scrisă în aceeaşi zi, dela ora 15 până la ora 18 la Politehnică, Calea Griviţei 132, Bucureşti.

Oralul va începe Vineri 10 Aprilie, ora 8^{30}, tot în localul Politehnicei. Candidaţilor elevi de liceu înscrişi la concurs, care nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererilor lor), li se vor trimete în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti în tot timpul concursului.

Eventualele modificări vor fi la timp comunicate.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

NOTE MATEMATICE

24. *Asupra unor neegalităţi cu indicatori de ordin superior.* In G. M., XXXIII, pag. 444, am stabilit următoarea neegalitate:

$$\varphi_\alpha(a^\alpha) \cdot \varphi_\beta(a^\beta) \geqslant \varphi_{\alpha+\beta}(a^{\alpha+\beta})$$

a fiind un număr prim.

Am arătat acolo că:

$$\varphi_\alpha \quad (a^\alpha) \quad = (a-1) \cdot A_\alpha$$

$$\varphi_\beta \quad (a^\beta) \quad = (a-1) \cdot A_\beta$$

$$\varphi_{\alpha+\beta}(a^{\alpha+\beta}) = (a-1) \cdot A_{\alpha+\beta}.$$

Tot acolo am arătat că:

$$A_i > A_{i+k} \quad \text{dacă} \quad k \geqslant 1.$$

Dar aceasta nu-i adevărat, ci

dimpotrivă avem: $A_i < A_{i+k}$.

In general avem:

$$A_i = 2^{i_1} \cdot 3^{i_2} \ldots$$

Prin urmare vom avea, în cazul nostru:

$$A_\alpha = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \ldots$$

$$A_\beta = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \ldots$$

$$A_{\alpha+\beta} = 2^{(\alpha_1+\beta_1)} \cdot 3^{(\alpha_2+\beta_2)} \ldots$$

Deci neegalitatea va fi satisfăcută dacă avem:

$$(a-1)^2 \cdot A_\alpha \cdot A_\beta \geqslant (a-1) \cdot A_{\alpha+\beta}$$

sau:

$$(a-1) \cdot 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \ldots \geqslant 2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \ldots$$

ceea ce este adevărat căci $a \geqslant 1$.

Observație. Dacă în neegalitatea propusă $\alpha = \beta$, avem:

$$[\varphi_\alpha(a^\alpha)]^2 \geqslant \varphi_{2\alpha}(a^{2\alpha}).$$

De asemenea este ușor de stabilit că putem avea:

$$[\varphi_\alpha(a^\alpha)]^n \geqslant \varphi_{\alpha n}(a^{\alpha n}).$$

COMANDOR I. LINTEȘ.

25. *Asupra stabilirii unei formule de balistică aeriană.*

Intr'un curs al Academiei de Aviație „N. E. JUCOWSKI" din Rusia Sovietică, găsit printre resturile unui avion sovietic doborît de Artileria noastră antiaeriană, am găsit, printre altele, următoarea formulă:

1) $$\gamma = \text{arctg.} \frac{\Delta}{H}$$

unde:

$$\Delta = V_a \cdot t - A$$

și

$$H = \text{altitudinea},$$

iar V_a este viteza avionului în bombardamentul orizontal, t timpul de cădere al bombei și A bătaia.

Cum pentru H foarte mic, Δ devine și el foarte mic, atunci, pentru înlăturarea nedeterminării, cursul recomandă calculul lui γ după formula:

2) $$\lim_{H \to 0} \gamma = \text{arctg.} \frac{c \cdot F(V)}{g}.$$

Formula nefiind justificată, voiu da, în cele ce urmează o metodă de stabilire.

Avem:

$$A = \int\int \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dt^2$$

$$H = \int\int \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dt^2.$$

Derivând deci de două ori pe Δ şi H avem:

$$\frac{\frac{d^2\Delta}{dt^2}}{\frac{d^2H}{dt^2}} = \frac{V_a - \frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{d^2y}{dt^2}}.$$

Apoi cum:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = c \cdot \frac{F(V)}{V} \cdot (V_a - V)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -c \cdot \frac{F(V)}{V} \cdot W - g$$

V fiind viteza orizontală şi W verticală a bombei.

Dar W fiind foarte mic, poate fi neglijat şi atunci ajungem la formula 2).

COMANDOR I. LINTEŞ.

26. *O problemă asupra conicelor.* Imi propun să dau o soluţie pur geometrică problemei tratate analitic de D-l GH. D. SIMIONESCU în articolul din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIII, pag. 528. Enunţul problemei este:

Să se găsească locul punctelor M, *ale căror polare faţă de două conice* (C), (C') *se taie sub un unghiu dat şi în ce caz acest loc este un cerc.*

Deosebim trei cazuri:

1°. *Conicele* (C) *şi* (C') *sunt conice cu centru.* Fie O, O' centrele lor şi OM', O'M' direcţiile diametrilor conjugaţi respectiv cu OM în (C) şi cu O'M în (C'). Se ştie că OM' şi O'M' sunt paralele cu direcţiile polarelor lui M faţă de (C) şi (C'). Deci unghiul OM'O' este constant iar M' se mişcă pe un cerc (Γ') trecând prin O şi O'. Cum OM' şi O'M' sunt două raze omoloage a două fascicole omografice, rezultă că şi conjugatele lor OM, O'M sunt raze omoloage a două fascicole omografice şi că deci M,

intersecția acestor raze, va descrie o conică (Γ), ce trece prin O și O′. Conica (Γ) este o figură omografică a cercului (Γ′), M și M′ fiind puncte corespunzătoare.

Fie A și B intersecțiile conicei (Γ) cu cercul (Γ′) înafara punctelor O, O′. Lui A considerat pe (Γ′) îi corespunde un punct pe (Γ) iar lui A considerat pe (Γ) îi corespunde pe (Γ′) punctul B. Așa dar OA și OB sunt diametri conjugați în (C) iar O′A și O′B sunt diametri conjugați în (C′). Când (Γ) este un cerc diferit de (Γ′), A și B sunt punctele ciclice, OA, OB și O′A, O′B sunt drepte izotrope și fiind diametri conjugați în (C) și (C′), aceste conice sunt *hiperbole echilatere.*

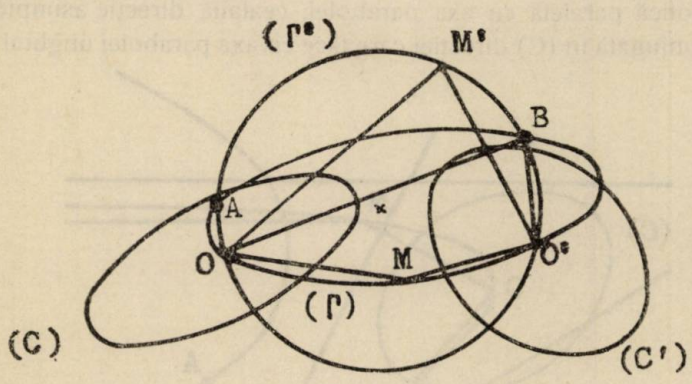


Fig. 1.

Reciproc, dacă (C) și (C′) sunt hiperbole echilatere, punctelor ciclice A și B de pe (Γ′) le va corespunde A și B de pe (Γ), deci (Γ) va fi un cerc.

Când (Γ) se confundă cu (Γ′), M și M′ descriu o involuție pe acest cerc. Rotind conica (C′) în jurul centrului de un unghiu dat și într'un sens convenabil, diametrii O′M, O′M′ conjugați în (C′) devin paraleli cu diametrii OM, OM′ conjugați în (C′). Rezultă că dacă (C) și (C′) sunt elipse reale, ele sunt asemenea și axele lor de aceeași natură se taie sub un unghiu dat; dacă sunt hiperbole, unghiurile asimptotelor sunt egale și axa care e bisectoarea unui unghiu al asimptotelor conicei (C) taie axa care e bisectoarea unghiului *egal* al asimptotelor conicei (C′) sub un unghiu constant dat. In acest caz hiperbolele sunt sau asemenea între ele, sau una din ele este asemenea cu conjugata celeilalte.

Reciproc dacă conicele sunt elipse sau hiperbole îndeplinind condițiunile de mai sus, se poate arăta ușor că unui punct M′ de pe (Γ′) îi va corespunde un punct M tot de pe (Γ′); (Γ) se confundă deci cu (Γ′).

In particular condițiile sunt îndeplinite când conicele sunt cercuri.

Când conicele au același centru O, OM aparține locului și este rază dublă a omografiei formată din diametrii conjugați în (C) și (C′), direcțiilor care fac un unghiu egal cu cel dat. Cealaltă rază dublă aparține de asemeni locului.

2°. *Conica* (C) *este cu centrul în* O *iar* (C′) *este o parabolă* (fig. 2). Punctul O′ este aruncat la infinit, (Γ) are o direcție asimptotică paralelă cu axa parabolei, cealaltă direcție asimptotică fiind conjugată în (C) direcției care face cu axa parabolei unghiul dat.

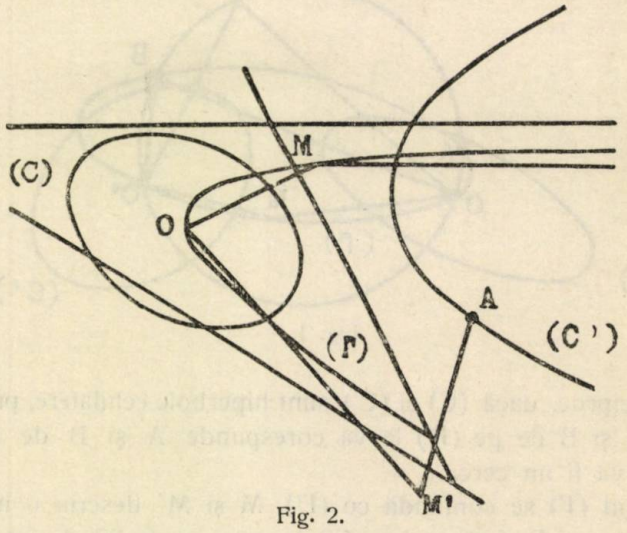


Fig. 2.

Conica (Γ) nu se poate reduce la un cerc, ci la două drepte, una trecând prin O și fiind paralelă la axa parabolei, direcțiile conjugate în (C) și (C′) acestei paralele trebuind să se taie sub unghiul dat.

3°. (C) *și* (C′) *sunt parabole*. In acest caz (Γ) are asimptotele paralele cu axele parabolelor și se poate reduce la două drepte din care una este dreapta dela infinit, direcțiile conjugate ei, adică axele parabolelor, trebuind să se taie sub un unghiu dat.

Dacă parabolele au axele paralele, locul lui M se compune din două drepte paralele cu axele parabolelor.

R. GEORGESCU.

BIBLIOGRAFIE

Mathematica. Vol. XVII, 1941. Seminarul de Analiză Matematică. Facultatea de Ştiinţe, Timişoara.

Procesul-Verbal al Corpului profesoral al Universităţii din Cluj contra cedării Clujului, Ungariei. Sur l'écoulement lent d'un fluide, parfait, compressible, autour d'un cylindre circulaire, par CAIUS JACOB. Sur les surfaces du quatrième ordre possédant quatre points doubles uniplanaires, par L. GODEAUX. Sur la densité d'énergie d'une corde vibrante, par B. HOSTINSKY. Ueber finslersche und cartansche Geometrie. Geometrische Erklärungen des Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen finslerschen Raumes, von L. BERWALD. Sur les fonctions K de BESSEL, par P. HUMBERT. La notion des ensembles séparés comme terme primitif de la topologie, par P. SZYMANSKI. Sur les zéros des intégrales réelles des équations différentielles linéaires, par Z. BUTLEWSKY. L'activité scientifique du professeur A. ANGELESCU, par D. V. IONESCU. Sur le théorème des accroissements finis, par D. POMPEIU. Le professeur G. BRATU, par P. SERGESCU. Le professeur D. EMMANUEL, par P. SERGESCU. Sur les bases du groupe symétrique, par SOPHIE PICARD. Notes de la Rédaction: † N. IORGA.

Pozitiva. Anul II. Nr. 3—4. Noemvrie-Decemvrie 1941. Bucureşti. Orientarea figurilor în Geometrie, de D. POMPEIU. Introducere la o clasă de ecuaţii algebrice, de O. N. ŢINO. Asupra poligoanelor regulate, de T. POPOVICIU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXI. Nr. 9. Noemvrie 1941. O proprietate interesantă a poligoanelor regulate de un număr impar de laturi, de O. N. ŢINO.

Idem. Nr. 11. Ianuarie 1942. Despre o specie de exagoane, de D. POMPEIU. Un nou sistem de coordonate: *„coordonate rombice"* de V. ALACI.

COMANDOR I. LINTEŞ. Efectul bombelor aeriene. (Extras din *Revista Aeronauticii şi marinei.* Septemvrie-Octomvrie 1941. Bucureşti.

CERERI

Răspuns la Cererea Nr. 300. Anul XLVI, pag. 364.

Intrebând la Muzeul limbii române, Sibiu, de sub conducerea D-lui Prof. SEXTIL PUŞCARIU, mi s'a răspuns de către D-l Prof. AL. PROCOPOVICI, după ce a pus la contribuţie şi experienţa celorlalţi colaboratori că: *« Nu « cunoaştem nimeni dintre noi termeni populari pentru* **prizmă, paralelipiped, « piramidă, cilindru, con, sferă, segment de sferă, coroană de sferă, cub.**

« Incheierea noastră a fost că aceşti termeni tehnici, de circulaţie inter- « naţională, fără de a fi termeni populari nici în alte limbi, nu trebue « înlocuiţi nici la noi ».

Adaug la această importantă încheiere, că poporul nici nu are noţiunile geometrice ca generalizări ci ca asemănări cu obiectele cu care este obişnuit. Astfel când vrea să descrie un obiect de formă sferică el zice că e *« rotund ca o minge, ca un măr, ca un boţ* etc. » dar nu va zice niciodată unui glob sferic, *« minge, măr,... »*. Pentru a descrie un *con* va zice *« ca o căpăţină de zahăr »*, o *semisferă* ca *« un moşuroiu »*, *un tor* ca *« un covrig »* etc. Cuvântul *văşcălie*, pe care D-l I. IONESCU l-a auzit întrebuinţat în Ilfov pentru *cilindru*, l-am auzit şi eu undeva, însă în înţelesul unei *baniţe de lemn* pentru măsurat grânele. Ţăranul când ar vrea să descrie o formă cilindrică va zice probabil *« aşa ca... un pahar »* sau poate *« ca o văşcălie »* dar reciproc nu va numi pahar sau... văşcălie orice cilindru, după cum nu zice că lăzile sunt paralelipipede sau invers.

G-L GH. BUICLIU.

DIVERSE

Şedinţe

Societatea Română de Matematici a ţinut şedinte în 15.XII.1941, 12.I şi 26.I.1942 cu următoarele comunicări:

GR. MOISIL. Ideea de limită în Analiza Generală.

T. POPOVICIU. Asupra unei teoreme a D-lui POMPEIU.

R. ROŞCA. Asupra transformărilor BÄCKLUND în spaţiul eliptic.

N. TEODORESCU. Geometria diferenţială a ecuaţiei undelor.

N. MIHĂILEANU. Asupra ţesuturilor de prima speţă.

C. POPOVICI. Asupra ecuaţiilor diferenţialo-funcţionale.

G. VRÂNCEANU. Asupra invarianţilor spaţiilor lui RIEMANN singulare.

« Politehnica » din Bucureşti, Facultatea Electromecanică, anunţă înfiinţarea unui premiu cincinal de 50.000 lei pentru o lucrare meritorie de electricitate sau electrotechnică, tipărită în ultimii 5 ani. Premiul se achită din fondul „N. VASILESCU-KARPEN" inginerilor diplomaţi din ţară. Lucrările se depun până la 1 Mai 1942.

Regulamentul premiului şi orice informaţii se cer la Secretariatul Politehnicei.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2566. *Care sunt numerele de şase cifre al căror indicator este un pătrat perfect?*

I. VELESCU.

Dacă $a<b<c<\ldots$ sunt numere prime, atunci conform enunţului avem

$$N = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\ldots$$

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1}\, b^{\beta-1}\, c^{\gamma-1}\ldots(a-1)(b-1)(c-1)\ldots = P^2.$$

Pentru căutarea numerelor N considerăm succesiv că N este prim, are un singur factor prim, doi, trei,... factori primi.

1. N *este prim.* $\varphi(N) = N - 1$. Pentru a găsi pe N se iau dintr'o tablă de numere prime, acele numere prime care micşorate cu 1 sunt pătrate perfecte. De exemplu

$$N = 17\ ,\ \varphi(17) = 4^2\ ;\ N = 101\ ,\ \varphi(101) = 10^2;\ldots$$

In această cercetare se vor examina numai numerele terminate cu 1 şi 7, singurele numere prime care micşorate cu 1 pot da pătrate perfecte.

Dacă se dispune de o tablă de numere prime de 6 cifre, se caută şi numerele prime de 6 cifre din condiţiile enunţului

2. $\quad N = a^{\alpha} \quad \therefore \quad \varphi(N) = a^{\alpha-1}(a-1) = P^2.$

Deoarece a şi $a-1$ sunt primi între ei, trebue să avem

$$\alpha = 2p+1\ ,\quad a-1 = m^2 \quad \therefore \quad N = (1+m^2)^{2p+1}.$$

Exemple de soluţii

$$1+m^2 = 2,\ 17,\ 37,\ldots,\ 577,\ldots$$

$$N = 2^{17} = 131072,\quad \varphi(N) = 2^{16};\ldots$$

3. $\quad N = a^{\alpha}\cdot b^{\beta} \quad \therefore \quad \varphi(N) = a^{\alpha-1}\, b^{\beta-1}(a-1)(b-1) = P^2.$

In acest caz $a-1$ şi $b-1$ au cel puţin divizorul comun 2 iar $a-1$ cu b sau a cu $b-1$ pot avea divizori comuni. Vom proceda în felul următor pentru a găsi pe N. Dăm lui a şi b pe rând diferite grupe de valori de numere prime, de exemplu (2, 3), (2, 5), (2, 7)..., (3, 5), (3, 7),... (101, 103),... şi determinăm formele lui α şi β.

Fie grupa $a=2$, $b=3$ vom avea

$$N = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\ ,\quad \varphi(N) = 2^{\alpha-1}\cdot 3^{\beta-1}\cdot 2 = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta-1} = P^2.$$

Trebue să avem

$$\alpha = 2p \quad , \quad \beta = 2q+1$$

$$\therefore \qquad N = 2^{2p} \cdot 3^{2q+1} \quad \text{cu} \quad \varphi(N) = 2^{2p} \cdot 3^{2q}$$

sau ca soluţie de 6 cifre

$$N = 2^2 \cdot 3^{11} = 708588.$$

Fie grupa $a = 101$, $b = 613$. Trebue să avem

$$N = 101^{\alpha} \cdot 613^{\beta} \quad \text{cu} \quad \varphi(N) = 101^{\alpha-1} \cdot 613^{\beta-1} \cdot 100 \cdot 612.$$

Dar

$$\varphi[101^{\alpha} \cdot 613^{\beta}] = 101^{\alpha-1} \cdot 613^{\beta-1} \cdot 10^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17 \neq P^2$$

oricare ar fi α şi β. Deci grupa (101, 613) nu dă soluţie oricare ar fi numărul de cifre al lui N.

. . . . . .

Urmând această cale se pot găsi toate numerele de 6 cifre care răspund enunţului cu condiţia de a dispune de o tablă de numere prime de 6 cifre.

PROBLEMA 4396. *Fie* U *un punct arbitrar în planul triunghiului* ABC; AU *taie pe* BC *în* I; UB, UC *retaie cercul circumscris în* B′ *şi* C′. CB′ *şi* BC′ *se întâlnesc în* A′. UA′ *taie pe* BC *în* J. ***Notăm***

$$\sphericalangle UBC = x, \quad \sphericalangle UCB = y.$$

Avem

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} C} \quad , \quad \frac{\overline{JB}}{\overline{JC}} = \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} A}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie. Avem

$$\frac{\overline{IB}}{\sin IAB} = \frac{\overline{IA}}{\sin B} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{IC}}{\sin IAC} = \frac{\overline{IA}}{\sin C}$$

deci

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{\sin IAB}{\sin IAC} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}$$

dar, după relația lui CEVA (în valoare absolută)

$$\frac{\sin IAB}{\sin IAC} \cdot \frac{\sin(C-y)}{\sin y} \cdot \frac{\sin x}{\sin(B-x)} = 1$$

deci

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = \frac{\sin(B-x)}{\sin B \sin x} \cdot \frac{\sin C \sin y}{\sin(C-y)} = \frac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} y - \operatorname{cot} C}.$$

In triunghiul A'BC, după demonstrația de mai sus, avem

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}} = \frac{\sin(A'BC-x)}{\sin A'BC \sin x} \cdot \frac{\sin A'CB \sin y}{\sin(A'CB-y)}$$

dar

$$\sphericalangle A'BC - x = \sphericalangle A'CB - y = 180^0 - (x+y+A)$$

$$\therefore \quad \sphericalangle A'BC = 180^0 - (A+y), \quad \sphericalangle A'CB = 180^0 - (A+x)$$

deci

$$\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}} = \frac{\sin(A+x)}{\sin A \sin x} \cdot \frac{\sin A \sin y}{\sin(A+y)} = \frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} A}.$$

P. P. DRĂGHICESCU.

Observare. Bune soluții date și de D-nii HORIA M. BODNĂRESCU (Politehnica, București), MIRCEA D. POPA (Școala Ofițeri Artilerie), MARIN GH. POPESCU (lic. Pitești).

PROBLEMA 4872. *Se consideră două drepte perpendiculare duse prin ortocentrul* H *al triunghiului* ABC *și fie* A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b *respectiv proiecțiunile punctelor* A, B, C *pe ele.*

1°. *Dreptele* $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ *sunt concurente în* ω.

2°. *Perpendicularele din* A, B, C *respectiv pe* $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ *sunt concurente într'un punct* ω'.

3°. *Locul punctelor* ω *și* ω', *când dreptele duse prin* H *variază.*

4°. *In acest caz dreapta* $\omega\,\omega'$ *trece printr'un punct fix.*

ION A. ILIE [1]).

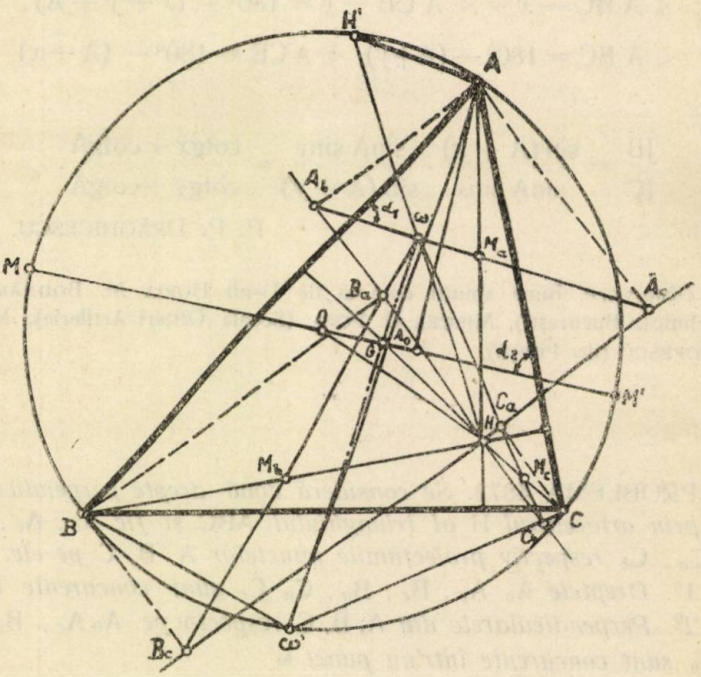
---

1) La pag. 111, Vol. XLIII, numele propunătorului a fost imprimat greșit.

Soluție dată de D-nii: M. AL. VASILESCU-ȘTABU (cl. VI-a lic. Alba-Iulia), VICTOR FLORESCU, OCT. GH. RĂDULESCU (lic. mil. „N. Filipescu"), PANTELIMON CONSTANTIN, I. STREDER (lic. mil. Iași).

1°. Fie M_a, M_b, M_c mijloacele segmentelor $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$. Patrulaterul $AA_b A_c H$ fiind un dreptunghiu, dreapta $A_b A_c$ trece prin M_a. Analog $B_c B_a$, $C_a C_b$ trec respectiv prin M_b, M_c. Dreptele $A_b A_c$, $B_c B_a$ se întâlnesc într'un punct ω. Pe figură se vede că, ținând seama de patrulaterele inscriptibile ce se formează, avem:

$$\sphericalangle M_a \omega M_b = \sphericalangle A_c A_b H + \sphericalangle A_b B_a \omega = \sphericalangle A_c A_b H + \sphericalangle B_c B_a H$$
$$= \sphericalangle A_c AH + \sphericalangle B_c BH = \sphericalangle AHB = \pi - C,$$



ceea ce arată că ω se găsește pe cercul lui EULER al triunghiului ABC. In adevăr notând cu A' piciorul înălțimii din A avem triunghiul dreptunghiu

$$BA'H \text{ în care } \sphericalangle M_b A'H = M_b HA' = C,$$

deci patrulaterul $M_b A' M_a \omega$ este inscriptibil.

Dacă notăm cu ω_1 intersecţia dreptelor $A_b A_c$, $C_a C_b$ demonstrăm la fel că ω_1 aparţine cercului lui EULER. Punctele ω, ω_1 coincid neapărat, căci trebue să se găsească amândouă la intersecţia dreptei $A_b A_c$ cu cercul lui EULER.

2°. Perpendicularele din A şi B pe $A_b A_c$ şi $B_c B_a$ se întâlnesc în ω'. Avem evident $\sphericalangle A\omega' B = \pi - M_a \hat{\omega} M_b = C$, deci ω' se găseşte pe cercul circumscris lui ABC. La fel ca la punctul (1°) se arată că intersecţia perpendicularelor din A şi C pe $A_b A_c$ şi $C_a C_b$ coincide cu ω'.

3°. Dacă dreptele duse prin H variază, rămânând perpendiculare, rezultă din cele de mai sus că locul punctelor ω şi ω' sunt respectiv cercul lui EULER şi cercul circumscris triunghiului ABC.

4°. Dreapta $H\omega$ taie cercul circumscris în H'. Cercul lui EULER şi circumscris corespunzându-se în omotetia directă $(H, {}^1/_2)$, rezultă că ω e mijlocul lui HH', iar AH' e paralelă cu $M_a \omega$, deci perpendiculară pe $A\omega'$. Aşa dar $H'\omega'$ e un diametru al cercului circumscris. Să considerăm atunci triunghiul $HH'\omega'$ în care $\omega\omega'$ şi OH sunt mediane. Rezultă că $\omega\omega'$ taie pe OH într'un punct G astfel ca $OG = \frac{1}{3} OH$, adică $\omega\omega'$ trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC.

Notă. 1°. Inafară de prima soluţie (care este redijată după soluţia autorului) propunătorul problemei a mai dat o soluţie pe care o publicăm în întregime.

2°. Fie M punctul de pe cercul circumscris, care are dreapta lui SIMSON paralelă cu una din dreptele duse prin H şi M', punctul care corespunde în acelaşi mod celeilalte drepte. Dreptele duse prin H fiind perpendiculare, punctele M, M' vor fi diametral opuse pe cercul circumscris.

Dreptei MM' îi corespunde în transformarea izogonală, în care ABC e triunghiu de referinţă, o hiperbolă echilateră circumscrisă lui ABC, care are ca centru ortopolul dreptei MM', iar ca asimptote dreptele lui SIMSON ale punctelor M, M'. (Culegere de probleme de geometrie, XX—79).

Dar se ştie că „locul centrelor hiperbolelor de direcţii asimptotice date, ce trec prin două puncte P, Q e a doua diagonală a paralelogramului cu laturile paralele direcţiilor asimptotice şi a cărui primă diagonală este PQ". (Idem, XX—69). Rezultă deci că dreptele $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$ sunt concurente în ortopolul ω al dreptei MM', care aparţine cercului lui EULER.

3°. Fie acum A_0 proiecţia lui A pe diametrul MM'. Să arătăm că perpendiculara din A pe $A_b A_c$ este izogonala dreptei AA_0 faţă de unghiul A. Notăm cu α_1, α_2 complimentele unghiurilor din A, a căror egalitate trebue s'o demonstrăm. Avem, prin construcţia pe care am făcut-o, ţinând seamă că

dreapta lui SIMSON a unui punct P de pe cercul circumscris Δ-lui ABC e perpendiculară pe izogonala lui AP, BP sau CP:

$$\hat{\alpha}_1 = \overset{\frown}{AA_b}\,\overset{\frown}{A_c} + \overset{\frown}{A_b}\,\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AHA_c} + \overset{\frown}{A_b}\,\overset{\frown}{AB} = C - \overset{\frown}{A_b}\,\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{A_b}\,\overset{\frown}{AB}. \quad (1)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \overset{\frown}{ACM} + \overset{\frown}{CAM'} = C - \overset{\frown}{MAB} + \overset{\frown}{CAM'} = C - \overset{\frown}{A_c}\,\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{A_b}\,\overset{\frown}{AB} \quad (2)$$

Comparând (1) cu (2) deducem $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$ (q. e. d.). Două raţionamente analoage ne conduc la afirmaţia că perpendiculara din A pe $A_b A_c$ concură cu analoagele într'un punct ω' de pe cercul circumscris, izogonalul punctului dela infinit din direcţia paralelelor AA_0, BB_0, CC_0.

Punctele 3° şi 4° ca la soluţia I.

Observare. 1°. Analog avem propoziţia:

Prin vârfurile unui triunghiu ABC se duc câte două drepte paralele cu două direcţii perpendiculare date. Diagonalele celor trei dreptunghiuri, care au două vârfuri comune cu ale triunghiului, sunt concurente într'un punct ω de pe cercul lui EULER (Caz particular al problemei 3694).

Perpendicularele din A, B, C pe aceste diagonale sunt concurente într'un punct ω' de pe cercul circumscris, astfel că $\omega\omega'$ trece prin ortocentrul H, când direcţiile perpendiculare variază.

Observare. 2°. D-l AL. VASILESGU-ŞTABU însoţeşte soluţia cu numeroase observaţiuni şi proprietăţi ale figurii din care extragem ca mai interesantă următoarea:

Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC şi A', B', C' proiecţiile vârfurilor A, B, C respectiv pe $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$.

Triunghiul A'B'C' este evident omologic atât cu ABC (centrul de omologie fiind ω') cât şi cu $A_1B_1C_1$ (centrul de omologie fiind ω). *Axele de omologie* Δ(ABC; A'B'C') *şi* Δ'(A'B'C'; $A_1B_1C_1$) *sunt perpendiculare.*

3°. S'a primit şi o soluţie parţială pe cale analitică.

G. D. S.

PROBLEMA 5042. *Se consideră funcţiunea*

$$y = arctg\,(x + \sqrt{1 - x^2})$$

şi se cere:

1°. *Presupunând că* y *este cuprins între* $-\frac{\pi}{2}$ *şi* $\frac{\pi}{2}$ *să i se studieze variaţia şi să i se facă graficul.*

2°. *Notăm cu* A, B, C *punctele respectiv de abscisă* $-1, 0, +1$. *Să se găsească ecuaţiile tangentelor în aceste puncte la curbă.*

3°. *Să se găsească aria mărginită de curbă şi de dreapta* AC.

GH. TH. GHEORGHIU.

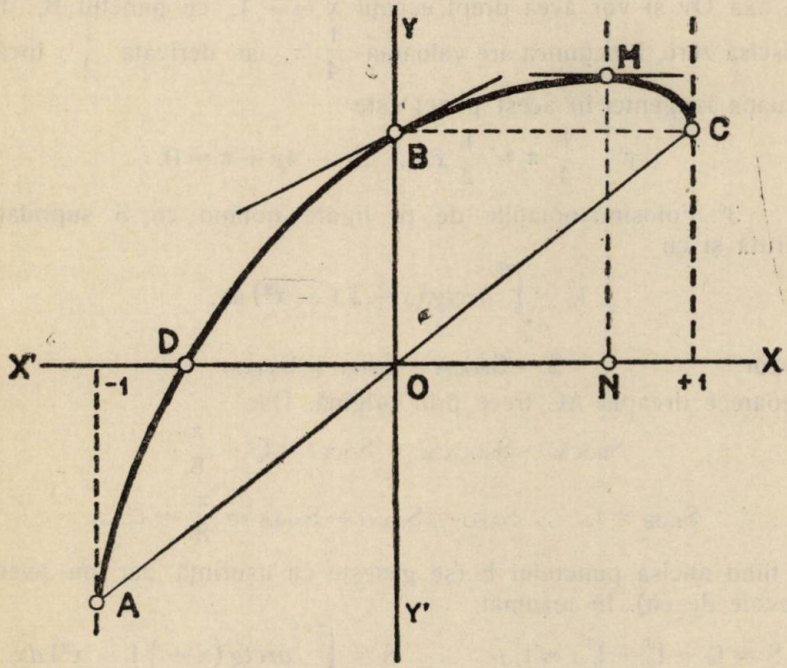
Soluție dată de D-l POPA D. MIRCEA.

1°. Cum funcțiunea *arctg u* există pentru orice valori reale date argumentului, condiția de existență este $1 - x^2 \geqslant 0$, adică: $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Derivata este

$$y' = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + (x + \sqrt{1-x^2})^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{2\sqrt{1-x^2}\,(1 + x\sqrt{1-x^2})},$$

și se anulează pentru valorile lui x date de ecuația

$$\sqrt{1-x^2} - x = 0.$$



Această ecuație se rezolvă ușor prin izolarea radicalului și ridicare la pătrat. Se găsesc soluțiile $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, dintre care numai cea pozitivă verifică ecuația inițială. De pe prima formă a derivatei se citește imediat că funcțiunea este crescătoare înainte de $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, are un maxim în acest punct și descrește apoi.

Funcţiunea nu prezintă discontinuităţi. Tabloul de variaţie este

x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+1$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 0{,}95$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$

iar curba cea din figura alăturată.

2°. Cum numitorul derivatei se anulează pentru $x = \pm 1$, însemnează că tangentele la curbă în punctele A şi C sunt paralele cu axa Oy şi vor avea drept ecuaţii $x = \mp 1$, cu punctul B, de abscisă zero, funcţiunea are valoarea $\frac{1}{4}\pi$, iar derivata $\frac{1}{2}$, încât ecuaţia tangentei în acest punct este

$$y - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}x \quad ; \quad 2x - 4y + \pi = 0.$$

3°. Folosind notaţiile de pe figură, notând cu S suprafaţa cerută şi cu

$$I_a^b = \int_a^b arctg\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx,$$

avem $$S = S_{BOCM} + S_{EOB} + S_{AEO},$$

deoarece dreapta AC trece prin origină. Dar

$$S_{BOCM} = S_{BOC'CM} - S_{OCC'} = I_0^1 - \frac{\pi}{8},$$

$$S_{EOB} = I_a^0 \quad , \quad S_{AEO} = S_{AA'O} - S_{A'AE} = \frac{\pi}{8} + I_{-1}^a,$$

a fiind abcisa punctului E (se găseşte cu uşurinţă dar nu avem nevoie de ea). In rezumat

$$S = I_0^1 + I_a^0 + I_{-1}^0 = I_{-1}^1 \quad \therefore \quad S = \int_{-1}^{+1} arctg\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx.$$

Pentru a calcula această integrală, integrăm mai întâi prin părţi. Avem, în baza calculului făcut mai sus,

$$S = \left| x\, arctg\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) \right|_{-1}^{+1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{x\left(\sqrt{1 - x^2} - x\right) dx}{\sqrt{1 - x^2}\left(1 + x\sqrt{1 - x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{x\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)}{\sqrt{1 - x^2}\left(1 + x\sqrt{1 - x^2}\right)} dx.$$

Facem aci substituţia: $x = \sin\varphi$. Găsim

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi(\sin\varphi - \cos\varphi)}{1 + \sin\varphi\cos\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}\varphi(\operatorname{tg}\varphi - 1)}{(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) + \operatorname{tg}\varphi}\, d\varphi.$$

Punem mai departe: $\operatorname{tg}\varphi = u$ şi avem

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(u-1)}{1+u+u^2} \cdot \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u-1}{1+u^2}\, du - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u-1}{1+u+u^2}\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u\, du}{1+u^2} - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u+1}{1+u+u^2}\, du - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$+ \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u+u^2} = \left| \frac{1}{4}\log\frac{1+u^2}{1+u+u^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} - \left| \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u \right|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\left| \operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi.$$

Observare. 1°. S'au mai primit alte soluţii dela D-nii: CONST. V. PANTELIMON şi D. RIPIANU.

2°. Au rezolvat primele două părţi ale problemei, făcând greşeli de calcul la calculul suprafeţei, D-nii A. I. CORNĂŢEANU şi S-LT. GR. MARTEŞ.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5134. *Să se demonstreze că numerele* $n - 1$ *şi* $np + 1$ *nu pot avea alţi divizori comuni în afară de divizorii lui* $p + 1$.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (liceul militar Iaşi).

Orice divizor comun al celor două numere este divizor şi al sumei lor $n(p+1)$. Acest produs are ca divizori divizorii lui n şi pe ai lui $p+1$. Dar divizorii lui n nu divid pe $n-1$ şi nici pe $np+1$. Rămâne deci că numai divizorii lui $p+1$ pot fi divizori comuni numerelor date în enunţ.

Au rezolvat bine problema D-nii: D. D. BUZNEA, GH. BOGDAN, P. V. CAZANACLI, ST. CETĂŢEANU, C. D. EFTIMIE, EM. S. MODÂLCĂ, AL. A. PETRESCU, IUL. PETRESCU, A. N. POPA, AL. I. ROHR, CICERONE ROMANESCU, AD. O. ŞAICHIN, I. I. STAMATE, T. ŞERBAN, T. C. ŞTEFAN, M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

PROBLEMA 5194. *Se consideră funcţiunea*

$$f(x; m, n) = \frac{x^m}{1-x^n},$$

unde m *şi* n *sunt două numere întregi şi pozitive şi se cere:*

1°. *Să se reprezinte grafic diferitele forme ce poate avea curba*

$$y = f(x; m, n),$$

după diferitele valori ale lui m *şi* n.

2°. *Să se deducă din reprezentările făcute, numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei*

$$x^m + a(x^n - 1) = 0.$$

3°. *Să se studieze seria cu termenul general*

$$u_n = f(x; n + p, n).$$

4°. *Să se determine numărul* n, *în funcţie de* p, *aşa fel ca limita produsului*

$$\lim_{x=\infty} f(x; 2, n) f(x; 6, n) \dots f[x; p(p+1), n],$$

să fie finită şi diferită de zero.

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: TEODOR A. ŞERBAN (stud. Politechnica Bucureşti) şi MIRCEA C. NICULESCU (liceul Maiorescu, Bucureşti).

1°. Pentru reprezentarea grafică avem succesiv următoarele rezultate:

a) Funcţiunea există dela $-\infty$ la $+\infty$.

b) Avem

$$\lim_{x=+\infty} y = \begin{cases} +\infty & \text{pentru} \quad m > n \\ 0 & \text{„} \quad m < n \\ -1 & \text{„} \quad m = n \end{cases}$$

$$\lim_{x=-\infty} y = \begin{cases} -\infty & \text{pentru} \quad m-n \text{ cu soţ} > n \\ +\infty & \text{„} \quad m-n \text{ fără soţ} > n \\ 0 & \text{„} \quad m < n \\ -1 & \text{„} \quad m = n. \end{cases}$$

c) Derivata este

$$y' = \frac{x^{m-1}[m - (m-n)x^n]}{(1-x^n)^2}$$

care se anulează întotdeauna pentru $x = 0$ (m este întreg și pozitiv) și dacă mai notăm cu $\alpha = \left| \sqrt[n]{\frac{m}{m-n}} \right| > 1$, atunci se mai anulează pentru

$x = \pm \alpha$ dacă $m > n$ și n este cu soț,
$x = \alpha$ „ $m > n$ „ n „ fără soț,
$x = -\alpha$ „ $m < n$ „ n „ „ „

In ceea ce privește semnul derivatei se găsește trecut în tablou.

d) Punctele de discontinuitate sunt $x = \pm 1$ când n este cu soț și $x = 1$ când n este fără soț.

e) Curba taie axele de coordonate în origină.

f) Dacă $m = n+1$ curba admite asimptota $y = Ax + B$ dată de

$$A = \lim_{x=\infty} \frac{y}{x} = -1 \quad , \quad B = \lim_{x=\infty} (y - \alpha x) = 0,$$

adică asimptota este dreapta: $x + y = 0$.

Dacă notăm cu

$$m_1, M_1 = \frac{\alpha^m}{1-\alpha^n} \quad ; \quad m_2 = M_2 = \frac{\alpha^m}{1+\alpha^n},$$

cu litera mică sau mare după cum avem minim sau maxim, tabloul general de variație este

	m, n cu soț						m, n fără soț						m cu soț n fără soț				m fără soț n cu soț			
	$m > n$		$m = n$		$m < n$		$m > n$		$m = n$		$m < n$		$m > n$		$m < n$		$m > n$		$m < n$	
x	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y	y'	y
$-\infty$		$-\infty$		-1		0		$-\infty$		-1		0		$+\infty$		0		$+\infty$		0
	$+$	cr.	$-$	descr.	$-$		$+$		$+$		$-$	descr.	$-$		$+$		$-$	descr.	$+$	
$-\alpha$	0	M_1		descr.		descr.					0	$-m_2$			0	M_2		$-m_1$		cr.
	$-$	descr.	$-$		$-$		$+$	cr.	$+$	cr.	$+$		$-$	descr.	$-$		$+$	cr.	$+$	
		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$												$+\infty$		$+\infty$
-1		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$						cr.				descr.		$-\infty$		$-\infty$
	$-$	descr.	$-$	descr.	$-$	descr.	$+$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	cr.	$+$	cr.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$+$	cr.	$+$	cr.	$+$	cr.	$+$	cr.	$+$	cr.	$+$	cr.	$+$	cr.	$+$	cr.	$+$	cr.	$+$	cr.
		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
$+1$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$
	$+$	cr.	$+$		$+$		$+$	cr.	$+$		$+$		$+$	cr.	$+$		$+$	cr.	$+$	
α	0	M_1		cr.		cr.	0	M_1		cr.		cr.	0	M_1		cr.	0	M_1		cr.
	$-$	descr.	$+$		$+$		$-$	descr.	$+$		$+$		$-$	descr.	$+$		$-$	descr.	$+$	
$+\infty$		$-\infty$		-1		0		$-\infty$		-1		0		$-\infty$		0		$-\infty$		$+\infty$

Figurile, în număr de 12, le lăsăm pe seama cititorului.

2⁰. Scriind ecuaţia sub forma

$$\frac{x^m}{1-x^n} = a,$$

se vede că a căuta rădăcinile reale ale acestei ecuaţii, revine la a căuta punctele de intersecţie ale curbei $y = f(x; m, n)$ cu dreapta $y = a$. Figurile ne spun rezultatele din următorul tablou:

a		$-\infty$	m_1	$-m_2$	0	m_2	$-m_1$	$+\infty$
m, n cu soţ	$m > n$	4	α şi $-\alpha$ răd. duble	0 0 0	0 răd. de ord. m	2	2 2 2	2
	$m < n$	2	2	2 2 2	0 răd. de ord. m	2	2 2 2	2
m, n fără soţ	$m > n$	3	α răd. dublă şi una simplă	1 1 1	0 răd. de ord. m	1	1 1 1	1
	$m < n$	1	1	1 α răd. dublă şi una simplă 3	0 răd. de ord. m	1	1 1 1	1
m cu soţ n fără soţ	$m > n$	2	α răd. dublă	0 0 0	0 răd. de ord. m	2	2 2 2	2
	$m < n$	1	1	1 1 1	0 răd. de ord. m	3	$-\alpha$ răd. dublă şi una simplă 1 1	1
m fără soţ n cu soţ	$m > n$	3	α răd. dublă şi una simplă	1 1 1	0 răd. de ord. m	1	1	$-\alpha$ răd. dublă şi una simplă 1 3
	$m < n$	2	2	2 2 2	0 răd. de ord. m	2	2 2 2	2

Cazul $m = n$ nu l-am trecut în tablou deoarece ecuaţia este binomă

$$x^m = \frac{a}{1+a}$$

şi discuţia ei este simplă direct: *a*) dacă m este fără soţ ecuaţia are o rădăcină reală oricare ar fi $a (\neq -1)$; *b*) dacă m este cu

soţ, ecuaţia are două rădăcini reale când $a(1+a)>0$, adică $a>0$ sau $a<-1$; *c*) $a=0$ ecuaţia admite pe zero ca rădăcină multiplă de ord. *m*.

3°. Seria are termenul general $u_n=\frac{x^{n+p}}{1-x^n}$ şi este de aceeaşi natură cu seria $v_n=\frac{x^n}{1-x^n}$, deoarece $u_n=x^p v_n$, *p* fiind constant. Dacă $|x|<1$ atunci $|v^n|$ este comparabilă cu seria al cărui termen general este $|x|^n$ şi deci *convergentă*. Dacă $|x|>1$ avem

$$\lim_{n=\infty}|v_n|=\lim_{n=\infty}\left|\frac{1}{\frac{1}{x^n}-1}\right|=1,$$

şi deci seria este *divergentă*.

4°. Avem

$$f(x;2,n)\,f(x;6,n)\ldots f[x;p(p+1),n]=\frac{x^{2+6+\ldots+p(p+1)}}{(1-x^n)^p}.$$

Limita acestui cât este finită şi diferită de zero când

$$2+6+\ldots+p(p+1)=pn,$$

sau

$$(1^2+2^2+\ldots+p^2)+(1+2+\ldots+p)=pn$$

$$\therefore\quad\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+\frac{p(p+1)}{2}=pn,$$

de unde scoatem

$$n=\frac{(p+1)(p+2)}{3}.$$

Limita produsului dat este în acest caz $(-1)^p$.

Observare. S'au mai primit şi alte soluţii dela D-ra ELENA PAPADOPOL-DEMETRA şi dela D-nii: D. D. BOIANGIU, P. P. DRĂGHICESCU, CONST. PANTELIMON şi ALEX. I. ROHR.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 5208. *Două cercuri egale au o coardă comună* AB. *Pe unul din cercuri se ia un punct fix* C, *iar pe celălalt, un punct mobil* M.

Se cere:

1°. *Înfăşurătoarea dreptei ce uneşte proiecţia* M′ *a lui* M, *pe* AB, *cu mijlocul* M″ *al segmentului* MC.

2°. *Să se construiască punctul de contact* ω *al dreptei* M'M'' *cu înfășurătoarea sa.*

3°. *Să se găsească înfășurătoarea paralelei din* ω, *la raza punctului* M.

CPT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

1°. Dacă notăm cu C'' simetricul lui C față de AB și C' al doilea punct de intersecție al dreptei CC'' cu cercul AC''B, observăm că C *este ortocentrul triunghiului* ABC'.

Dreapta care unește piciorul perpendicularei din M pe AB, cu mijlocul segmentului determinat de M și ortocentrul C al triunghiului ABC', este deci *dreapta lui* SIMSON a punctului M față de triunghiul ABC'.

Ea va înfășura deci o *hipocicloidă cu trei întoarceri* tangentă laturilor triunghiului ABC' și înălțimilor acestuia.

2°. Punctul de contact al dreptei M'M'' este *ortopolul* tangentei în M la cercul ABC', în raport de acest triunghiu. (A se vedea articolul „*Asupra ortopolului*" din *Curierul Matematic*, Vol. II, pag. 145—149 și articolul similar din G. M. 1929).

Dacă proiectăm deci punctul A pe tangenta în M la cercul ABC' în A' și ducem din A' o perpendiculară pe BC', aceasta taie pe M'M'' în ω, punctul de contact căutat.

In mod analog proiectând B în B' pe tangenta în M și ducând perpendiculara din B' pe AC', aceasta taie M'M'' tot în ω.

3°. Prin ω trec două drepte SIMSON confundate cu M'M'' și o a 3-a perpendiculară pe coarda formată de punctele de pe cercul ABC', care au ca drepte SIMSON pe M'M'', adică perpendiculară pe tangenta în M, la cerc.

Paralela din ω la raza lui M este perpendiculară pe tangenta în M, adică o dreaptă SIMSON față de ABC'.

Ea va înfășura aceeași hipocicloidă ca și M'M''.

Notă. D-l PAUL DRĂGHICESCU a căutat să rezolve problema prin geometrie analitică.

D-sa a găsit ecuațiile înfășurătoarelor în coordonate polare, fără a arăta ce curbe sunt și a observa că se confundă.

Pentru familiarizarea chestiunilor în legătură cu dreapta lui SIMSON și ortopolul, recomand să se citească articolele relative din G. M.

CPT. M. I. F.

PROBLEMA 5233. *Să se stabilească relația:*

$$(C_m^n)^2 = (C_{m-1}^{n-1})^2 + \frac{m+n}{m-n}(C_{m-2}^{n-1})^2 + \frac{(m+n)(m+n-1)}{(m-n)(m-n-1)}(C_{m-3}^{n-1})^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(2n+1)}{(m-n)!}(C_{n-1}^{n-1})^2.$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluție dată de d-nii: MIRCEA C. NICULESCU (lic. „T. Maiorescu", București) și PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iași).

Din formula cunoscută $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$, obținem prin ridicare la pătrat:

$$(C_m^n)^2 = (C_{m-1}^n)^2 + 2C_{m-1}^n C_{m-1}^{n-1} + (C_{m-1}^{n-1})^2$$

$$= (C_{m-1}^n)^2 + 2\frac{n}{m-n}(C_{m-1}^n)^2 + (C_{m-1}^{n-1})^2$$

$$\therefore \quad (1) \quad (C_m^n)^2 = \frac{m+n}{m-n}(C_{m-1}^n)^2 + (C_{m-1}^{n-1})^2.$$

Inlocuind în această relație pe m prin:

$$m,\ m-1,\ m-2\ldots,\ n+1,\ n$$

căpătăm:

$$(C_m^n)^2 = \frac{m+n}{m-n}(C_{m-1}^n)^2 + (C_{m-1}^{n-1})^2 \qquad 1$$

$$(C_{m-1}^n)^2 = \frac{m+n-1}{m-n-1}(C_{m-1}^n)^2 + (C_{m-1}^{n-1})^2 \qquad \frac{m+n}{m-n}$$

$$(C_{m-2}^n)^2 = \frac{m+n-2}{m-n-2}(C_{m-3}^n)^2 + (C_{m-3}^{n-1})^2 \qquad \frac{(m+n)(m+n-1)}{(m-n)(m-n-1)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(C_{n+2}^n)^2 = \frac{2n+2}{2}(C_{n+1}^n)^2 + (C_{n+1}^{n-1})^2 \qquad \frac{(m-n)\ldots(2n+3)}{(m-n)(m-n-1)\ldots 3}$$

$$(C_{n+1}^n)^2 = \frac{2n+1}{1}(C_n^n)^2 + (C_n^{n-1})^2 \qquad \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(2n+2)}{(m-n)(m-n-1)\ldots 2}$$

$$(C_n^n)^2 = (C_{n-1}^{n-1})^2 \qquad \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(2n+1)}{(m-n)!}$$

Inmulţind fiecare relaţie cu factorul scris în dreptul ei şi adunând se observă că toţi termenii din partea I-a, *afară de primul*, se reduc cu termenii corespunzători şi rămâne tocmai relaţia propusă.

S'a mai primit o soluţie ce nu poate fi luată în considerare, deoarece se afirmă că o sumă foarte complicată are valoarea *unu*, fără a se demonstra acest lucru.

PROBLEMA 5369. *Să se determine* a *şi* b *astfel ca între rădăcinile ecuaţiilor*

$$(a-b)x^3+(b^2-5)x^2+(2a+b)x-a=0$$
$$(a-b)y^2-2aby+(a+b)=0$$

să avem relaţiile :

$$y_1=x_1 \quad \text{şi} \quad y_2=x_2+x_3.$$

EMILIAN MEREUŢĂ.

Soluţia I dată de D-nii: BĂDULESCU P. N. (Şc. Polit. Buc.), DRĂGHICESCU PAUL (lic. milit. Iaşi), GHEORGHIU E. OCTAV (student Buc.), NEGREA MIRCEA (Brăila), POPESCU C. I., POPESCU GH. M. (lic. Piteşti), RADOSLAV ION (Şc. Polit. Buc.), RUSU L. MIRCEA (student Buc.) şi STAICU C. (lic. milit. Câmpulung).

Relaţiile între coeficienţi şi rădăcini ne dau:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b^2-5}{a-b} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{2a+b}{a-b} \\ x_1x_2x_3=\dfrac{a}{a-b}. \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{2ab}{a-b} \\ y_1y_2=\dfrac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

Adunând relaţiile date şi ţinând seama de relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini, avem:

$$y_1+y_2=x_1+x_2+x_3$$

sau

$$\frac{2ab}{a-b}=\frac{5-b^2}{a-b} \quad \therefore \quad b^2+2ab=5 \qquad (1)$$

Inmulţind relaţiile date şi ţinând de asemenea seama de relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini, găsim:

$$y_1y_2 = x_1(x_2 + x_3) \quad \therefore \quad x_1x_2 + x_1x_3 = \frac{a+b}{a-b}$$

sau

$$x_2x_3 = \frac{a}{a-b}$$

cum însă

$$x_1x_2x_3 = \frac{a}{a-b}$$

urmează că:

$$x_1 = 1 = y_1$$

care introdusă în ecuaţia în y, ne dă

$$2a - 2ab = 0. \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul format din ecuaţiile (1) şi (2) găsim soluţiile:

$$a = 0 \quad \therefore \quad b = \pm\sqrt{5}$$
$$b = 1 \quad \therefore \quad a = 2$$

iar rădăcinile ecuaţiilor sunt:

1^0 când $a = 0$ şi $b = \pm\sqrt{5}$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \ , \ x_2 = 0 \ , \ x_3 = -1 \\ y_1 = 1 \ , \ y_2 = -1. \end{cases}$$

2^0 când $a = 2$ şi $b = 1$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = 2 \\ y_1 = 1 \ , \ y_2 = 3. \end{cases}$$

Soluţia II dată de D-nii NICULESCU C. MIRCEA (lic. Titu Maiorescu, Buc.) şi PETRESCU IULIAN (lic. Lazăr, Buc.).

Adunând relaţiile din enunţ şi folosind relaţiile dintre coeficienţi şi rădăcini, găsim:

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\therefore \quad \frac{5-b^2}{a-b} = \frac{2ab}{a-b} \quad \therefore \quad b^2 + 2ab - 5 = 0 \qquad (1)$$

Cum $x_1 = y_1$, urmează că cele două ecuații admit o rădăcină comună. Fie t rădăcina comună, ecuațiile date devin:

$$(a - b)\, t^3 + (b^2 - 5)\, t^2 + (2a + b)\, t - a = 0$$

$$(a - b)\, t^2 - 2abt + (a + b) = 0.$$

Eliminând pe t^3 între aceste două ecuații și ținând seamă de relația (1), găsim rădăcina comună:

$$t = 1$$

care introdusă în ecuația 2-a ne dă:

$$2a(1 - b) = 0 \qquad (2)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (1) și (2) avem:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$$

Alte soluții bune s'au primit dela D-nii: ALDEA MINEA (lic. Buzău), BAKONYI C. (lic. Timișoara), ANDREEVICI N. (stud. Polit. Buc.), BROȘTEANU GH. (lic. milit. Iași), MUSCELEANU DORU (lic. Caracal), RADU VOINEA (lic. Craiova), SANDU GH. ILIE (student Polit. Buc.), STOENESCU D. MIREL (Șc. ofițeri aviație Buc.), ȘERBAN TEODOR (student Buc.), POPA MARCEL (lic. milit. Iași), SĂBĂREANU GH. (lic. milit. Câmpulung), TREFILOV MIHAI (Brăila), VIJELIE EUGEN (lic. milit. Predeal) și VOICU D. GH. (Șc. ofițeri aviație Buc.).

E. M.

PROBLEMA 5469. *Se zice că în actualul război, Germania a trimis, la un moment dat, aproape 2500 avioane contra Angliei. Admițând că avioanele au sburat într'o formație care, în proiecție pe un plan orizontal, era constituită astfel:*

— trei avioane în vârfurile unui triunghiu echilateral cu latura de 60 m., formând un triunghiu T_1;

— trei triunghiuri T_1 *în vârfurile unui triunghiu echilateral cu latura 120 m., formând triunghiul* T_2;

— trei triunghiuri T_2 *în vârfurile unui triunghiu echilateral cu latura de 240 m., formând triunghiul* T_3; ... *și tot așa mai departe.*

Se întreabă, ce suprafață au acoperit astfel avioanele?

COMANDOR I. LINTEȘ.

Se poate forma următorul tablou:

Triunghiul	Numărul de avioane	Latura triunghiului
T_1	$3^1 = 3$	$2^{1-1} \cdot 60 = 60$ m.
T_2	$3^2 = 9$	$2^{2-1} \cdot 60 = 120$ m.
T_3	$3^3 = 27$	$2^{3-1} \cdot 60 = 240$ m.
T_4	$3^4 = 81$	$2^{4-1} \cdot 60 = 480$ m.
T_5	$3^5 = 243$	$2^{5-1} \cdot 60 = 960$ m.
T_6	$3^6 = 729$	$2^{6-1} \cdot 60 = 1920$ m.
T_7	$3^7 = 2187$	$2^{7-1} \cdot 60 = 3840$ m.
T_8	$3^8 = 6561$	$2^{8-1} \cdot 60 = 7680$ m.

Conform enunţului avem „aproape 2500 avioane", deci mai puţin ca 2500, iar în acest caz va trebui să admitem $3^7 = 2187$ *avioane*.

Ultimul triunghiu care poartă în vârfurile lui triunghiurile de câte 729 avioane, are latura de:

$$2^{6-1} \cdot 60 = 1920 \text{ metri}$$

prin urmare, dacă adunăm la aceasta dublul semi-laturii triunghiului inferior, apoi a celuilalt triunghiu inferior, avem:

$$1920 + 960 + 480 + 240 + 120 + 60 = 3780.$$

Suprafaţa triunghiului va fi atunci:

$$S = \frac{3780^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 4{,}3472 \text{ km}^2.$$

Notă. D-nii C. D. EFTIMIE şi I. C. NEGRESCU au presupus latura ultimului triunghiu T_7, drept latura triunghiului total, când în realitate cele $3^7 = 2187$ avioane erau situate la vârfurile triunghiului T_6. Dar şi la acest calcul au făcut unele mici greşeli.

D-l EM. S. MODÂLCĂ pornind dela un caz mai general T_n şi greşind calculele a ajuns la rezultate cu totul eronate.

I. L.

PROBLEMA 5556. *Patru tunuri antiaeriene identice putând asvârli proiectile cu iuțeala* $v_0 = 560\,^{m}/_{sec}$ *sunt așezate în colțurile unui pătrat de latură* $a = 7$ *km. Un avion inamic, având iuțeala maximă* $v = 600\,^{km}/_{oră}$ *sburând la înălțimea constantă* $h = 9000$ *m vrea să bombardeze un obiectiv militar situat în centrul pătratului.*

Să se determine regiunile de sbor periculoase pentru avion și să se cerceteze dacă avionul poate să lovească obiectivul fără a intra într'o regiune periculoasă. Gurile tunurilor vor fi presupuse situate în același plan orizontal; rezistența aerului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de Domnul C. D. EFTIMIE (Elev-inginer al Școalei Politechnice din București).

Să considerăm sistemul de referință $Axyz$ în care A *este gura tunului*, axele Ax și Ay se găsesc *într'un plan orizontal*, iar axa Az este *o verticală ascendentă.*

Locul geometric al tuturor punctelor ce pot fi bătute de tunul A sunt cele ce se găsesc *în interiorul paraboloidului de revoluție* cu axă verticală al cărui meridian este cunoscuta *parabolă de siguranță.*

Ecuația acestui paraboloid de revoluție este:

$$z = H - \frac{x^2 + y^2}{4H}$$

în care:

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

v_0 fiind *iuțeala inițială* la gura tunului iar g *acceleratia gravitației.*

Dacă h este cota la care sboară avionul, *regiunea periculoasă* pentru avion *este aceea din interiorul cercului de intersecție al paraboloidului de revoluție cu planul de sbor:*

$$z = h \quad ; \quad h = H - \frac{x^2 + y^2}{4H}.$$

Notând cu r *raza acestui cerc* avem

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{H(H - h)}.$$

Pentru datele problemei:

$$H = \frac{\overline{560}^2}{2 \times 9{,}81} = 15.984 \text{ m} \quad ; \quad h = 9.000 \text{ m}$$

$$r = 2\sqrt{15.984\,(15.984 - 9.000)} = 21.131 \text{ m}.$$

Zona periculoasă pentru avion se compune prin urmare din *4 cercuri de rază de 21.131 m* cu centrele situate în colţurile pătratului dat ABCD de latură $a = 7.000$ m.

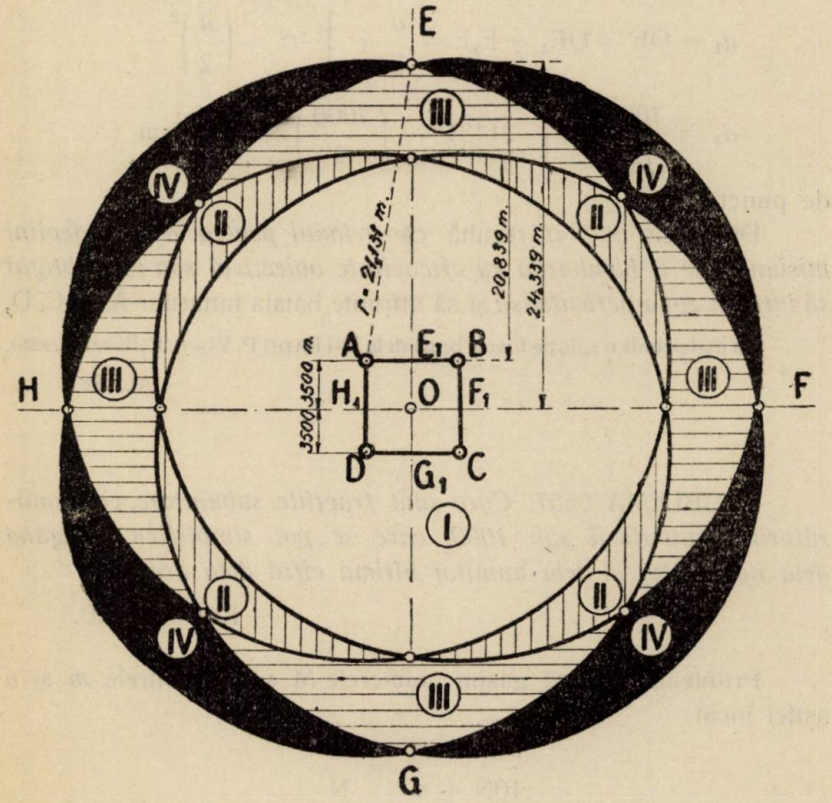
Se observă că această zonă se împarte în *următoarele regiuni:*

a) **Regiunea I** cea mai periculoasă în care bat toate cele 4 tunuri;

b) **Regiunea II** în care bat 3 din cele 4 tunuri;

c) **Regiunea III** în care bat 2 din cele 4 tunuri;

d) **Regiunea IV** în care nu bate decât un singur tun.



Timpul t în care o bombă aruncată din avion ajunge la pământ este dat de ecuaţia spaţiului:

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 9000}{9{,}81}} = 42^{\text{sec}}, 8,$$

iar distanța d măsurată pe orizontală pe care o străbate bomba din momentul lansării ei până ce atinge pământul este:

$$d = vt \text{ în care } v = 600\,^{km}/_{oră} = 166{,}67\,^{m}/_{sec.}$$

$$d = 166{,}67 \times 42{,}8 = 7133 \text{ m.}$$

Pozițiile cele mai apropiate de obiectivul vizat O la care avionul poate ajunge *fără a intra în zona periculoasă* sunt E, F, G, H pe perpendicularele duse în mijloacele E_1; F_1; G_1 și H_1 ale laturilor pătratului dat. Aceste poziții se găsesc la distanța:

$$d_1 = OE = OE_1 + E_1E = \frac{a}{2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$d_1 = \frac{7000}{2} + \sqrt{21131^2 - \left(\frac{7000}{2}\right)^2} = 24.339 \text{ m}$$

de punctul O.

Deoarece $d_1 > d$ rezultă că *avionul pentru a-și îndeplini misiunea de a bombarda cu eficacitate obiectivul său este obligat să intre în zona periculoasă* și să înfrunte bătaia tunurilor A, B, C, D.

S'a mai primit o soluție foarte bună dela D-l RADU P. VOINEA (Bacalaureat).

AL. ST.

PROBLEMA 5557. *Care sunt fracțiile subunitare, cu numărătorii și numitorii sub 1000, care se pot simplifica ștergând dela numărător și dela numitor ultima cifră dela dreapta?*

ION IONESCU.

Problema cere să găsim numerele M și N și cifrele m și n astfel încât:

$$\frac{10M + m}{10N + n} = \frac{M}{N}.$$

Rezultă că trebue să avem:

$$10M + m = k \cdot M,$$

$$10N + n = k \cdot N,$$

k fiind numărul cu care am simplificat.

Deci,

$$m = M(k - 10),$$

$$n = N(k - 10).$$

Rezultă că m şi n trebue să fie divizibile respectiv prin M şi N. Şi fiindcă m şi n sunt cifre, rezultă că M şi N trebue să fie tot cifre.

Deci: *fracţiile care se simplifică ştergând dela numărător şi dela numitor ultima cifră dela dreapta, au numărătorul şi numitorul de două cifre.*

Rezultă că va trebui să găsim cifrele a, b, c, d, astfel încât:

$$\frac{10a + b}{10c + d} = \frac{a}{c},$$

sau, ceeace este tot una:

$$b = a(k - 10),$$

$$d = c(k - 10),$$

k fiind numărul cu care facem simplificarea.

Lăsând la o parte soluţiile:

$$\frac{0b}{0d} = \frac{0}{0}, \quad \frac{00}{cd} = \frac{0}{c}, \quad \frac{ab}{00} = \frac{a}{0},$$

vedem că cifrele a şi c nu pot fi zero, iar k poate lua valori dela 10 la 19.

Să studiem problema după valorile ce le ia k:

k = 10. Rezultă că $b = d = 0$. Deci numerele ab şi cd pot avea următoarele valori:

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

Cu ajutorul acestor valori formăm 36 soluţii luându-le câte două. Soluţiile sunt de forma

$$\frac{a0}{c0} = \frac{a}{c} \quad (\text{cu } a < c).$$

k = 11. Rezultă că: $b = a$, $d = c$. Deci numerile ab, cd pot avea valorile:

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Formăm 36 fracţii grupându-le câte două. Soluţiile sunt de forma

$$\frac{aa}{cc} = \frac{a}{c}.$$

— $\mathbf{k = 12}$, deci: $b = 2a$, $d = 2c$

$$ab,\ cd = 12,\ 24,\ 36,\ 48.$$

Avem 6 soluţii de forma:

$$\frac{10a + 2a}{10c + 2c} = \frac{a}{c}.$$

— $\mathbf{k = 13}$, deci: $b = 3a$, $d = 3c$

$$ab,\ cd = 13,\ 26,\ 39.$$

Avem 3 soluţii de forma:

$$\frac{10a + 3a}{10c + 3c} = \frac{a}{c}.$$

— $\mathbf{k = 14}$, deci: $b = 4a$, $d = 4c$

$$ab,\ cd = 14,\ 28.$$

Avem 1 soluţie de forma:

$$\frac{10a + 4a}{10c + 4c} = \frac{a}{c}.$$

Pentru $\mathbf{k > 14}$ n'avem soluţii.
Deci în total 82 soluţii.

P. P. DRĂGHICESCU
(Elev, liceul militar Iaşi).

D-l MIHALCU I. ILIE (Şcoala militară, Timişoara) a dat toate soluţiile prin o analiză mai puţin riguroasă; D-nii A. MATEESCU şi I. GH. CĂPRIŢĂ au dat soluţiile de forma $a0/b0$ şi de forma aa/bb cu $a < b$. Un „*anonim*" nu a înţeles bine cuvântul a *simplifica* şi a rezolvat o altă problemă al cărui enunţ îl propui în Nr. de faţă. Îi dau astfel ocazia de a reface bine problema şi a se demasca!

I. I.

EXERCIŢII

11. Se cer două numere astfel ca suma lor înmulţită cu suma patratelor acelor numere micşorate cu unu şi dublul produsului lor să dea la produs un patrat perfect.

ST. CETĂŢEANU.

R. Fie a, b numerele căutate şi $S + 1$ suma lor. Trebue să avem

$$(a + b)\,[(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 2ab] = P^2$$

$$\therefore\ (a + b)\,[(a + b)^2 - 2(a + b) + 2] = P^2$$

$$\therefore\ (S + 1)\,(S^2 + 1) = P^2$$

care este ecuaţia lui BROCARD rezolvată de GERONO la pag. 243, G. M., XLII şi care are ca soluţii unice

$$S = 0,\ P = 1;\ S = 1,\ P = 2 \text{ şi } S = 7,\ P = 20$$

care dau soluţiile

a	0	0	0	1	1	2	3	4
b	1	2	8	1	7	6	5	4
P	1	2	20	2	20	20	20	20

.

PROBLEME PROPUSE

5523*). *a)* Să se găsească un punct M în planul unui triunghiu ABC, astfel ca să avem relaţiile:

$$\frac{\overline{AM}}{h_a} = \frac{\overline{BM}}{h_b} = \frac{\overline{CM}}{h_c}.$$

Problema având două soluţii, să se arate că:

b) Punctele M_1 şi M_2 se găsesc pe dreapta OK.

c) Poziţiile lor sunt determinate de relaţiile:

$$\overline{OM_1^2} = R^2\,\frac{\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3}}{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}\ ;\quad \overline{OM_2^2} = R^2.\,\frac{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}{\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3}}.$$

d) Să se deducă distanţa

$$\overline{M_1M_2^2} = \frac{12\,R^2}{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}.$$

ION C. VASILIU.

*) Problema cu Nr. 5523, publicată în G. M., pag. 616 din anul XLVI, fiind cunoscută se anulează şi se înlocueşte prin prezenta, după propunerea aceluiaşi propunător.

5604. Care sunt fracţiile subunitare, cu numărătorii şi numitorii sub 1000, care nu îşi schimbă valoarea ştergând dela numărător şi dela numitor ultima cifră dela dreapta.

I. IONESCU.

5605. Unui număr oarecare i se adună cifrele şi se obţine alt număr; acestuia i se adună asemenea cifrele şi se obţine alt număr, şi tot aşa mai departe până se obţine un număr de o singură cifră.

Prin ce regulă s'ar putea obţine această cifră, cu minimum de calcule?

Regula s'ar putea extinde la numere scrise într'un sistem numeric cu o bază oarecare B?

COMANDOR I. LINTEŞ.

5606. Să se găsească numerele de patru cifre $N \equiv (abcd)$, astfel ca:

$$(abcd) \equiv 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 11 \quad ; \quad (bacd) \equiv 2^{\alpha-1} \times 3^{\beta-1} \times 41.$$

ALEX. V. NICULESCU.

5607. Se consideră şirul de numere întregi

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, N_{k+1}, \ldots,$$

în care unul se obţine din precedentul său luându-i grupul format de primele n cifre dela stânga şi aşezându-l la dreapta.

Să se găsească fracţia zecimală din pseudo-zecimală (în un sistem de numeraţie cu bază B), ale cărei grupe de zecimale consecutive să fie numerele N_k.

M. GHERMĂNESCU.

5608. Să se demonstreze că în planul unui triunghiu oarecare se află totdeauna cel puţin un punct P, astfel ca distanţele sale la vârfurile triunghiului să formeze un triunghiu asemenea altui triunghiu dat.

Cazuri particulare importante.

G. G. CONSTANTINESCU.

5609. Se dă un cerc O şi doi diametri AOA', BOB' ficşi ai lui, perpendiculari unul pe altul. Se iau pe cercul O arcul AM variabil, în sensul pozitiv, iar arcul BN în sensul contrar şi egal cu de două ori arcul AM. Proiectanta punctului N pe diametrul OA taie raza OM în P, iar dreapta BP taie raza ON în Q.

Să se afle locurile punctelor P şi Q.

V. ALACI.

5610. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\frac{x^4+y^4}{a^4+b^4}=\frac{(x-y)^4}{(a-b)^4}\quad ;\quad ax+by=c.$$

IONEL STAMATE.

5611. Dacă α, β, γ sunt trei arce în progresie aritmetică, să se rezolve ecuaţia

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

ştiind că rădăcinile ei sunt $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$.

Să se examineze cazul $a=bc$.

I. ST. TEODORESCU.

5612. Să se verifice formula

$$C_{m+n+p-1}^{m+n-1}=C_{m+p-1}^{m-1}C_{n-1}^{n-1}+C_{m+p-2}^{m-1}C_{n}^{n-1}+\ldots+C_{m-1}^{m-1}C_{n+p-1}^{n-1}$$

unde C_n^p este numărul combinărilor a n obiecte luate câte p.

TH. ANGHELUŢĂ.

5613. In *Journal des Savants*, an. 1698, pag. 129, M. ROLLE (sub pseudonimul REMI LOCHELL) a enunţat proprietatea:

Dacă ecuaţia $x^3-px-q=0$, $(p>0,\ q>0)$, are o singură rădăcină reală c, ea e mai mare ca $2\sqrt{\frac{p}{3}}$, dar mai mică decât cel puţin una din cantităţile $p+1$ sau $q+1$.

Să se arate, mai precis, că avem *totdeauna*

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}<c<q+1,$$

dar că se poate să avem: $c>p+1$.

P. SERGESCU.

5614. Se dă expresia

$$E = m\left[\frac{x\sin\theta_1}{i_2} + \frac{y\cos\theta_1}{i_1}\right]$$

şi relaţiile

$$z = x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2\ ;\ i = i_1\cos^2\theta_2 + i_2\sin\theta_2\ ;\ \theta = \theta_1 - \theta_2\ ;$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{i_1}{i_2}\operatorname{tg}\theta_1\ ,$$

să se elimine i_1, i_2, x, y, θ_1 şi θ_2, aflându-se expresia E în funcţie de z, i, θ.

C. C. T.

5615. Se dă triunghiul isoscel AOB dreptunghic în O. Se consideră iperbolele echilatere (I) trecând prin B şi tangente în A la OA.

1°. Să se arate că locul centrelor este cercul de diametru OA.

2°. Infăşurătoarea asimptotelor acestor iperbole este o ipocicloidă cu trei puncte de întoarcere.

3°. P fiind al doilea punct de intersecţie al unei iperbole (I) cu paralela din A la OB, să se arate, că punctul de intersecţie al normalei în P la iperbolă, cu perpendiculara din A pe normală, descrie o cisoidă cu punctul de întoarcere în A şi asimptota simetrica dreptei OB în raport cu A.

N. ABRAMESCU.

5616. In planul triunghiului ABC se dă un punct fix P. Pe laturile CA, AB şi în acelaşi sens, se iau punctele M şi N aşa încât

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \lambda.$$

Să se demonstreze că dreapta MN rămâne tangentă unei conici când λ variază.

G-L GH. BUICLIU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andrei Gh. A. (5504, 22, 30, 72); *Bakonyi C. C.* (5589); *Bodnărescu M. Dan* (C); *Bogdan Gr. Gh.* (5531, 39); *Boiangiu D. D.* (4102, 5423, 68, 544); *Boldescu P.* (N); *Bosinceanu C.* (5504, 07); *Căruntu D. Fl.* (5531, 93); *Cetăţeanu St.* (5593); *Ciumaşu V.* (5486); *Cocea Gh. T.* (E); *Cruceru Gh. C.* (4102, 5438, 68, 75); *Drăghicescu P. P.* (5246, 321, 476, 505, 21, 61, 62, 65, 72, A, N); *Eftimie D. C.* (5526); *Gaiu P.* (P); *Gheorghiu Oct.* (1702, 4256, 4350, 5586, 90); *Gloden A.* (P); *Ioan C. Z.* (5486, 575); *Isac Gr. Emil* (5526); *Manoliu Vasile* (5531); *Mihăiescu S. Şt.* (4592); *Modâlcă S. Em.* (5495, 543); *Nache D.* (5486); *Pantelimon C.* (5547, 84); *Popa N. A.* (5532, 33, 65); *Popescu Gh. Marin* (5418, 64, 67, 68, 89, 99, 531, 98); *Puchiu T. Gh.* (5531); *Romanescu Cicerone* (5507); *Seni Cl.* (5543); *Staicu C.* (5530); *Stoianovici I. Şerb.* (5562); *Trigran D.* (5599); *Tilică C. Şt.* (4022, 102, 5252, 410, 530, 31, 61); *Tudoran M. Lidia* (5468, 544, 54); *Turculeţ T.* (5506, 22, 30); *Văduva F. Marin* (5602); *Voicu D. Gh.* (5261, 355, 486, 530, 74); *Voinea P. R.* (5577, 86, 89); *Wegener E.* (4993, 95, 5055, 114, 312, 468).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *storic, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea I-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE"

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 80 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 76.290.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1942

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... SIBIIU

SUMARUL

1. Matematica românească în Transnistria (urmare şi sfârşit) . . . . . *I. Ionescu.*
2. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
3. Asupra mişcării tautocrone plane . . . *Radu Bădescu.*
4. Raportul comisiunii pentru premiul de aritmetică . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. **Note Matematice**: 27 — 33.
6. Chestiuni de examen.
7. **Bibliografie.**
8. **Cereri**: 309.
9. **Diverse.**
10. **Probleme rezolvate**: 3497, 3845, 4453, 4723, 5365, 5386, 5486, 5555, 5569.
11. **Exerciţii**: 12.
12. **Probleme propuse**: 5617 — 5629.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Comandor Dr. Inginer **I. Linteş**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **55**42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **6**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

MATEMATICA ROMÂNEASCĂ IN TRANSNISTRIA

(Urmare dela pag. 250)

II. GEOMETRIA

1. I. O. GURVIŢ şi R. V. GAGNUS. Curs sistematic de *Geometrie.* Manual pentru şcoala medie. Partea I. *Geometria plană,* Clasele 6—8. Tradusă după ediţia III rusă. Tiraspol, 1935. Capitolele tratate sunt: Noţiuni fundamentale de geometrie. Linie dreaptă. Unghiuri. Triunghiuri. Egalitatea triunghiurilor. Raporturile între laturile şi unghiurile unui triunghiu. Perpendiculară şi oblice. Drepte paralele. Patrulatere şi poligoane. Suprafaţa figurilor rectilinii. Locuri geometrice. Măsurarea unghiurilor. Poziţia unei circonferinţe faţă de alta. Problemele de construire după metoda locurilor geometrice. Segmente proporţionale. Figuri asemenea. Relaţii metrice între elementele unui triunghiu. Segmente de drepte proporţionale într'un cerc. Poligoane înscrise şi circumscrise. Poligoane regulate. Lungimea circonferinţei şi suprafaţa cercului.

2. I. O. GURVIŢ şi R. V. GAGNUS. Curs sistematic de *Geometrie.* Manual pentru Şcoala medie. Partea II. *Geometria în spaţiu.* Manual pentru clasele 8—9. Tradusă după ediţia III rusă. Tiraspol-Balta, 1935. Intr'o scurtă introducere autorii insistă mai întâi asupra necesităţii de a se obişnui elevii cu reprezentarea pe un plan a figurilor şi corpurilor din spaţiu, în care scop au şi pus la finele cărţii un capitol intitulat: *Desenarea figurilor şi corpurilor în spaţiu. Secţiunile corpurilor prin planuri.* Studiul începe cu o directivă a lui V. I. LENIN: *„Dela contemplare vie spre cugetare abstractă şi de la ea la practică, aceasta este calea didactică a cunoaşterii adevărului, a cunoaşterii realităţii obiective“.*

Cartea are capitolele următoare: Poziţia reciprocă a dreptelor şi planurilor în spaţiu. Perpendiculara şi oblicele. Drepte paralele şi planuri în spaţiu. Unghiuri diedre şi planuri perpendiculare. Unghiuri poliedre. Primele cunoştinţe de desenare proiectivă. Poliedre. Suprafeţele poliedrelor. Volumurile poliedrelor. Cilindrul. Conul. Corpuri căpătate prin rotaţie. Sfera şi părţile ei. Desenarea figurilor şi corpurilor în spaţiu. Secţiunile corpurilor prin planuri.

3. N. RÎBCHIN. *Culegere de Probleme de Geometrie* pentru Şcoala medie. Partea I. *Geometrie plană.* Anul 6—8, tradusă din ediţia a doua rusă, prelucrată de V. A. EFREMOV. Tiraspol, 1933.

Cartea are 970 probleme, unele din ele referitoare la chestiuni practice de geometrie. La fine sunt răspunsurile la chestiunile mai grele.

4. N. RÎBCHIN. *Culegere de probleme de geometrie.* Partea II, pentru Şcoala medie, clasele 8—9, prelucrată de V. A. EFREMOV, Tiraspol-Balta, 1935. Cartea conţine 731 probleme cu multe aplicaţiuni practice. Unele probleme au rezultatele date la fine. Pare că autorul, la aceste două Culegeri, să fie inginer căci are multe aplicaţii tecnice.

III. ALGEBRA

1. A. CHISELEV. *Algebra.* Partea II. Manual pentru Şcoala medie, clasele 8—9, tradusă după ediţia douăsprezecea rusă, redactată de prof. A. N. BARSUCOV, Tiraspol, 1935. Capitolele tratate sunt: Ridicarea la putere. Ridicarea la patrat a unui polinom. Transformarea expresiilor iraţionale. Ecuaţii iraţionale. Dependenţa funcţionaiă. Proporţionalitatea directă şi inversă. Funcţia liniară. Cunoştinţe suplimentare despre ecvaţiile de gradul al doilea. Sisteme de ecuaţii de gradul al doilea. Inegalitatea de gradul întâi. Progresia aritmetică. Progresia geometrică. Progresii infinite. Exponenţi întregi. Exponenţi fracţionari. Noţiuni despre exponentul iraţional. Funcţia exponenţială. Proprietăţile generale ale logaritmilor. Proprietăţile logaritmilor zecimali. Structura şi întrebuinţarea tablelor. Ecuaţii exponenţiale şi logaritmice. Cercetarea ecuaţiilor de gradul întâi cu o singură necunoscută. Cercetarea unui sistem de două ecuaţii de gradul întâi cu două necunoscute. Cercetarea unei ecuaţii de gradul al doilea. Numere imaginare şi complexe. Divizibilitatea polinomului. Ecuaţii nedeterminate. Grupările. Binomul lui NIUTON. Fracţii neîntrerupte. Despre limite. Răspunsuri la Exerciţii.

2. A. CHISELEV. *Algebra.* Aceeaşi ca mai sus. Ediţia din 1938.

3. A. CHISELEV. *Algebra.* Manual pentru Şcoala medie. Partea întâia. Anii 6 şi 7 de învăţământ. Ediţia II-a prelucrată sub redacţia lui A. N. BARSUCOV. Tiraspol, 1933.

4. N. A. ŞAPOŞNICOV şi N. C. VALŢOV. *Culegere de probleme de algebră* pentru Şcoala medie necomplectă şi medie, clasa 6—7. Partea I. Tradusă după ediţia cincea rusă. Tiraspol, 1936. Cartea are 2376 probleme. La fine sunt date şi răspunsuri.

5. Aceiaşi autori. *Culegere de probleme de Algebră.* Partea I-a. Pentru clasa 8-a şi a 9-a. Şcoala medie. Tradusă după ediţia 15-a rusă. Ediţia II. Tiraspol, 1935. Cartea are 1514 probleme, cu unele răspunsuri la fine.

IV. TRIGONOMETRIA

1. N. RÎBCHIN. *Trigonometria rectilinie.* Manual pentru Şcoala medie. Clasele 8—9. Tradusă după ediţia 14-a rusă. Tiraspol, 1935. Cartea cuprinde capitolele: Funcţii trigonometrice ale unui unghiu ascuţit. Funcţiile trigonometrice ale unghiurilor dela 90° la 360°. Unghiuri negative. Unghiuri mai mari ca 360°. Expresia sinusului, cosinusului şi tangentei sumei şi diferenţei unghiurilor, a unghiului îndoit şi a jumătăţii unui unghiu. Aducerea expresiilor la forma capabilă pentru logaritmare. Noţiuni despre calcularea tablelor trigonometrice. Table trigonometrice. Triunghiuri drept-unghiuri. Despre măsurări pe pământ. Formule trigonometrice fundamentale.

2. N. RÎBCHIN. *Trigonometrie rectilinie.* Manual pentru Şcoala mijlocie. Clasele 9—10. Redactat după a 16-a ediţie rusă. Întărită de Com. Nor. de Invăţământ al Rass Moldoveneşti. Tiraspol, 1938. Conţine aceleaşi capitole ca şi precedenta. Nomenclatura diferă în câteva locuri. Aşa se zice *tanghens* în loc de tangentă, *tăbliţă* trigonometrică în loc de tablă trigonometrică, aducerea Expresiilor la forma *îndămână* pentru logaritmare.

3. N. RÎBCHIN. *Culegere de Probleme de Trigonometrie,* cu un adaos de probleme care se rezolvă prin aplicarea trigonometriei. Pentru clasele 8—9 ale Şcolii medii. Prelucrată de V. A. EFREMOV, Tiraspol, 1935. Cartea are 996 probleme cu numeroase aplicaţii practice, o tablă cu funcţii trigonometrice cu 3 zecimale, din grad în grad, şi răspunsuri la probleme.

4. V. BRADIS. *Table matematice de patru cifre* pentru Şcoala medie. Ediţia a şasea. Tiraspol, 1933. Cartea conţine logaritmi şi antilogaritmi, funcţii trigonometrice naturale şi logaritmii lor, patrate. cuburi până la 100 şi rădăcini patrate şi cubice, lungimea şi aria cercurilor, inversele numerelor întregi, logaritmi naturali, sistemul metric şi echivalentul măsurilor ruseşti şi o foaie albă pentru *Insemnări.*

* * *

Oricine priveşte aceste cărţi — şi ele se pot vedea la Biblioteca *Gazetei Matematice*, — rămâne cu impresia că ele sunt făcute şi utilizate pentru o provincie românească. Prin ele se demonstrează matematiceşte existenţa elementului românesc dincolo de Nistru.

* * *

In urma publicării acestui articol în Nr. trecut, pag. 249—250, D-l LT. M. GRUMĂZESCU a trimis *Gazetei Matematice* o carte, pe care D-sa a găsit-o în Iulie trecut în satul Ţiganca, întitulată: „*Culegere de probleme şi eczerciţii de Aritmetică*", de N. C. POPOVA. Cartea este partea a doua, pentru clasa a 2-a a şcoalei începătoare şi este tradusă după ediţia a 8-a rusească, îndreptată şi adausă. Cartea este tipărită tot în Editura de Stat a Moldovei, la Tiraspol în anul 1941. Ea are 120 pagini, în care se cuprind 886 probleme asupra operaţiilor aritmeticii şi a numeraţii orale şi în scris.

O deosebire importantă între această carte şi cele despre care am vorbit mai înainte este că aceasta, apărând după ocuparea Basarabiei de către Ruşi în 1940, este scrisă cu litere cirilice, iar nu cu litere latine. Se vede că s'a apreciat că nu mai este necesară propaganda care se făcea ca să se arate că adevărata Moldovă era dincolo de Nistru.

I. IONESCU.

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 116)

§. 5. ANALIZA VECTORIALĂ

Prin analiza vectorială se înţelege analiza matematică utilată cu anumite simboluri în scopul de a uşura reprezentarea operaţiunilor din calculul diferenţial şi integral.

In deosebi se constată prin simbolurile introduse, o înlesnire apreciabilă (ceea ce puţini o cunosc) în cercetarea variaţiei funcţiunilor vectoriale în spaţiu şi în timp.

Variația locală și staționară a unei funcțiuni vectoriale.

Exprimând funcția vectorială $\mathfrak{F}$, prin cei trei vectori unitari, ortogonali, de direcția constantă i, j, k în forma $\mathfrak{F} = F_x i + F_y j + F_z k$, rezultă că variația funcțiunei scalare în raport cu timpul, într'un punct dat, denumită variația locală, va da naștere la derivata următoare:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\partial F_x}{\partial t} i + \frac{\partial F_y}{\partial t} j + \frac{\partial F_z}{\partial t} k$$

în care:

$F_x = f_1(x, y, z, t)$; $F_y = f_2(x, y, z, t)$; $F_z = f_3(x, y, z, t)$.

Ca exemplu avem:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2\} = \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{D}\mathfrak{E}) = \left(\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \left[\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\mathfrak{H}\right] + \left[\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right]$$

$$\int \mathfrak{F}\, dt = i \int F_x\, dt + j \int F_y\, dt + k \int F_z\, dt.$$

Prin variația staționară se înțelege variația funcțiunilor scalare și vectoriale în spațiu la un moment dat. Ca exemplu considerăm:

Derivata de direcție.

Să determinăm spre ex. derivata de direcție a vectorului de rază și a vectorilor unitari ortogonali de direcție variabilă $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$.

Se dă $r = f(l)$ care ne arată că vectorul de rază r e cunoscut ca funcție de lungimea liniei.

Avem $dr = dl\,\bar{t}$ $\quad \frac{dr}{dl} = \bar{t}$ reprezintă derivata de direcție a vectorului de rază r după lungimea l sau câtul diferențial al vectorului de rază r după lungimea l.

Să determinăm $\frac{d\bar{t}}{dl}$ care reprezintă derivata de direcție a vectorului unitar tangențial $\bar{t}$ după lungimea l.

Ținând seamă că prin definiție avem: $(\bar{t}\,\bar{t}) = \bar{t}^2 = 1$ deci: $2(\bar{t}\,d\bar{t}) = 0$ ceea ce ne arată că $\bar{t}$ e perpendicular pe $d\bar{t}$; deoarece vectorul unitar $\bar{t}$ are valoarea numerică egală întotdeauna cu

unitatea, înseamnă că variaţia sa se reprezintă numai prin schimbarea direcţiei. (Vezi fig. 39).

Valoarea numerică a vectorului $d\bar{t}$ se exprimă prin $1 . d\varphi$ (ca a unui element de arc de cerc). Vectorul $d\bar{t}$ cade aşa dar în direcţia vectorului unitar normal $\bar{n}$.

Vom pune $d\bar{t} = d\varphi . \bar{n}$ şi vom obţine derivata de direcţie a vectorului unitar tangenţial $\bar{t}$ după linia l în forma:

$$\frac{d\bar{t}}{dl} = \frac{d\varphi}{dl}\bar{n} = c_t \bar{n}$$

în care c_t reprezintă curbura liniei în punctul respectiv, iar $\frac{1}{c_t} = R_t$ reprezintă raza de curbură.

Vectorii $\bar{t}$, $\bar{n}$ formează planul de curbură sau planul osculator.

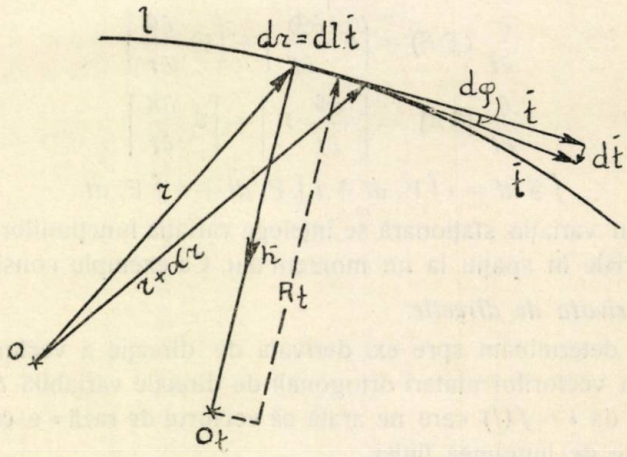


Fig. 39. Derivata de direcţie $\frac{d\bar{t}}{dl}$.

Planul format de $\bar{n}$, $\bar{b}$ formează planul normal la curbă, iar planul format de $\bar{t}$, $\bar{b}$ reprezintă planul tangenţial la curbă, $\bar{b}$ reprezintă vectorul unitar binormal.

Trecem la determinarea derivatelor de direcţie $\frac{d\bar{n}}{dl}$ şi $\frac{d\bar{b}}{dl}$.

In general linia l nu e plană aşa că pentru o deplasare infinitizimală a punctului P pe linia l, vectorul unitar normal $\bar{n}$ îşi va schimba mai întâi direcţia cu $d\varphi$ (o rotaţie în jurul lui $\bar{b}$ ca şi cum

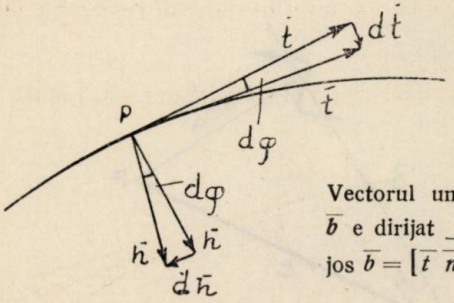
linia ar fi plană) apoi va roti împreună cu vectorul unitar binormal $\bar{b}$ în jurul lui $\bar{t}$ formând arcul $d\psi$, pentru ca planurile $\bar{n}\,\bar{t}$ să se mențină ca plan de curbură și planul $\bar{b}\,\bar{t}$ tangențial la linie.

Așa dar $d\bar{n}$ se compune din următoarele două componente: $d\bar{n} = -d\varphi\bar{t} + d\psi.\bar{b}$. (Vezi fig. 40).

Obținem:

$$\frac{d\bar{n}}{dl} = -\frac{d\varphi}{dl}\bar{t} + \frac{d\psi}{dl}\bar{b} = -c_t\bar{t} + \varkappa\bar{b}$$

în care $\varkappa$ reprezintă torsiunea.



Vectorul unitar binormal $\bar{b}$ e dirijat $\perp$ pe hârtie în jos $\bar{b} = [\bar{t}\,\bar{n}]$.

Fig. 40. Determinarea derivatei $\frac{d\bar{n}}{dl}$.

Derivata de direcție a vectorului unitar binormal $\bar{b}$ va fi:

$$\frac{d\bar{b}}{dl} = -\frac{d\psi}{dl}\bar{n} = -\varkappa\bar{n}.$$

Ca exercițiu se cere să se determine $\frac{d\bar{n}}{dl}$ din relația $\bar{n} = [\bar{b}\,\bar{t}]$.

Avem:

$$\frac{d\bar{n}}{dl} = \left[\frac{d\bar{b}}{dl}\bar{t}\right] + \left[\bar{b}\,\frac{d\bar{t}}{dl}\right] = \varkappa\bar{b} - c_t\bar{t}.$$

Formulele lui FRENET.

Derivatele de direcție ale vectorilor unitari: tangențial, normal și binormal, se mai pot exprima simbolic și în felul următor:

$$\frac{d\bar{t}}{dl} = c_t\bar{n} = [\delta\bar{t}]$$

$$\frac{d\bar{n}}{dl} = -c_t\bar{t} + \varkappa\bar{b} = [\delta\bar{n}]$$

$$\frac{d\bar{b}}{dl} = -\varkappa\bar{n} = [\delta\bar{b}]$$

în care vectorul δ care se găseşte în planul format de $\bar{t}$, $\bar{b}$ (planul tangenţial al liniei în punctul respectiv) se exprimă prin:

$$\delta = \varkappa \bar{t} + c_t \bar{b}.$$

Reprezentarea de mai sus a derivatelor de direcţie e analoagă cu reprezentarea vitezii de rotaţie a unui punct în jurul unei axe. (Vezi fig. 41).

Fie punctul P, fixat prin vectorul de rază r, care roteşte în jurul axei cu viteza unghiulară ω.

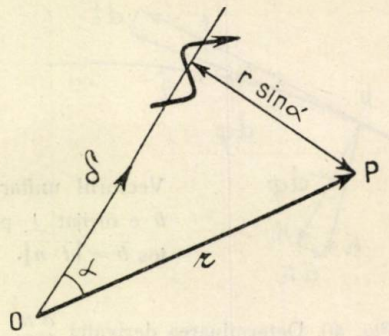


Fig. 41. Viteza unghiulară $v_r = [\delta r]$.

Introducând vectorul $\delta = \omega\bar{\delta}$ în direcţia axei, ţinând seamă de regula tirbuşonului, obţinem pentru viteza de rotaţie expresia: $v_r = [\delta r] = \omega r \sin\alpha\, \bar{t}$ în care vectorul unitar $\bar{t}$ e perpendicular pe planul format de vectorii δ, r cu sensul corespunzător rotaţiei (aplicând regula tirbuşonului).

Ca urmare, valoarea numerică a vectorului δ din formulele lui FRENET reprezintă o mărime care ar echivala cu viteza unghiulară la mişcarea de rotaţie dacă elementul de linie *dl* l'am considera ca un element de timp. In cazul acesta expresiile $[\delta\bar{t}]$, $[\delta\bar{n}]$ şi $[\delta\bar{b}]$ ar exprima vitezele de rotaţie ale vârfurilor vectorilor $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ în jurul axei exprimată prin vectorul δ.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

ASUPRA MIŞCĂRII TAUTOCRONE PLANE

Problema mişcării tautocrone plane, pe care a studiat-o recent D-l PROF. M. GHERMĂNESCU dând o foarte interesantă soluţiune în cazul forţelor centrale [1]), a mai fost obiectul a multe cercetări dintre care menţionez Nota lui KOENIGS în care autorul tratează cazul mai general când există o funcţie de forţă [2]). APPELL, în Cursul său de Mecanică (Vol. I), pune sub forma unei probleme cazul acesta şi indică rezultatul lui KOENIGS: determinarea curbelor tautocrone în cazul când forţa dată derivă dintr'o funcţie de forţă, se face rezolvând o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul I şi de gradul II.

In acest articol ne propunem să stabilim o ecuaţie *diferenţială* de ordinul I care rezolvă cazul tratat de KOENIGS pentru mişcarea plană şi, cu această ocazie, vrem să facem câteva observări generale asupra mişcării tautocrone plane când forţa nu depinde de viteză.

Se ştie că mişcarea tautocronă a unui punct material pe o dreaptă, la care originea e punctul de tautocronism, e definită prin relaţia

$$(1) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = -k^2 s$$

s fiind abscisa punctului, iar k o constantă oarecare. Şi la mişcarea unui punct material greu pe o cicloidă verticală cu concavitatea în sus [3]), se găseşte aceeaşi relaţie dacă s reprezintă arcul de pe curbă.

Din consideraţiile generale făcute de APPELL asupra mişcării tautocrone se deduce că această condiţie e necesară şi suficientă pentru ca un punct material M care descrie o curbă (C) trecând prin origine (punctul de tautocronism), să aibă o mişcare tautocronă [4]).

1) Disquisitiones Mathematicae et Physicae. Bucureşti. T. I. Fasc. 2, pag. 247.

2) Comptes rendus. Paris. Mai 1893. Voir Appell. Mécanique. T. I, p. 479, III-e éd.

3) Originea, punctul de tautocronism, e punctul cel mai jos al curbei în care tangenta e orizontală.

4) Se ştie că timpul T în care mobilul ajunge în origine, fiind pus pe curbă fără viteză iniţială, e independent de poziţia iniţială a mobilului.

Într'adevăr, se vede imediat că această condiţie e suficientă, căci ea atrage după sine relaţia

$$s = s_0 \cos kt$$

s definind poziţia iniţială, astfel că timpul în care mobilul ajunge în O e de fapt independent de s_0.

Pentru a arăta că ea este şi necesară, se poate utiliza procedeul care a condus pe D-l GHERMĂNESCU la soluţionarea problemelor puse de D-sa. Se va vedea din această demonstraţie că ea e valabilă chiar în cazul când nu există o funcţie de forţă şi că se extinde fără nicio modificare la spaţiul cu trei dimensiuni. *Vom presupune în toate acestea forţa* F *funcţie numai de poziţia punctului* M.

Dacă X şi Y sunt proiecţiile forţei F pe axele xOy, unde O e punctul de tautocronism considerat, teorema forţei vii ne va da

$$(2) \qquad d\frac{mv^2}{2} = (X + Y \cdot y')\,dx \quad \text{şi} \quad v^2 = \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} (X + Y \cdot y')\,dx$$

y' fiind dat de ecuaţia curbei (C). Punând

$$(3) \qquad \Phi(x) = \frac{2}{m}\int_{x}^{0} (X + Y \cdot y')\,dx$$

se găseşte

$$v^2 = \Phi(x_0) - \Phi(x) = (1 + y'^2) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

şi [1])

$$(4) \qquad T = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx}{\sqrt{\Phi(x_0) - \Phi(x)}}$$

T fiind timpul în care mobilul parcurge arcul M_0O. Schimbarea de variabilă

$$(5) \qquad \Phi(x) = U \quad , \quad x = \psi(U) \quad , \quad \Phi(x_0) = U_0,$$

unde $\psi(U)$ e ramura inversă a funcţiei $\Phi(x)$ care se anulează cu U [2]), ne dă

$$T = \int_0^{U_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2(\psi)} \cdot \psi'(U)\,dU}{\sqrt{U_0 - U}}$$

---

1) Se ia semnul minus căci x descreşte când t creşte.

2) E suficient să se considere una din ramuri, dacă sunt mai multe.

iar o nouă schimbare de variabilă $U = U_0 . W$ ne conduce la integrala

$$T = \int_0^1 \sqrt{U_0} \frac{\sqrt{1+y'^2[\psi(U_0 W)]} \cdot \psi'(U_0 W)}{\sqrt{1-W}} dW.$$

Să derivăm acum prin raport cu parametrul U_0 de care T trebue să fie independent;

$$\frac{\partial T}{\partial U_0} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2\sqrt{U_0}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{1-W}} \cdot \psi' + \sqrt{U_0} \frac{\frac{y' y'' \psi' W}{\sqrt{1+y'^2}} \psi' + W\sqrt{1+y'^2} \cdot \psi''}{\sqrt{1-W}} \right] dW.$$

Se obţine astfel condiţia, revenind la variabila U,

$$\frac{\partial T}{\partial U_0} = \frac{1}{2U_0} \int^{U_0} \frac{(1+y'^2)[\psi' + 2U\psi''] + 2U y' y'' \psi'^2}{\sqrt{U_0 - U} \cdot \sqrt{1+y'^2}} dU = 0$$

sau, după consideraţii analoage celor expuse de APPELL,

$$\frac{\psi' + 2U\psi''}{U\psi'} + \frac{2y' y'' \psi'}{1+y'^2} = 0.$$

Ecuaţia aceasta funcţională se mai scrie sub forma

$$\frac{d(U\psi'^2)}{U\psi'^2} + \frac{d(1+y'^2)}{1+y'^2} = 0$$

astfel că o integrare ne conduce la relaţia (constanta de integrare fiind $4k^2$),

$$4k^2 U \psi'^2 (1+y'^2) = 1 \qquad (6)$$

din care se deduce, observând că diferenţiala $d\Psi$ introdusă de D-l GHERMĂNESCU este tocmai ds,

$$\frac{dU}{2.\sqrt{U}} = \pm k . ds \quad \text{şi} \quad U = k^2 s^2 = \Phi(x).$$

Obţinem deci relaţia

$$v^2 = -k^2(s^2 - s_0^2) \tag{7}$$

din care, printr'o derivare, se deduce condiţia (1). Aceasta e deci şi necesară. Se vede imediat din calculele făcute că timpul T este egal cu $\frac{\pi}{2k}$.

CAZUL CÂND SE CUNOAŞTE CURBA (C)

Se ştie că forţa care determină pe o curbă dată o mişcare tautocronă nu e complect determinată căci nu se cunoaşte decât componenta ei tangenţială [1]). Orice problemă din care se va putea deduce direcţia forţei necunoscute F va admite deci o soluţie unică, iar reacţiunea curbei va fi determinată din ecuaţia de mişcare proiectată pe normală, de pildă. Vom indica aici câteva cazuri

a) *Forţa e paralelă cu o direcţie fixă.*

Se poate alege axa Oy paralelă cu direcţia dată astfel că forţa va fi definită prin relaţiile $X = 0$, $Y = F(y)$. Dacă ţinem seamă de relaţiile (2) şi (7) care dau relaţia considerată de APPELL ca necesară şi suficientă pentru o mişcare tautocronă [2])

$$X \cdot dx + Y \cdot dy = -mk^2 s \cdot ds \tag{8}$$

obţinem imediat expresia forţei F

$$F(y) = -mk^2 \cdot s \cdot \frac{ds}{dy}. \tag{9}$$

Trebue deci să presupunem că arcul de curbă (C) care trece prin origine (punctul de tautocronism) e reprezentat de o funcţie continuă $y = y(x)$ admiţând în fiecare punct o derivată continuă $y'(x)$, care nu se anulează în niciun punct al acestui arc decât poate în origine.

b) *Direcţia forţei* F *trece printr'un punct fix* P *al planului.*

Acesta este tocmai cazul tratat de D-l GHERMĂNESCU căci, presupunând că forţa F este funcţie de poziţia punctului M şi

1) APPELL. Mécanique. T. I-er, p. 456, III-e édition.

2) De fapt, această ecuaţie rezultă din ecuaţia mişcării proiectată pe tangenta la curbă (prima ecuaţie intrinsecă).

cunoscând traiectoria (C), rezultă că această forță depinde numai de distanța $\overline{MP}$ [1]).

Punctul P poate fi ales pe axa Oy ($OP = p$), astfel că relației (8) i se mai adaugă relația

$$(y - p) \cdot X - x \cdot Y = 0$$

care exprimă că forța F e dirijată după dreapta MP. Deducem atunci

$$(9') \qquad X = -mk^2 \frac{x s \frac{ds}{dx}}{x + y'(y-p)}, \quad Y = -mk^2 \frac{(y-p) s \frac{ds}{dx}}{x + y'(y-p)}$$

astfel că forța F este perfect determinată, singur k rămânând arbitrar. Se introduce însă o condiție: numitorul $x + y'(y-p)$ să fie diferit de zero pe arcul OM_0. Cum acest numitor se poate scrie sub forma

$$\frac{y-p}{x} - \left(-\frac{1}{y'}\right)$$

unde apar coeficienții unghiului ai direcției forței și normalei la curba (C), rezultă că nu vom putea avea o mișcare tautocronă decât pe arcul OP' obținut ducând normala din P la curba (C) care taie arcul ce trece prin origine în P'. Într'adevăr, în P' forța F este normală curbei astfel că, punând punctul material M în P', el ar rămâne pe loc. Nu putem avea deci o mișcare tautocronă decât dacă punem punctul M în orice punct al arcului OP', distinct de P'.

Dacă arcul de curbă OM_0 este dat dinainte, punctul P nu poate fi arbitrar ales. El trebue să fie exterior regiunii din planul xOy ale cărei puncte se află pe normalele la arcul ales cu excepția punctelor de pe frontiera acestei regiuni situate pe normala în O.

c) *Forța derivă dintr'un potențial* $V(x, y)$.

Deși se știe că forța F este normală suprafețelor echipotențiale, această ipoteză nu permite să se determine direcția ei. Într'adevăr, condiția (8) exprimă că se cunoaște numai derivata tangențială a funcției V, astfel că nu putem determina această

1) Coordonatele x și y se exprimă imediat funcție de distanța $\overline{MP}$.

funcţie. Se vede aceasta mult mai uşor dacă punem în relaţia (8)

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

obţinând o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul I prin raport cu $V(x, y)$

$$(10) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + y'(x)\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{mk^2}{2}\frac{d(s^2)}{dx}.$$

Să presupunem acum că punctul $M(x, y)$ este un punct oarecare al planului xOy, nesituat pe curba (C), iar $y'(x)$ şi s sunt funcţiunile respective de x calculate din ecuaţia curbei (C). Obţinem sistemul

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dV}{mk^2 s\frac{ds}{dx}}$$

care conduce la integralele prime

$$y - y(x) = C_1 \quad \text{şi} \quad V - mk^2\frac{s^2}{2} = C_2$$

şi care ne dă integrala complectă

$$V(x, y) = mk^2\frac{s^2}{2} + F[y - y(x)]$$

F fiind o funcţie arbitrară. In lungul curbei (C), funcţia potenţială V este determinată, în afară de o constantă aditivă, de relaţia aceasta căci făcând y egal cu $y(x)$, obţinem [1])

$$V = mk^2\frac{s^2}{2} + \text{Const.}$$

Pe orice altă direcţie, funcţia V va depinde de funcţia arbitrară F astfel că ipoteza existenţei unei funcţii de forţă nu permite cunoaşterea direcţiei acestei forţe.

---

1) Această relaţie se poate obţine şi din condiţia (8) care se mai scrie sub forma

$$dV = -mk^2 s \,.\, ds.$$

(Va urma) RADU BĂDESCU.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ

In volumul XLVI (anul 1940—1941) al Revistei *Gazeta Matematică* nu s'a publicat nici un articol şi nici o notă matematică şi nici nu s'au propus probleme sau exerciţii sub semnătura vreunui elev de liceu.

In acest volum s'au publicat soluţiile a 16 probleme de aritmetică. Regretăm că nu găsim printre rezolvitorii acestor 16 probleme un nume, care repetându-se covârşitor la mai multe probleme să-şi impue dreptul la acordarea premiului. Singur D-l P. P. DRĂGHICESCU (elev clasa VIII-a Liceul Militar din Iaşi) apare cu soluţii bune la problemele 5135 şi 5323. In general D-sa are cele mai multe menţiuni în *Tabla numelor* din August 1941, după menţiunile unor membri ai Societăţii *Gazeta Matematică*. Având în vedere marea activitate a acestui harnic corespondent şi ţinând seama şi de numărul mare de probleme de aritmetică cu soluţii foarte bune, pe care redacţia le posedă dela D-l P. P. DRĂGHICESCU, propunem a i se acorda d-sale premiul de aritmetică, în valoare de 5.000 lei.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ARITMETICĂ
G-RAL GH. BUICLIU, ION IONESCU,
C-DOR I. LINTEŞ.

Acest raport a fost citit şi aprobat de Adunarea Generală din 19 Februarie 1942.

NOTE MATEMATICE

27. *O problemă de construcţie a lui* G. ŢIŢEICA. Regretatul profesor G. ŢIŢEICA a propus în Vol. XI al *Gazetei Matematice* problema 1034 în care cerea să se *dea construcţia triunghiului* ABC *când se cunosc centrul* O *al cercului circumscris, centrul* I *al cercului înscris şi centrul* I′ *al unui cerc exînscris.*

Soluţia este imediată observând că mijlocul D a lui II′ se află pe cercul ABC. La finele soluţiei, la pag. 237, Vol. XI, G. ŢIŢEICA cerea discuţia problemei, discuţie care nu s'a publicat până acum, de şi este foarte simplă. O dau în cele ce urmează.

Observ mai întâi că punctul A se găseşte neapărat pe prelungirea lui I'I, dacă I′ este cercul exînscris unghiului A. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca $OI < OD$ adică punctul D trebue să se găsească de aceeaşi parte cu I faţă de perpendiculara pe II′ în mijlocul lui ID. Aceasta pentru cazul când se dau punctele I, I′ şi se întreabă cum trebue ales punctul O.

Presupun că se dau O şi I. Condiţia $OI < OD$ rămâne. Deci punctul D trebue să fie exterior cercului de centru O şi rază OI, iar I′ simetricul lui I faţă de D.

Indeplinind aceste condiţiuni, problema este totdeauna posibilă şi are o singură soluţie.

Cu aceasta am împlinit cererea pe care o adresase G. ŢIŢEICA în 1906, vreunui corespondent.

G-L GH. BUICLIU.

28. *Asupra problemei 5282.* Soluţia $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ nu corespunde. Rândurile 4, 5 şi 6 dela pag. 102, Nr. 2, Vol. XLVI, trebuesc înlocuite cu următoarele:

Prima ecuaţie prin ridicare la pătrat, ne dă $\sin x \cos x = 0$. De unde, ţinând seamă de (1) (pentru a nu se introduce soluţii noi prin ridicarea la patrat), avem:

$$\sin x = 1 \quad \therefore \quad (3) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

şi

$$\cos x = 1 \quad \therefore \quad (4) \quad x = 2k\pi.$$

G-L G. I. LIT.

29. *Asupra problemei 19,* cap. XIII din „*Culegere de Probleme de Algebră*“ de A. G. IOACHIMESCU, partea I, ed. IV.

Soluţia acestei probleme se referă numai la cazul când $a^2 - 1 > 0$, adică atunci când $a > 1$ sau $a < -1$. Ea trebue complectată cu indicaţia că atunci când $a^2 - 1 \leqslant 1$, adică atunci când $-1 \leqslant a \leqslant 1$, trinomul $x^2 - 2ax + 1$ având rădăcini imaginare sau egale, inegalitatea este valabilă pentru $x > 2a$.

GH. TH. GH.

30. *Indreptare.* Soluţia I dată problemei 4890 şi publicată în numărul 4, anul XLVII al G. M., e valabilă în condiţii ceva mai restrictive decât cele enunţate la începutul paginei 176. Trebue anume postulată existenţa chiar a primelor n derivate ale coordonatelor punctului unei curbe din S_n în raport cu parametrul curent, nu numai existenţa şi continuitatea primelor $n-1$, aşa cum se cere acolo.

Redactararea sumară a acelei părţi a demonstraţiei care implică existenţa celor n derivate, a făcut cu putinţă strecurarea unei inexactităţi. Pasajul cuprinde ultimele trei rânduri ale paginei 179 continuate cu primele patru rânduri ale paginei 180 şi trebue înlocuit cu următorul:

„Din cele spuse rezultă că, pentru $A = A_n + dA_n$ determinantul

$$\left| 1 \quad x_1^{(t)} \ldots . x_n^{(t)} \right|$$

e un infinit mic de ordinul creşterii dt a parametrului, iar formaţiunile $Y_0, Y_1, \ldots . Y_n$ rămân finite. Cât priveşte determinantul

$$D(t) = \left| y_0^{(t)} y_1^{(t)} \ldots . y_n^{(t)} \right|,$$

dela numitorul lui (9), rămâne în general finit pentru $A = A_n + dA_n$. Dacă însă valoarea $D(t_n)$ e nulă şi dacă funcţiunile $x_i(t)$ sunt de n ori derivabile se poate arăta că D e infinit mic de ordin superior lui 1. Intr'adevăr, funcţiunile $y_i(t)$ conţin derivatele lui $x_i(t)$ până la ordinul $n-1$ inclusiv. Aşa dar combinaţia liniară cu coeficienţi constanţi $D(t)$ de aceste funcţiuni $y_i(t)$ admite derivată în domeniul locului „destul de regulat“ $t = t_n$. Aşa dar

$$D(t_n + dt) = dt\, D(t_n + \theta dt)$$

$$0 < \theta < 1$$

unde $D(t_n + \theta dt)$ poate fi finit sau el însuşi infinit mic. Dacă deci $D(t_n) = 0$ atunci pentru $A = A_n + dA_n$ determinantul $D(t)$ e infinit mic de ordin egal sau superior lui dt. Rezultă de aci că, în primul caz, — $D(t)$ finit — funcţiunea $\frac{V}{\nu}$ e un infinit mic de ordinul 1; în al doilea caz, — $D(t)$ infinit mic, — inversa $\frac{\nu}{V}$ a acestei funcţiuni e un infinit mic de ordin

$$n\vartheta - 1 \geqslant 1$$

unde $n \geqslant 2$ înseamnă numărul de dimensiuni ale spaţiului S_n, iar $\delta \geqslant 1$ ordinul de infinitezimalitate al lui $D(t)$".

Pe lângă îndreptarea capitală ce aveam de adus soluţiei I a problemei în chestiune mai notez încă două îndreptări de amănunt apărute la prima citire:

Pagina 176 rândurile 4 şi 5 trebue citit în loc de „determinantul dela numărătorul de ordinul $n+1$": „determinantul de ordinul $n+1$ dela numărătorul lui v".

Pagina 180, formula (8) e prost redată prin suma lui EINSTEIN. E mai bine să se scrie

$$(8) \qquad \mu M_{n+1} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{M_{n+1}^{i} (\beta^i y)^n}{(\beta^{i_0} y)(\beta^{i_1} y) \ldots (\beta^{i_n} y)} .$$

D. BARBILIAN.

31. *Un sistem diofantian.* Pentru sistemul

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$$
$$A^3 + B^3 + C^3 = D^3 + E^3 + F^3$$

am găsit următoarele soluţiuni:

I. Obţinem un sistem de soluţii dacă punem

$$A = 3f^2 + 24fg + 2g^2 \quad , \quad D = 3f^2 + 72fg + 386g^2$$
$$B = 9f^2 + 168fg + 770g^2 \quad , \quad E = 9f^2 + 120fg + 386g^2$$
$$C = 12f^2 + 180fg + 672g^2 \quad , \quad F = 12f^2 + 204fg + 864g^2.$$

Exemplu: $f = 2$; $g = 1$ dă

$$31^2 + 540^2 + 571^2 = 271^2 + 331^2 + 660^2$$
$$31^3 + 540^3 + 571^3 = 271^3 + 331^3 + 660^3$$

o soluţie pentru cazul $D = E$ obţinem dacă facem $f = 0$ sau $f = -16$. Avem următorul exemplu

$$1^2 + 385^2 + 336^2 = 193^2 + 193^2 + 432^2$$
$$1^3 + 385^3 + 336^3 = 193^3 + 193^3 + 432^3.$$

II. Un al doilea sistem de soluţii obţinem punând

$$A = 3(x+y)y^2 + 6x^2y + xz^2 \quad , \quad D = 3(x+z)y^2 - 6x^2y + xz^2$$
$$B = 3(x-z)y^2 - 6x^2y + xz^2 \quad , \quad E = 3(x-z)y^2 + 6x^2y + xz^2$$
$$C = 6xy^2 - 6xyz \quad , \quad F = 6xy^2 + 6xyz.$$

III. Dacă luăm numerele a, b, g, y arbitrare şi dacă

$$c = a + b \quad ; \quad e = \frac{g^2}{6c} \quad ; \quad \lambda = \frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{a-b}$$

atunci obţinem un al treilea sistem de soluţii sub forma

$$A = ay^2 + \lambda gyx + ex^2 \quad , \quad D = ay^2 - \lambda gyx + ex^2$$
$$B = by^2 - \lambda gyx + ex^2 \quad , \quad E = by^2 + \lambda gyx + ex^2$$
$$C = cy^2 - gyx \quad , \quad F = cy^2 + gyx.$$

Fiecare din sistemele de soluţii II şi III verifică şi relaţiile

$$A + B = D + E$$
$$\frac{A-D}{F-C} = \frac{E-B}{F-C} = \frac{F+C}{A+D-B-E}.$$

A. MOESSNER.

32. *Notă asupra divizibilităţii numerelor.* Fie

(1) $$A = x^{2in} a_{2i+1} + x^{2in-n} a_{2i} + \ldots + x^n a_2 + a_1$$

un număr scris în baza de numeraţie x.

I. Dacă între grupele de numere $a_1, a_2, \ldots, a_{2i+1}$ de câte n cifre există relaţia

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2i+1} = a_2 + a_4 + a_{2i} + p$$

atunci, adunând această relaţie cu (1) avem

$$A - p = a_{2i+1}(x^{2in} - 1) + a_{2i}(x^{2in-n} + 1) + \ldots + a_3(x^{2n} - 1)$$
$$+ a_2(x^n + 1) = (x^n + 1)[a_{2i+1}(x^{2in-n} - x^{2in-2n} + \ldots + x^n - 1)$$
$$+ a_{2i}(x^{2in-2n} - x^{2in-3n} + x^n + 1) \ldots + a_3(x^n - 1) + a_2]$$
$$= (x^n + 1) \sum_{k=2}^{2i+1} (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j x^{nj}.$$

Deci $$A = mult.\ (x^n + 1) + p.$$

Dacă $$p = mult.\ (x^n + 1)$$

atunci şi $$A = mult.\ (x^n + 1)$$

adică: *Un număr* A, *scris în baza* x, *este divizibil prin* $(x^n + 1)$, *dacă împărţit în grupe de câte* n *cifre dela dreapta spre stânga, diferenţa dintre suma grupelor de rang impar şi suma grupelor de rang par, se divide prin* $(x^n + 1)$.

II. Dacă între grupele de numere $a_1, a_2, \ldots, a_{2i+1}$, există relaţia

$$a_1 + a_3 q^2 + \ldots + a_{2i+1} q^{2i} = a_2 q + a_4 q^3 + \ldots + a_{2i} q^{2i-1} + p$$

atunci adunând cu (1) avem, ca la I,

$$A - p = (x^n + q) \sum_{k=2}^{2i+1} (-1)^k a_k \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j x^{nj} q^{k-2-j}$$

deci

$$A = mult.\ (x^n + q) + p$$

adică: *Un număr* A *scris în baza* x, *este divizibil prin* $(x^n + q)$, *dacă împărţindu-l în grupe de câte* n *cifre dela dreapta spre stânga şi înmulţind fiecare grupă prin* q *la o putere cu o unitate mai mică decât rangul grupei respective, suma grupelor de rang impar egalează sau întrece suma grupelor de rang par cu un multiplu de* $(x^n + q)$.

Ca aplicaţie să rezolvăm problema 5151 a cărei soluţie s'a publicat în *Gazeta Matematică*, Vol. XLV, pag. 598 şi unde se cereau patratele *abcdefghk* aşa încât

$$abc + ghk = def + 1.$$

După cele demonstrate precedent rezultă

$$abcdefghk = N^2 = mult.\ 1001 + 1.$$

Deci după tabloul care dă forma unui patrat faţă de divizorul 1001, rezultă că soluţiile trebue căutate printre numerele

$$1001\,m \pm 1\ ;\ 1001\,m \pm 155\ ;\ 1001\,m \pm 274\ ;\ 1001\,m \pm 428$$

ceea ce concordă cu rezultatul găsit la soluţia dată problemei.

P. P. DRĂGHICESCU.

33. *Asupra unei extinderi relative la modulele rădăcinilor ecuaţiilor algebrice.* In urma unei greşeli de paginaţie, articolul cu titlul de mai sus publicat în *Gazeta Matematică*, XLVI — 519 a apărut necomplect. Textul trebue restabilit adăugând, la pag. 520, Vol. XLVI, rândul 8 de jos, următoarele:

Pentru a generaliza acest rezultat să considerăm ecuaţia:

$$\varphi(\rho) = A_0 \rho^n - A_1 \rho^{n-1} - \ldots - A_k \rho^{n-k} - \ldots - A_n - A_k (\alpha^k - 1) \rho^{n-k}$$

$$= A_0 \rho^i - A_1 \rho^{n-1} - \ldots - A_k \alpha^k \rho^{n-k} - \ldots - A_n = 0.$$

Se ştie că: $|x| < \rho_0'$, unde ρ_0' este rădăcina pozitivă a ecuaţiei:

$$\varphi'(\rho) = A_0\rho^n - A_1\rho^{n-1} - \ldots - A_k\rho^{n-k} - \ldots - A_n = 0.$$

Avem pe de altă parte

$$\varphi(\rho_0') = \varphi'(\rho_0') - A_k(\alpha^k - 1)\rho_0^{n-k} = -A_k(\alpha^k - 1)\rho_0^{n-k} < 0$$

dacă $\alpha > 1$, de unde rezultă că ρ_0, rădăcina pozitivă a ecuaţiei $\varphi(\rho) = 0$ este mai mare ca ρ_0', şi deci:

$$|x| < \rho_0' < \rho_0.$$

Transformata în αr relativ la $\varphi(\rho) = 0$, este:

$$A_0\alpha^n r^n - A_1\alpha^{n-1} r^{n-1} - \ldots - A_k\alpha^n r^{n-k} - \ldots - A_n = 0.$$

In această ecuaţie $-A_k\alpha^n$ este evident coeficientul cu cel mai mare modul.

Dacă A_{k_i} este determinat de inegalităţile:

$$A_k > A_{k_1} > \ldots > A_{k_{i-1}} > A_{k_i} > A_{k_{i+1}}, A_{k_{i+2}}, \ldots, A_{k_n}$$

pentru ca $-A_{k_1}\alpha^{n-k_1}$ să fie coeficientul cu modul imediat următor în mărime lui $-A_k\alpha^n$, trebue să avem:

$$A_0\alpha^n < A_{k_1}\alpha^{n-k_1},\ A_1\alpha^{n-1} < A_{k_1}\alpha^{n-k_1}, \ldots,\ A_{k_1-1}\alpha^{n-k_1+1} < A_{k_1}\alpha^{n-k_1}$$

care, se deduce în mod analog ca mai sus, sunt satisfăcute pentru:

$$\alpha = \sqrt[k_1]{\frac{A_{k_1}}{A_{k_2}}}.$$

Rezultă, conform cu inegalitatea ce ne propunem a generaliza că:

$$|r| < \sqrt[k]{\frac{A_k\alpha^n}{A_{k_1}\alpha^{n-k_1}}}\left(1 + \frac{A_{k_1}\alpha^{n-k_1}}{A_0\alpha^n}\right) = \sqrt[k]{\frac{A_{k_1}}{A_{k_2}}}\left(1 + \frac{A_{k_2}}{A_0}\right)$$

$$|x| < \rho_0 \leqslant |\rho| = |\alpha r| = \alpha|r| < \sqrt[k_1]{\frac{A_{k_1}}{A_{k_2}}}\sqrt[k]{\frac{A_k}{A_{k_2}}}\left(1 + \frac{A_{k_2}}{A_0}\right).$$

Considerând ecuaţia:

$$A^0\rho^n - A_1\rho^{n-1} - \ldots - A_n - A_k(\alpha^k - 1)\rho^{n-k} - A_{k_1}(\alpha^{k_1} - 1)\rho^{n-k_1} = 0$$

şi aplicând ultima limită găsită transformatei în αr se obţine:

$$|x| < \sqrt[k_2]{\frac{A_{k_2}}{A_{k_3}}}\sqrt[k_1]{\frac{A_{k_1}}{A_{k_3}}}\sqrt[k]{\frac{A_k}{A_{k_3}}}\left(1 + \frac{A_{k_3}}{A_0}\right)$$

astfel că din aproape în aproape şi aplicând rezultatele şi transformatei în $\frac{1}{x}$ a ecuaţiei (1) deducem în fine:

$$\sqrt[n-k_{i-1}]{\frac{A_{k_i}}{A_{k_{i-1}}}}\ \sqrt[n-k_{i-2}]{\frac{A_{k_i}}{A_{k_{i-2}}}}\cdots\sqrt[n-k]{\frac{A_{k_i}}{A_k}}\ \frac{A_n}{A_n+A_{k_i}}<|x|$$

$$<\sqrt[k_{i-1}]{\frac{A_{k_{i-1}}}{A_{k_i}}}\ \sqrt[k_{i-2}]{\frac{A_{k_{i-2}}}{A_{k_i}}}\cdots\sqrt[k]{\frac{A_k}{A_{k_i}}}\cdot\frac{A_0+A_{k_i}}{A_0}. \qquad (3)$$

Dacă A_m este coeficientul cu cel mai mic modul aceste inegalităţi iau forma:

$$\frac{\sqrt[n!]{A_m}}{A_{n-1}\sqrt[5]{A_{n-2}}\sqrt[4]{A_{n-3}}\ldots\sqrt[n]{A_0}}\cdot\frac{A_n}{A_n+A_m}<|x|$$

$$<\frac{A_1\sqrt[3]{A_2}\sqrt[n]{A_3}\ldots\sqrt[n]{A_n}}{\sqrt[n!]{A_m}}\cdot\frac{A_0+A_m}{A_0}.$$

IULIAN PETRESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

EXAMENUL DE INTRARE DIN OCT. 1941 IN ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN BUCUREŞTI

A. Secţia Industrială şi Silvicultură

GEOMETRIE PLANĂ

Problema I (obligatorie). Se dă paralelogramul ABC (AB = a; AD = b). Se duc bisectoarele AEG; BFG; CFH şi DEH respectiv ale unghiurilor A, B, C, D.

1. Să se demonstreze că figura EHFG este un dreptunghiu.

2. Considerând vârfurile D şi C fixe, lungimile a şi b constante, iar unghiurile A, B, C, D variabile în propriul lor plan să se găsească locul geometric al punctelor E, F, G, H, I şi J.

3. In cazul când ABCD este un dreptunghiu să se arate că figura EHFG este un patrat şi să se calculeze suprafaţa sa.

Problema II (facultativă). Printr'un punct dat M situat pe o latură a unui triunghiu dat ABC să se ducă o dreaptă Δ care să împartă suprafaţa triunghiului în două părţi egale (construcţia geometrică).

Problema III (facultativă). Printr'un punct dat A din planul unui cerc dat O se duce dreapta variabilă AM. Pe prelungirea acestei drepte se ia AM = MN. Se cere locul geometric al punctului N.

GEOMETRIA IN SPAȚIU

Problema I (obligatorie). Se dă triunghiul echilateral ABC de latură *a* și o dreaptă MN situată în același plan cu latura BC și la distanța *h* de aceasta.

1. Să se calculeze suprafața ce se obține prin rotirea cu 360 grade în jurul axei MN a conturului ABC al triunghiului.

2. Să se calculeze volumul ce se obține prin rotirea cu 360 grade în jurul axei MN a suprafeței triunghiului ABC.

3. Să se verifice rezultatul dela punctul 1 arătându-se că suprafața căutată este egală cu produsul dintre perimetrul triunghiului ABC și lungimea cercului descris de punctul de întâlnire al bisectoarelor triunghiului.

4. Să se verifice rezultatul dela punctul 2 arătându-se că volumul căutat este egal cu produsul dintre suprafața triunghiului și lungimea cercului descris de punctul de întâlnire al medianelor triunghiului.

Problema II (facultativă). Se dă un plan P și două puncte exterioare planului A și B. Se duc perpendicularele AA' și BB' pe plan și pe A'B' ca diametru se duce un cerc în planul P. Să se găsească pe acest cerc un punct M astfel încât: unghiul AMA' = unghiul AMB'.

(Durata 4 ore).

B. Secția Electromecanică și Construcții

MECANICA RAȚIONALĂ

I.

Un zid având forma unui paralelipiped drept este supus acțiunilor greutății proprii P și a unei forțe orizontale H.

Zidul are baza $\overline{AB} = \overline{CD} = 0{,}80$ m., înălțimea $\overline{BC} = \overline{AD} = 3{,}75$ m., lungimea (după muchiile ce se proiectează în A, B, C, D) egală cu 1,00 m. și greutatea specifică 2.000 kg/mc.

Forța orizontală H = 500 kg. se aplică la înălțimea $\overline{BE} = 3{,}00$ m.

Se cere să se determine:

1. Rezultanta forțelor P și H ca mărime (rotunjită la kg. întregi) și direcție (tangenta unghiului rezultantei cu verticala).

2. La ce distanță de muchia ce se proiectează în A va întretăia această rezultantă baza $\overline{AB}$.

3. Admițând că zidul s'ar putea răsturna în jurul muchiei ce se proiectează în A, să se spună dacă, în cazul dat, se produce sau nu răsturnarea.

II.

O grindă $\overline{AB}$ de 8,00 m. lungime este așezată pe malul unei ape astfel că porțiunea $\overline{AM}$ reazimă pe mal, iar restul grinzii $\overline{MB}$ stă liber, în aer deasupra apei; în punctul C, la distanța $\overline{CB} = 1{,}00$ m. de capătul liber B stă un om de greutate P = 80 kg.

Grinda are secţiunea dreptunghiulară de 25×32 cm², iar greutatea specifică a lemnului se va considera 625 kg/mc.

Se cere să se determine distanţa minimă $\overline{AM} = x$ cu care poate să rezime grinda $\overline{AB}$ pe mal fără ca să se răstoarne în apă, în jurul punctului M.

III.

O placă metalică omogenă ABCEFGA, în forma a $^3/_4$ dintr'un patrat (patratul din care s'a scos sfertul FEDG), este suspendată cu un fir de cuiul A'.

Laturile pătratului

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 4a\,;\ \text{iar}\ \overline{CE} = \overline{ED} = \overline{DG} = \overline{GA} = \overline{FE} = \overline{FG} = 2a.$$

Se cere să se determine unghiul φ pe care-l face direcţia firului $\overline{AA'}$ cu latura $\overline{AB}$ a plăcii, după ce placa şi-a luat poziţia de echilibru.

* * *

Notă. 1. Calculele se vor face clar şi ordonat.

2. Calculele se vor face cu cel mult două zecimale.

3. Cei ce nu au tabele de logaritmi, vor exprima unghiurile cerute în probleme prin tangentele lor.

* * *

Toate chestiunile sunt obligatorii. (Durata 4 ore).

GEOMETRIE PLANĂ ŞI IN SPAŢIU

1. Intr'un hexagon regulat ABCDEF, se duc diagonalele AD, AE şi BC. M fiind punctul de întâlnire al diagonalelor AD şi BC şi N al diagonalelor AE şi BC să se arate în ce raport împart punctele M şi N diagonala BC.

2. O placă dreptunghiulară având latura mare egală cu $2a$ şi latura mică egală cu a se roteşte în jurul diagonalei care face un unghiu de 30 grade cu latura mare.

Se cere să se arate care va fi forma cutiei de volum minim în care se poate roti această placă dreptunghiulară şi care este volumul şi suprafaţa acestei cutii.

GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

Se dau punctele: A (10, 145, 0), B (40, 85, 0), C (80, 130, 0), A_1 (137, 0, 180), M (100, 60, 21) şi N (140, 9, 130).

Se cere:

1. Să se unească punctul A cu A_1.

2. Prin punctele B şi C să se ducă drepte paralele la AA_1, care să fie limitate la punctele B_1 şi C_1 în planul vertical de proiecţie.

3. Unind punctele M şi N şi socotind că dreapta MN este o dreaptă de cea mai mare pantă a unui plan P, să se găsească urmele acestui plan.

4. Cu ajutorul acestui plan P să se găsească punctele în care dreapta MN întâlneşte prisma $ABCA_1B_1C_1$.

Linia pământului paralelă cu marginile mici ale paginei şi la 150 m/m de jos în sus. (Datele în milimetri).

(Durata 4 ore).

BIBLIOGRAFIE

Anuarul Observatorului din Bucureşti. Longitudine E 1h 44m 23s, 18. Latitudine N. 44° 24' 49", 4. 1942. Bucureşti 1941. Anotimpurile astronomice în 1942 (Timp legal). Intrarea soarelui în semnele zodiacului. Tabele care dau pentru fiecare zi a anului şi pentru soare ascensiunea dreaptă, declinaţia, durata trecerii semidiametrului, semidiametrul, timpul sideral, ziua săptămânii, răsăritul şi apusul, trecerea la meridian. Elemente generale pentru soare şi lună. Table pentru lună. Date pentru pământ, planete şi sateliţi, comete, stele căzătoare, steaua polara, măsura timpului, ora legală, refracţia, termometrie, densităţi, dilataţii, fuziune, călduri specifice, date geografice şi meteorologice, magnetism, seismologie, etc.

Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara. Anul 10. Nr. 3—4. Timişoara 1941. Sur l'équation différentielle linéaire de prémier ordre, par D. POMPEI. Nouveau domaine de recherches en trigonométrie quadratique, par V. ALACI, Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire, par TH. ANGHELUŢĂ. Sur une construction géométrique, par M. GHERMĂNESCU. Sur une équation fonctionnelle, par M. GHERMĂNESCU. Transformatorul hidraulic, de A. N. BĂRGLĂZAN.

Euclides. Revista de Ciencias Exactas, Fisico-Quimicas y Naturales. Ano II, Num. 11, 1942, Madrid. Editorial. Poligonalul uniform în calculul grinzilor simple, de A. FRAILE. Nouă metodă de aproximaţie a rădăcinilor incomensurabile în ecuaţiile algebrice, de C. IBANEZ. Rezolvarea grafică a ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi complecşi, de G. DIAZ.

Mathesis. Anul LIV, No. 8. Octobre 1940. Asupra a două transformări geometrice de R. GOORMAGTIGH. Asupra numerelor lui PITAGORA, de G. LAMBERT. Asupra curbei cappa, de A. CLAEYS. Conică circumscrisă unui triunghiu real, de R. DEAUX. Sur les fonctions de BESSEL, de J. LEEMANS. Generalizarea unei teoreme a lui NEUBERG, de R. BOUVAIST. Asupra unei chestiuni propuse dar nerezolvate din *l'Intermédiaire des mathématiciens,* de R. BOUVAIST. Asupra tetraedrului ortocentric, de R. BLANCHARD. Asupra numerelor curioase, de G. LAMBERT. Asupra unei înfăşurătoare, de R. GOORMAGHTIGH.

Pozitiva. Anul II, Nr. 5—6, Ianuarie—Februarie 1942, Bucureşti. Mişcarea punctului material, de M. GHERMĂNESCU. Asupra construcţiei centrelor de curbură la curbele plane, de A. GHEORGHIU. O nouă generalizare a formulei lui PASCAL, de E. VIŞA. Asupra determinantului VANDERMONDE, de N. N. MIHĂILEANU. O proprietate a polinoamelor antisimetrice, de M. MĂNESCU. Asupra unor serii, de M. N. ROŞCULEŢ. Urmare la articolul „Studiu asupra unor conice", de G. D. SIMIONESCU.

Revista Matematică Hispano-Americană. Publicată de Institutul „JORGE JUAN" de matematici şi Societatea matematică ispaniolă. Seria 4. Tomul I. Num. 3. 1941. Madrid. ALFONSO EL SABIO, de J. G. R. Unele ecuaţi

Diofantine imposibile de forma $x^m + 1 = y^n$, de R. OBLATH. Cartografia conformă a elipsoidului de rotaţie cu aplicaţie la harta Spaniei, de S. A. LAPLAZA. Asupra fundamentelor geometriei intrinsece a unui spaţiu al lui RIEMANN şi proprietăţile sistemului de referinţe mobile, de F. B. RADUAN.

CONSTANTIN G. ILIOVICI, Greşeli în studiul formelor nedeterminate. Ploeşti, 1942.

VICTOR MARIAN. Fizicianul PIERRE WEISS (1865—1940), Extras din *Revista Ştiinţifică* „V. ADAMACHI", Iaşi 1941.

CERERI

309. Rog a mi se recomanda tratate clasice de „*Calculul variaţiunilor*" şi „*Calcul tensorial*" în una din limbile română, franceză, germană sau engleză. Eventual, la cele ce se pot procura mai uşor şi modalitatea de procurare.

INGINER DAN M. BODNĂRESCU.

Asupra Cererii Nr. 300. In Nr. trecut, la pag. 268 D-l GENERAL GH. BUICLIU a vorbit de cuvântul *văşcălie* pe care eu l-am dat ca fiind un cuvânt popular echivalent cu *cilindru.* D-sa spune că a auzit că acel cuvânt se dă unei baniţe de lemn, cu care se măsoară cerealele. Ceea ce am văzut eu în comuna Creaţa-Leşile din judeţul Ilfov nu era de loc *baniţă* sau *mertic,* ci numai partea laterală a lor, fără fund. Marginea de jos, unde ar fi să fie fundul, era teşită dinăuntru în spre exterior. Văşcălia se întrebuinţa pe ariile de treerat grâne spre a încărca mai repede baniţele. Baniţele se puneau cu o generalizare pe taluzele grămezilor de grâne şi cu o văşcălie se trăgea boabele în baniţă pentru a se umple mai repede şi mai pe neîndesate.

Mi s'a mai spus, — dar eu nu am auzit direct, dela ţărani, — că *văşcălie* se zice şi la marginea de lemn a unei *site* sau *ciur.* Corespondenţii *Gazetei Matematice,* răspândiţi în toată ţara, ar putea cerceta ca să stabilească la ţară dacă, prin cuvântul văşcălie nu se înţelege cilindru sau o suprafaţă cilindrică.

I. IONESCU.

DIVERSE

a) Şedinţe

Societatea Română de Matematici a ţinut şedinţă în 9.II.1942; la ordinea zilei, comemorarea lui EMILE PICARD. Au vorbit D-nii Profesori CONST. POPOVICI şi S. STOILOV.

In şedinţa adunării generale dela 19 Februarie a. c. a Societăţii *Gazeta Matematică,* D-l Prof. ALEX. GHIKA, a fost ales membru al Societăţii.

b) **Sporirea Bibliotecii**

BOGDAN G. IONESCU. Geometrie elementară pentru clasa III-a secundară. Bucureşti 1901.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

BOGDAN G. IONESCU. Geometrie elementară pentru clasa IV-a secundară. Bucureşti 1902.

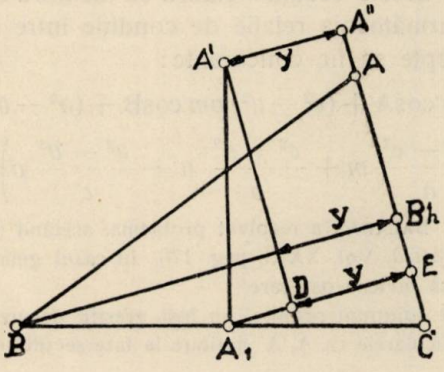
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3497. *Pe mijlocul laturilor unui triunghiu se ridică perpendiculare pe aceste laturi şi se unesc extremităţile perpendicularelor cu vârfurile opuse. In ce caz cele trei transversale unghiulare astfel obţinute sunt concurente?*

N. KAUFMANN.

Fie A_1 mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Pe perpendiculara în A_1 pe BC luăm lungimea $A_1A' = m$, m fiind socotit



pozitiv dacă A' se găseşte deasupra laturii BC şi negativ în caz contrar. Fie y, z distanţele lui A' la laturile AC şi AB. Notăm cu D proiecţia lui A_1 pe paralela din A' la AC. Se vede pe figură că

$$y = \frac{h_b}{2} - A_1D \quad , \quad A_1D = m\cos C \quad , \quad y = \frac{h_b}{2} - m\cos C.$$

La fel se găseşte

$$z = \frac{h_c}{2} - m\cos B.$$

Coordonatele baricentrice ale lui A′ sunt deci

$$am \ , \ \frac{1}{2} bh_b - bm \cos C \ , \ \frac{1}{2} ch_c - cm \cos B$$

sau

$$A'[am \ , \ S - bm \cos C \ , \ S - cm \cos B]$$

S fiind suprafaţa triunghiului. La fel se găseşte

$$B'[S - an \cos C \ , \ bn \ , \ S - cn \cos A]$$

$$C'[S - ap \cos B \ , \ S - bp \cos A \ , \ cp].$$

De aici se deduc ecuaţiile dreptelor AA′, BB′, CC′:

$$(AA') \quad \frac{y}{S - bm \cos C} = \frac{z}{S - cm \cos B}$$

$$(BB') \quad \frac{z}{S - cn \cos A} = \frac{x}{S - an \cos C}$$

$$(CC') \quad \frac{x}{S - ap \cos B} = \frac{y}{S - bp \cos A} .$$

Inmulţind aceste ecuaţii membru cu membru se elimină x, y, z şi se găseşte următoarea relaţie de condiţie între m, n, p pentru ca cele trei drepte să fie concurente:

$$(b^2 - c^2)\, np \cos A + (c^2 - a^2)\, pm \cos B + (a^2 - b^2)\, amn \cos C + \left(\frac{b^2 - c^2}{a} m + \frac{c^2 - a^2}{b} n + \frac{a^2 - b^2}{c} p \right) S = 0.$$

1°. D-l GH. BALABAN a rezolvat problema, arătând că ea a fost tratată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXIII, pag. 176, în cazul general când A′, B′, C′ sunt picioarele a 3 ceviene oarecare.

2°. Celelalte soluţiuni primite, au fost greşite deoarece rezolvitorii au presupus perpendicularele ca $A_1 A'$ limitate la intersecţiile cu una din celelalte 2 laturi.

3°. Cazul general când A′, B′, C′ sunt picioarele a 3 ceviene a fost studiat recent şi de D-l GH. D. SIMIONESCU în articolul publicat la pag. 130, Vol. XLVI, *Gazeta Matematică*.

4°. Inafară de teorema lui KARIYA, care este un caz particular al problemei generale dela 3°, s'au mai publicat în *Gazeta Matematică* chestiuni în legătură cu această frumoasă proprietate. Cităm:

— Nota dela pag. 205, Vol. IX, în care G. ŢIŢEICA aduce la cunoştinţa cititorilor *Gazetei Matematice*, proprietatea acestui punct şi dă o demonstraţie prin omografie.

— Nota de la pag. 158, Vol. X, în care G. ŢIŢEICA dă unele rezultate.

— Nota dela pag. 12, Vol. XI, în care D-l N. ABRAMESCU arată că problema e cunoscută din 1896 găsită de V. RETALI şi dă coordonatele normale al punctului.

— Nota dela pag. 208, Vol. XVII, în care † A. ANGELESCU arată cu ajutorul primelor elemente de geometrie că *dacă se iau pe mediatoarele laturilor unui triunghiu segmentele* A_1A', B_1B', C_1C' *proporţionale cu laturile* BC, CA, AB, *atunci* AA', BB', CC' *sunt concurente.*

— Nota dela pag. 409, Vol. XXVIII, în care d-l T. POPOVICIU generalizează teorema lui FRANKE.

— Articolul dela pag. 167, Vol. XXIX, în care D-l CPT. M. FOCŞENEANU, generalizează aceeaşi teoremă a lui FRANCKE.

— Problema 5112 şi articolul citat al D-lui G. D. SIMIONESCU, publicate în Vol. XLVI.

G-L GH. B.

PROBLEMA 3845. *Se consideră un triunghiu* ABC *şi fie* Δ *şi* Δ' *două tangente paralele ale cercului înscris. Să se demonstreze că dreapta ce uneşte punctele lui* MIQUEL *ale celor două patrulatere formate de triunghiul* ABC *şi de fiecare din dreptele* Δ *şi* Δ' *trece prin centrul exterior de similitudine al cercurilor înscris şi circumscris triunghiului considerat.*

ŞERBAN GHEORGHIU.

I. *Soluţie* dată de D-l N. N. MIHĂILEANU (când era Student Bucureşti).

Se efectuează transformarea prin inversiune în care cercul înscris (I) este cercul fundamental. Se observă că prin această inversiune cercul circumscris unui triunghiu, circumscris cercului (I), se transformă într'un cerc de rază jumătatea razei cercului (I). Intr'adevăr fie MNP un triunghiu circumscris cercului (I) şi *m*, *n*, *p* punctele de contact ale laturilor acestui triunghiu cu cercul (I). Inversele vârfurilor M, N şi P sunt mijloacele laturilor *np*, *mp* şi *mn* şi deci inversul cercului MNP este cercul lui EULER, al triunghiului *mnp*.

Fie acum (O) cercul circumscris triunghiului ABC, iar (γ) şi (γ') cercurile circumscrise triunghiurilor determinate de laturile AB şi AC şi de câte una din tangentele Δ şi Δ'. Aceste tangente

fiind paralele cercurile (γ) şi (γ') sunt tangente în A. Fie de asemeni, ω şi ω' punctele lui MIQUEL din enunţ. Este evident că aceste puncte sunt punctele comune cercului (O) şi cercurilor (γ) şi (γ'), bine înţeles diferite de punctul A.

Prin inversiunea de cerc fundamental cercul (I), cercurile (O), (γ) şi (γ') se transformă în trei cercuri egale, transformatele ultimelor două cercuri fiind în plus şi tangente. Punctele ω şi ω' devin două puncte diametral opuse pe cercul (g) inversul cercului (O) după cum rezultă din următoarea propoziţiune:

Se consideră trei cercuri egale având un punct comun. Punctul comun este ortocentrul triunghiului format de celelalte puncte de intersecţie ale cercurilor.

Rezultă în definitiv că cercul I$\omega\omega'$ trece, în afară de punctul I, prin încă un punct fix: inversul centrului cercului (g), sau punctul J de pe dreapta OI pentru care avem:

$$OI \cdot OJ = R^2$$

R fiind raza cercului (O).

Punctul fix S, de pe dreapta OI ce are aceeaşi putere în raport cu cercul (O) şi cu cercurile care trec prin punctele I şi J, aparţine evident dreptei $\omega\omega'$. Acest punct S este centrul de similitudine exterior al cercurilor (O) şi (I) fiindcă avem:

$$\overline{OS}^2 - R^2 = SI \cdot SJ$$

sau:

$$\overline{OS}^2 - R^2 = (\overline{OI} - \overline{OS})\left(\frac{R^2}{\overline{OI}^2} - \overline{OS}\right),$$

$$\therefore \overline{OS} = \frac{R \cdot \overline{OI}}{R - r}.$$

II. *Altă soluţiune.* ω şi ω' fiind punctele lui MIQUEL din enunţ este evident că aceste puncte se corespund pe cercul circumscris (O), într'o involuţie. Intr'adevăr fiind dat punctul ω există o singură parabolă (π) înscrisă în triunghiul ABC cu focarul în acest punct. Parabola (π) are cu cercul înscris (I) în afară de laturile triunghiului ABC încă o singură tangentă comună Δ. Focarul ω' al parabolei (π') înscrisă în patrulaterul determinat de triunghiul ABC şi tangenta Δ', a cercului (I), paralelă cu Δ este

singurul omolog al punctului ω. Invers, pornind dela ω' găsim că unicul său omolog este ω. Rezultă de aci că dreapta $\omega\omega'$ trece printr'un punct fix, S.

Pentru a se determina acest punct fix S este suficient a se considera diferite poziţiuni particulare ale dreptei $\omega\omega'$.

Fie pentru aceasta u şi v punctele ciclice ale planului. Punctele X şi Y unde isotropele I_u şi I_v întâlnesc a doua oară cercul (O) sunt evident punctele duble ale involuţiei în care se corespund focarele ω şi ω'. Deducem de aci, că punctul fix S este polul, în raport, cu cercul (O) al dreptei XY. Dreapta XY este axul radical al cercului (O) şi al cercului de rază nulă confundat cu centrul cercului (I). Se ştie că polul acestui ax radical este centrul de similitudine exterior al cercurilor (O) şi (I) [1]).

Notă. Se poate obţine acelaşi rezultat fără a se întrebuinţa vreun element imaginar.

Considerăm astfel cazul particular când tangentele Δ şi Δ' sunt latura BC şi tangenta paralelă acestei laturi.

Fie D punctul de contact a lui BC cu cercul (I), E punctul diametral lui D pe cercul (I), iar A' punctul comun paralelelor duse din B şi C respectiv laturilor AC şi BC. In acest caz particular unul din punctele MIQUEL coincide cu vârful A, iar cel de al doilea, pe care îl notăm cu Σ, este evident focarul parabolei (Γ) înscrisă în triunghiul ABC şi tangentă laturii BC în punctul D. Axa parabolei (Γ) este paralelă cu dreapta DA' şi prin urmare şi cu dreapta AE. Fie acum E', simetricul lui E în raport cu bisectoarea AI. Punctul E' este situat evident pe cercul (I). Pe de alta parte, rezultă dintr'o proprietate bine cunoscută a cevienelor isogonale, că focarul Σ al parabolei (Γ) se găseşte pe dreapta AE', dreapta lui SIMSON a acestui focar trebuind să fie perpendiculară pe AE. Or, dreptele IE' şi DIE fiind simetrice în raport cu bisectoarea AI rezultă că raza IE' a cercului (I) este paralelă şi de acelaşi sens cu raza OA a cercului (O). Dreapta $A\Sigma$ trece deci prin centrul exterior, de similitudine al cercurilor (O) şi (I).

Analog, se demonstrează că dreapta $\omega\omega'$ trece prin acelaşi centru de similitudine, când tangentele Δ şi Δ' sunt paralele laturii AB sau AC. Punctul fix este deci acest centru de similitudine.

Ş. A. G.

---

1) A se vedea ŞERBAN GHEORGHIU, *Asupra unor relaţiuni metrice.* G. M., XXXVI, pag. 246.

PROBLEMA 4453. *Fie* M *un punct în planul unui triunghiu* ABC *şi* M_a, M_b, M_c *respectiv simetricele lui în raport cu laturile* BC, CA, AB. *Să se demonstreze că avem:*

$$a^2(a^2+\overline{AM_a}^2)+b^2(b^2+\overline{BM_b}^2)+c^2(c^2+\overline{AM_c}^2)$$
$$=a^2(b^2+c^2+\overline{AM}^2)+b^2(c^2+a^2+\overline{BM}^2)+c^2(a^2+b^2+\overline{CM}^2)$$

unde: $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$.

ŞERBAN A. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU (Lic. Militar, Iaşi), DIMITRIE MAVRODIN (student), MIRCEA D. POPA (Lic. Militar, Iaşi) şi N. D. ŞTEFĂNESCU (Bucureşti).

Deoarece avem:

$$2(a^2+b^2+c^2)-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=16S^2$$

relaţiunea propusă se reduce la:

$$\Sigma\, a^2(\overline{AM_a}^2-\overline{AM}^2)=16S^2.$$

Fie acum, A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor MM_a, MM_b, MM_c. Observând că proiecţia medianei AA_1, din tr. AMM_a, pe latura MM_a este egală cu înălţimea h_a a vârfului A din tr. ABC, obţinem:

$$\overline{AM_a}^2-\overline{AM}^2=2\,MM_a\,.\,h_a=4\,MA_1\,.\,h_a$$

$$\therefore\quad \Sigma\, a^2(\overline{AM_a}^2-\overline{AM}^2)=8S\,\Sigma\, a\,MA_1.$$

Or, avem evident:

$$\Sigma\, a\,MA_1=2S$$

deci

$$\Sigma\, a^2(\overline{AM_a}^2-\overline{AM}^2)=16S^2.$$

Altă soluţie a fost dată de D-l I. N. SAGER.

PROBLEMA 4723. *Să se rezolve sistemul:*

$$\sec x=\operatorname{tg}2y\ ,\quad \sec y=\operatorname{tg}2x.$$

I. IONESCU.

Ecuaţiile date:

$$\sec x=\operatorname{tg}2y\ ,\quad \sec y=\operatorname{tg}2x, \qquad (1)$$

le ridicăm la patrat şi avem:

$$\sec^2 x=\operatorname{tg}^2 2y\ ,\quad \sec^2 y=\operatorname{tg}^2 2x. \qquad (2)$$

Inlocuim aci secantele în funcţie de tangente şi tangentele unghiurilor duble în funcţie de tangentele unghiurilor simple şi găsim:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = [2 \operatorname{tg} y/(1 - \operatorname{tg}^2 y)]^2 = 4 \operatorname{tg}^2 y\,(1 - \operatorname{tg}^2 y)^2$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 y = [2 \operatorname{tg} x/(1 - \operatorname{tg}^2 x)]^2 = 4 \operatorname{tg}^2 x/(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2. \quad (3)$$

Să punem acum:

$$X = \operatorname{tg}^2 x \quad , \quad Y = \operatorname{tg}^2 y. \quad (4)$$

Inlocuind în ecuaţiile precedente, ele devin:

$$1 + X = 4Y/(1 - Y)^2 \quad , \quad 1 + Y = 4X/(1 - X)^2 \quad (5)$$

sau gonind numitorii găsim:

$$\begin{aligned} XY^2 + Y^2 - 2XY + X - 6Y + 1 &= 0, \\ X^2Y + X^2 - 2XY - 6X + Y + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Facem suma şi diferenţa acestor ecuaţii şi găsim:

$$XY(X + Y) + X^2 + Y^2 - 4XY - 5(X + Y) + 2 = 0, \quad (7)$$
$$(X - Y)(XY + X + Y - 7) = 0. \quad (8)$$

Ultima ecuaţie se desface în următoarele două:

$$X - Y = 0, \quad (9)$$
$$XY + X + Y - 7 = 0. \quad (10)$$

Să considerăm sistemul format de ecuaţiile (7) şi (9). Aceasta din urmă ne dă, pentru $X = Y$:

$$X^3 - X^2 - 5X + 1 = 0. \quad (11)$$

Ecuaţia aceasta are o rădăcină negativă care nu ne interesează şi două rădăcini pozitive în intervalele (0, 1) şi (2, 3). Calculându-le prin metoda lui NEWTON, de exemplu, găsim:

$$X_1 = 0{,}194\ldots \qquad X_2 = 2{,}709\ldots \quad (12)$$

Ţinând seamă de ecuaţiile (4), ecuaţia (9) ne dă:

$$\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y,$$
$$\operatorname{tg} x = \pm \operatorname{tg} y.$$

Vom lua semnul + sau — aşa fel ca ecuaţiile (1) ale sistemului iniţial să fie satisfăcute. Cu ajutorul tablelor de logaritmi, găsim:

$$\begin{aligned} x &= \quad 58^0\,43'\,10'' \quad , \quad x = 23^0\,46'\,16'' \\ y &= -58^0\,43'\,10'' \quad , \quad y = 23^0\,46'\,16''. \end{aligned} \quad (13)$$

Să considerăm acum sistemul format de ecuaţiile (7) şi (10). Să punem:

$$X + Y = U \quad , \quad XY = V. \tag{14}$$

Obţinem astfel ecuaţiile:

$$U + V = 7 \quad , \quad U^2 + UV - 5U - 6V + 2 = 0. \tag{15}$$

Rezolvăm acest sistem prin substituţie şi găsim uşor: $U=5$, $V = 2$. Deci X şi Y sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$Z^2 - 5Z + 2 = 0. \tag{16}$$

Deci:

$$X = (5 + \sqrt{17})/2 = 4{,}56155\ldots, \quad Y = (5 - \sqrt{17})/2 = 0{,}43845\ldots$$

sau invers. Ţinând seamă de ecuaţiile (4) găsim cu ajutorul tablelor de logaritmi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 64^0\,54'\,38'' \\ y = 33^0\,30'\,39'' \end{array}\right\} \text{ sau } \left.\begin{array}{l} x = 33^0\,30'\,39'' \\ y = 64^0\,54'\,38'' \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Dacă x_0 şi y_0 sunt una din determinările principale date de ecuaţiile (12) şi x_0' şi y_0' date de (17), atunci soluţiile generale sunt:

$$x = \pm x_0 + (2k + 1)\pi \quad , \quad x = \pm x_0' + 2k\pi,$$

$$y = \mp y_0 + (2k' + 1)\pi \quad , \quad y = \pm y_0' + 2k'\pi,$$

DIMITRIE MAVRODIN
(Student).

PROBLEMA 5365. *In cercul* O *să se înscrie coardele* AB, BC, CD *egale între ele şi aşa încât prima şi ultima să se întâlnească într'un punct* P, *dat în plan.*

G-L GH. BUICLIU.

Problema comportă examinarea a două cazuri.

Cazul I. Punctul P *este exterior cercului* O. Presupunând problema rezolvată fie M şi N mijloacele corzilor AB, BC; R raza cercului O şi x valoarea comună a apotemelor OM, ON. Sumele arcelor AB cu BC şi BC cu CD fiind egale, unghiurile PBC şi PCB sunt egale şi deci ON trece prin P. Patrulaterul inscriptibil OMBN dă

$$\overline{PO}^2 . \overline{PN}^2 = \overline{PB}^2 . \overline{PM}^2.$$

Inlocuind în această egalitate lungimile în funcţie de a, R şi x obţinem:

$$a^2(a-x)^2 = [\overline{PN}^2 + \overline{BN}^2](a^2 - x^2)$$

$$\therefore \quad a^2(a-x)^2 = (a^2 - x^2)[(a-x)^2 + R^2 - x^2].$$

Eliminăm soluţia $x = a$, căci atunci $x > R$ şi problema nu este posibilă, şi găsim că apotema $OM = x$ este dată de ecuaţia

$$2ax^2 - R^2x - a^2R^2 = 0 \tag{1}$$

ale cărei rădăcini sunt

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{R^2}{2a} + \sqrt{\left(\frac{R^2}{2a}\right)^2 + 2R^2}\right] \tag{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{R^2}{2a} - \sqrt{\left(\frac{R^2}{2a}\right)^2 + 2R^2}\right] \tag{3}$$

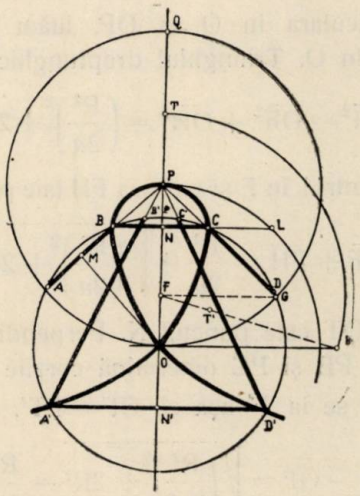


Fig. 1.

Discuţie. Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca fiecare sau cel puţin una din rădăcinile x_1, x_2, să fie mai mică decât R. Scriind $x_1 < R$ găsim

$$\sqrt{R^2 + 8a^2} < 4a - R$$

şi deoarece $a > R$, $4a - R$ este pozitiv şi deci prin ridicare la patrat sensul neegalităţii nu se schimbă. Efectuând această ridicare la patrat găsim

$$0 < 8a^2 - 8aR$$

care este tot una cu ipoteza $a > R$. Deci *avem totdeauna o soluţie* x_1.

Scriind $x_2 < R$ găsim

$$-\sqrt{R^2 + 8a^2} < 4a - R$$

care e totdeauna adevărată, membrul I fiind negativ iar al II-lea pozitiv. Soluţia x_2 este *de asemeni totdeauna posibilă.*

Problema *are deci două soluţii.*

Construcţia formulelor (2) *şi* (3). In figura 1 luăm $OQ = 2a$. Cercul O se taie cu cercul de diametru OQ în G. Fie F proiecţia lui G pe OP. Avem, în triunghiul dreptunghic OGQ

$$\overline{OF} = \frac{\overline{OG}^2}{OQ} = \frac{R^2}{2a}.$$

Pe perpendiculara în O la OP, luăm $OH = R\sqrt{2}$, latura patratului înscris în O. Triunghiul dreptunghic HOF dă

$$\overline{FH}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OH}^2 = \left(\frac{R^2}{2a}\right)^2 + 2R^2.$$

Cercul cu centrul în F şi cu raza FH taie pe OP în T aşa încât

$$\overline{OT} = \overline{OF} + \overline{FH} = \frac{R^2}{2a} + \sqrt{\left(\frac{R^2}{2a}\right)^2 + 2R^2} = 2x_1.$$

Mijlocul lui QT este punctul N. Perpendiculara în N pe OP dă coarda BC iar PB şi PC determină corzile AB şi CD.

Dacă pe FH se ia T' aşa că $OF = FT'$, atunci

$$\overline{T'H} = \overline{FH} - \overline{OF} = \sqrt{\left(\frac{R^2}{2a^2}\right)^2 + 2R^2} - \frac{R^2}{2a} = -2x_1.$$

Se determină punctul N' luând pe PO şi în sensul PO lungimea

$$\overline{ON'} = \frac{\overline{T'H}}{2}$$

şi găsim a doua soluţie A'B'C'D'.

Caz particular. Când $a = R$, rădăcina (2) devine

$$x_1 = R$$

imposibilă căci trebue ca $x < R$ iar rădăcina (3) dă

$$x_2 = \frac{R}{2}$$

şi atunci P este vârful triunghiului echilateral înscris în O.

Cazul II. Punctul P *este interior cercului* O (fig. 2). Procedând ca în cazul I, găsim că apotema ON este dată de ecuaţia

$$2az^2 + R^2z - aR^2 = 0 \qquad (4)$$

ale cărei rădăcini sunt

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{R^2}{2a}\right)^2 + 2R^2} - \frac{R^2}{2a}\right] \qquad (5)$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{R^2}{2a}\right)^2 + 2R^2} + \frac{R^2}{2a}\right] \qquad (6)$$

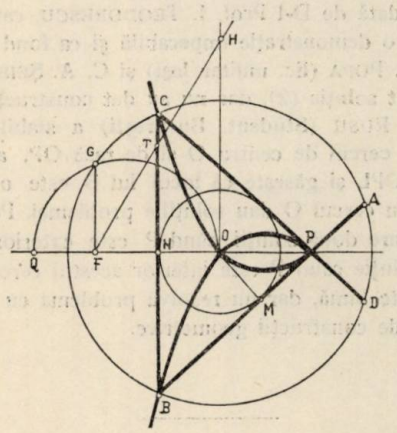


Fig. 2.

Discuţie. Trebue ca $z < R$. Scriind

$$z_1 < R$$

ajungem la

$$\sqrt{R^2 + 8a^2} < 4a + R$$

care este totdeauna adevărată. Scriind

$$|z_2| < R$$

ajungem la

$$0 < a^2 - aR$$

care este adevărată numai dacă $a > R$, ceea ce este contra ipotezei cazului II. Deci în cazul II avem numai *o soluţie* dată de formula (5) în care $a < R$.

Cazul $a = R$ dă cazul limită al triunghiului echilateral studiat la cazul I.

Construcţia se face analog cu cea dela cazul I.

Observaţiuni. 1°. Atât construcţia dela I cât şi cea dela II se poate face după problema clasică a construcţiei a două lungimi când li se cunoaşte suma şi produsul, căci suma şi produsul rădăcinilor (1) şi (4) sunt cunoscute.

2°. Problema a fost rezolvată numai parţial de corespondenţi. Astfel au stabilit ecuaţia (1) şi au găsit numai soluţia (2) dând şi construcţii geometrice, d-nii: I. TEODORESCU (Prof.), H. M. BODNĂRESCU (Student, Politehnica Bucureşti), GH. GH. BROŞTEANU (lic. mil. Iaşi).

3°. Construcţia geometrică a expresiei (2), publicată în soluţia acestei probleme, este acea dată de D-l Prof. I. TEODORESCU, care în soluţia parţială ce ne-a trimis a dat o demonstraţie impecabilă şi ca fond şi ca formă.

4°. D-nii A. N. POPA (lic. militar Iaşi) şi C. A. ŞEIBULESCU au stabilit ecuaţia (1) şi au găsit soluţia (2), dar nu au dat construcţiile geometrice.

5°. D-l M. L. RUSU (Student, Bucureşti) a stabilit că dacă L este intersecţia lui BC cu cercul de centru O şi de rază OP, atunci B este ortocentrul triunghiului OPL şi găseşte că locul lui B este o strofoidă dreaptă ale cărei intersecţii cu cercul O dau soluţiile problemei. Pe această cale, D-sa a găsit că problema are două soluţii când P este exterior cercului O şi a afirmat că *nu are* soluţie când P este interior acestui cerc. Soluţia parţială a D-lui M. L. RUSU este bună, dar nu rezolvă problema cu rigla şi compasul, cum cer problemele de construcţii geometrice.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5386. *Fie* M *un punct în planul parabolei* p. *Bisectoarele unghiului format de tangentele din* M *taie polara lui* M *în* U *şi* V. *Mijlocul segmentului* $\overline{UV}$ *se află pe directoarea parabolei.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţiune geometrică. Fie A, B punctele de tangenţă, F focarul parabolei, D intersecţiunea polarei lui M cu paralela din M la axă, C intersecţiunea aceleiaşi polare cu MF iar O intersecţiunea dreptei AB cu directoarea parabolei. Vom arăta că O este mijlocul lui UV.

D este mijlocul coardei AB căci MD este diametru conjugat cu AB; deci

$$OA + OB = 2 \cdot OD.$$

Punctul O aflându-se la intersecţiunea dreptei AB cu directoarea, este polul dreptei MF care uneşte polii acestor drepte. Urmează că diviziunea (OACB) este armonică, sau

$$\frac{2}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2 \cdot OD}{OA \cdot OB} \quad \therefore \quad OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Rezultă că A, B şi C, D sunt perechi ale unei involuţii de centru O, mijlocul segmentului IJ care uneşte punctele duble, IJ fiind determinate prin condiţiunea

$$(IJAB) = (IJCD).$$

I, J sunt tocmai U, V; în adevăr

$$(UVAB) = -1 \quad \text{şi} \quad (UVCD) = -1,$$

căci după teorema PONCELET, MU şi MV sunt bisectoarele unghiului CMD.

PAUL P. DRĂGHICESCU
Clasa VII-a, liceul militar Iaşi.

Soluţiune analitică. Fie M (a, b) şi $y^2 = 2px$ ecuaţiunea parabolei. Polara lui M, de ecuaţiune

$$by = p(a + x)$$

taie parabola în două puncte, fie ele $T_1(x_1, y_1)$ şi $T_2(x_1, y_2)$. Tangentele în T_1 şi T_2 au ecuaţiunile

$$y - b = \frac{p}{y_1}(x - a) \quad ; \quad y - b = \frac{p}{y_2}(x - a).$$

Dacă mutăm axele, paralel, cu originea în M, cele două tangente au ecuaţiunea comună

$$(y_1 Y - pX)(y_2 Y - pX) = 0$$

$$\therefore \quad y_1 y_2 Y^2 - p(y_1 + y_2) XY + p^2 X^2 = 0$$

dar y_1, y_2 sunt rădăcinile sistemului

$$y^2 = 2px \quad , \quad by = p(x + a)$$

deci

$$y^2 - 2by + 2ap = 0$$

de unde

$$y_1 + y_2 = 2b \quad , \quad y_1 y_2 = 2ap$$

şi ecuaţiunea tangentelor devine

$$pX^2 - 2b\,XY + 2aY^2 = 0.$$

Se ştie că ecuaţiunea bisectoarelor fascicolului de drepte dat de ecuaţiunea

$$Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = 0$$

este

$$Bx^2 + (C - A)\,xy - By^2 = 0.$$

In cazul nostru, ecuaţiunea bisectoarelor este

$$bX^2 - (2a - p)\,XY - bY^2 = 0.$$

Intersectăm aceste drepte cu polara lui M

$$b(Y + b) = p(X + 2a)$$

şi găsim ecuaţiunea ce dă abscisele punctelor U, V

$$X^2 + (2a + p)\,X + b^2 - 2ap = 0$$

de unde

$$\tfrac{1}{2}(X_1 + X_2) = -\tfrac{1}{2}p - a \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\tfrac{1}{2}p$$

ceea ce arată că mijlocul segmentului UV se află pe directoarea parabolei.

TEODOR A. ŞERBAN
Student-Inginer.

Notă. — 1°. O foarte bună soluţiune *geometrică* a dat şi D-l VICTOR L. FLORESCU.

2°. Alte soluţiuni analitice au fost date de d-nii: IOAN A. BADEA (lic. Braşov), G. G. BROŞTEANU (lic. Iaşi), MIREL D. STOENESCU (Şc. Of. Aviaţie), MIHAIL I. TREFILOV (elev-ing.) şi RADU P. VOINEA (lic. Fr. Buzeşti, Craiova).

3°. Triunghiul MUV este conjugat faţă de parabola p şi centrul cercului circumscris unui triunghiu conjugat este aşezat pe directoarea parabolei (CH. MICHEL, *Compléments de Géométrie moderne*, pag. 30).

PROBLEMA 5486. *Să se demonstreze că dacă se adună* a^n *la produsul*

$$(1+a+a^2+\ldots+a^n+a^{n+1})(1+a+a^2+\ldots+a^{n-2}+a^{n-1})$$

se obţine un patrat perfect.

G-L GH. BUICLIU.

Se observă că cei doi factori ai produsului P din enunţ sunt respectiv

$$\frac{a^{n+2}-1}{a-1} \quad \text{şi} \quad \frac{a^n-1}{a-1}$$

aşa că

$$P+a^n=\frac{a^{n+2}-1}{a-1}\cdot\frac{a^n-1}{a-1}+a^n=\frac{a^{2n+2}-2a^{n+1}+1}{(a-1)^2}=\left[\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right]^2$$

sau încă

$$P+a^n=[1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}+a^n]^2.$$

Au dat soluţii foarte bune D-nii: I. BADEA, C. BAKONY, GH. BROŞTEANU, GH. BUCUR, FL. CĂRUNTU, V. CIUMAŞU, N. C. DIACONESCU, P. P. DRĂGHICESCU, D. F. DUMITRESCU, GH. DUMITRESCU, C. EFTIMIE, OCT. GHEORGHIU, Z. C. IVAN, MARIUS GHEORGHIU, C. C. MIHĂILESCU, C. MILEA, MODÂLCĂ EM., N. MOSCOVICI, D. NACHE, M. NEGREA, C. PANTELIMON, MARIN POPESCU, GH. PUCHIU, TH. RĂDULESCU, GH. D. SBÂRNEA, N. SOTIRESCU, MIREL D. STOENESCU, D. GH. VASILIU, E. VIJELIE, GH. D. VOICU şi R. P. VOINEA.

PROBLEMA 5555. *Un punct material parcurge un cerc orizontal de rază* R *cu viteza constantă* v. *Centrul cercului parcurge în acelaşi timp un cerc într'un plan vertical, având aceeaşi rază* R, *cu aceeaşi viteză* v.

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-l RADU P. VOINEA (bacalaureat, Craiova).

După timpul t, mobilul M a parcurs un arc θ, pe cercul orizontal, iar centrul acestui cerc a parcurs acelaşi arc θ. Alegând un sistem de axe cu origina în centrul cercului vertical, Ox e perpendicular pe planul acestui cerc, iar Oz şi Oy respectiv perpendiculară şi paralelă cu planul cercului orizontal.

Coordonatele lui M sunt:

(1) $x=\pm R\sin\theta$; (2) $y=\pm 2R\cos\theta$; (3) $z=\pm R\sin\theta$

semnele $\pm$ corespunzând diferitelor sensuri de rotire.

Eliminând pe θ: între (1) şi (2) apoi între (1) şi (3)

$$x \pm z = 0 \tag{4}$$

găsim că locul cerut este elipsa de intersecţie a cilindrului

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{4R^2} = 1 \tag{5}$$

cu unul din planele (4), după sensul mişcării punctului material.

Se obţin aceleaşi elipse prin intersecţia planurilor (4) cu cilindrul

$$\frac{z^2}{R^2} + \frac{y^2}{4R^2} = 1.$$

Soluţia 2-a dată de D-l S-LT P. DOBRESCU (Politehnica Bucureşti).

Comparând cele 2 rotaţii deducem că rezultatul va fi tot o rotaţie de viteză unghiulară $\omega = \frac{v}{R}\sqrt{2}$, vector de mărime şi direcţie constantă. Prin urmare, punctul va descrie o curbă plană cu o iuţeală unghiulară constantă. Considerând mişcarea pe cercul orizontal ca mişcare relativă şi cea de pe cercul vertical drept conductoare, pentru timpul t, putem scrie pentru acceleraţii:

$$\bar{\gamma} = \gamma_{cond} + \gamma_{rel} + \gamma_{coriolis}$$

unde

$$\gamma_{cr} = \gamma\,(\text{CORIOLIS}) = 2\omega v \cos\omega t \qquad \left(\omega = \frac{v}{R}\right).$$

Proiectând pe cele 3 axe avem:

$$(O_x)\ \gamma_{rel} = -\frac{v^2}{R}\sin\omega t \ ; \quad \gamma_{cond} = +\frac{v^2}{R}\cos\omega t \ ; \quad \gamma_{cr} = 0$$

$$(O_y)\ \gamma_{rel} = -\frac{v^2}{R}\cos\omega t \ ; \quad \gamma_{cond} = 0 \ ; \quad \gamma_{cr} = 0$$

$$(O_z)\ \gamma_{rel} = 0 \ ; \quad \gamma_{cond} = -\frac{v^2}{R}\sin\omega t \ ; \quad \gamma_{cr} = 2\frac{v^2}{R}\cos\omega t$$

prin urmare proiecţiile acceleraţiei totale pe axe vor fi:

$$\gamma_x = -\frac{v^2}{R}(\sin\omega t + \cos\omega t)$$

$$\gamma_y = \frac{v^2}{R}\cos\omega t$$

$$\gamma_z = \frac{v^2}{R}(2\cos\omega t - \sin\omega t).$$

Proiectând componentele lui γ pe planul bisector care conţine pe Ox:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\gamma_x = -\frac{v^2}{R}(\sin\omega t + \cos\omega t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \gamma_y = \frac{v^2}{R\sqrt{2}}\cos\omega t - \frac{v^2}{R\sqrt{2}}(2\cos\omega t - \sin\omega t)$$

$$= \frac{v^2}{R\sqrt{2}}(\sin\omega t - \cos\omega t)$$

condiţiile iniţiale fiind:

$$t = 0 \quad ; \quad x = R \quad ; \quad y = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Integrând obţinem:

$$x = R(\sin\omega t + \cos\omega t)$$

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}}(\cos\omega t - \sin\omega t)$$

din care eliminând timpul obţinem de asemenea o elipsă ca în cazul soluţiei I.

G. Ţ.

PROBLEMA 5569. *Să se demonstreze geometriceşte că avem:*

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: Col. Ing. MANOIL EUGEN, TRAIAN I. CHIŢULESCU (Anul IV, Facultatea de Arhitectură), C. GH. CRUCERU şi R. P. VOINEA (Elevi-inginer, Şcoala „Politehnica" Bucureşti), ANTONI TAREWSKI (Absolvent al Liceului Polonez din Craiova), E. WEGENER (Bacalaureat), G. STOIANOVICI (Colegiul Naţional „Niculae Filipescu" din Predeal), A. MATEESCU (Liceul militar „D. A. Sturdza", Craiova), GH. D. OPREA (Liceul militar „Mihai Viteazu", Timişoara), C. STAICU (Liceul militar, Cernăuţi), AL. ST. IEŞAN (Liceul Matei Basarab, Bucureşti), A. N. LUPU şi S. CLAUDIU (Liceul Titu Maiorescu, Bucureşti), M. C. MIRCEA (Clasa VIII-a, Liceul Internat, Iaşi), M. G. POPESCU (Clasa VII-a reală, Liceul Brătianu, Piteşti), M. V. MIŞICU (Clasa VI-a, Liceul Sf. Sava, Bucureşti), P. P. DRĂGHICESCU, VASILIU D., CIUMAŞU V. (Iaşi, Liceul Militar), IACOMI M. M. (clasa VIII-a, Liceul Militar, Iaşi), COTARIU D. M. (Brăila).

Fie patratul ABCD cu laturile de lungimea a, căruia îi ducem diagonala AD. Teorema lui PITAGORA, aplicată triunghiului ABD ne dă

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \quad \text{sau} \quad \overline{BD}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

care ne dă $BD = a\sqrt{2}$. In triunghiul ABD, perpendiculara BD pe AB este mai scurtă ca oblica BD, iar această latură este mai mică decât suma celorlalte două AB şi AD. Deci:

$$AD < BD \quad \text{şi} \quad BD < AB + AD \quad \text{sau} \quad BD < 2AB,$$

sau:

$$a < a\sqrt{2} \quad \text{şi} \quad a\sqrt{2} < a + a \quad \text{sau} \quad a\sqrt{2} < 2a.$$

Impărţind aceste rezultate cu a, găsim:

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Notă. Se putea lua dela început $a = 1$, dar atunci se pierdea omogenitatea geometrică a neegalităţilor.

I. I.

Reproducem aci prin fotografiere soluția primită dela D-ra LYDIA M. TUDORAN, ca model de îngrijire pusă la studiul, redactarea și scrierea soluției trimise:

Problemă.

5569 Să se demonstreze geometricește că avem:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

J. Ionescu.

Într'un triunghiu dreptunghiu isoscel ABC, în care BC este ipotenuza, avem:

a) ipotenuza este mai mică decât suma catetelor:

$$\overline{BC} < 2\overline{AB}$$

b) o catetă este mai mică decât ipotenuza:

$$\overline{AB} < \overline{BC}$$

Rezultă, deci, că:

$$\overline{AB} < \overline{BC} < 2\overline{AB} \quad (1)$$

Aplicând teorema lui Pitagora, avem:

$$\overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$$

sau $$\overline{BC} = \overline{AB}\sqrt{2}$$

Înlocuind această valoare în inegalitatea (1), obținem:

$$\overline{AB} < \overline{AB}\sqrt{2} < 2\overline{AB}$$

sau $$1 < \sqrt{2} < 2$$

c. c. t. d.

Tudoran Dlle Lydia

elevă „clasa VII-a". Școala Centrală de fete „Maria Brâncoveanu"

București -

EXERCIŢII

12. Fie un triunghiu oarecare ABC. Mediatoarele laturilor întâlnesc latura adiacentă în sens direct, în A_1, B_1, C_1. (A_1 pe BC, B_1 pe CA şi C_1 pe AB). Să se arate că triunghiurile (ABC, $A_1C_1B_1$), (ABC, $C_1B_1A_1$), (ABC, $B_1A_1C_1$) sunt omologice.

OCTAVIAN GHEORGHIU.

R. AA_1, BC_1, CB_1 concură în A, etc.

PROBLEME PROPUSE

5617. Se cere un cub de patru cifre, la care ştergând o cifră să ne rămână un patrat de trei cifre.

ION IONESCU.

5618. Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cifrele 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9 şi de două ori cifra 7, să se formeze un patrat perfect şi rădăcina sa.

ST. CETĂŢEANU.

5619. Se consideră triunghiul ABC, picioarele a trei ceviene A_1, B_1, C_1 şi perechile de cercuri descrise pe $\overline{A_1B}$ şi $\overline{A_1C}$, $\overline{B_1C}$ şi $\overline{B_1A}$, $\overline{C_1A}$ şi $\overline{C_1B}$ ca diametre.

Centrele de similitudine ale celor trei perechi de cercuri sunt colineare.

CPT. I. GH. ZAMFIRESCU.

5620. M fiind un punct în planul triunghiului ABC, iar O centrul cercului circumscris, să se arate că avem:

$$\Sigma a^2 (\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2)(\overline{MA}^2 - \overline{MC}^2) = 16S^2 \cdot \overline{MO}^2.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

5621. Un diametru D al cercului I, înscris triunghiului ABC, întâlneşte laturile acestui triunghiu în M, N, P. Fie D_1, D_2, D_3 axele radicale ale cercului I cu fiecare din cercurile cu centrele în M, N, P şi trecând prin I. Să se arate că dreapta D_1', simetrica lui D_1 faţă de AI şi analoagele ei D_2', D_3' sunt concurente într'un punct L.

Care este locul punctului L, când dreapta D se roteşte în jurul lui I?

TH. GH. COCEA.

5622. Intr'o parabolă se consideră o coardă ce trece prin focarul F. Dacă se proiectează focarul F pe normalele la parabolă în M şi M', extremităţile coardei, dreapta care uneşte aceste proiecţii întâlneşte coarda pe tangenta la vârf a parabolei.

Să se transforme proprietatea prin polare reciproce.

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

5623. Triunghiul ABC are vârful A fix, vârfurile B, C mobile pe două drepte date Δ, Δ' şi rămâne asemenea cu el însuşi. Se cere să se găsească:

1°. Locul centrului O al cercului circumscris triunghiului.

2°. Locul polurilor laturilor AB şi AC faţă de cercul O.

G-L GH. BUICLIU.

5624. Să se afle locul creştetelor parabolelor tangente la o dreaptă dată într'un punct fix O şi ale căror axe trec printr'un punct fix P.

Să se discute locul după poziţia punctului P.

ŞERBAN OTETELEŞANU.

5625. Să se determine piramida de volum maxim dintre piramidele oblice, care au baza un triunghiu echilateral şi muchiile de lungimi date, respectiv egale cu *a*, *b*, *c*.

I. B. FLORESCU.

5626. Să se afle valoarea expresiei

$$E \equiv \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

pentru

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-(b+c)^2}}{b+c}, \quad y = \frac{b \pm \sqrt{b^2-(a+c)^2}}{c+a},$$

$$z = \frac{c \pm \sqrt{c^2-(a+b)^2}}{a+b}.$$

IONEL I. STAMATE.

5627. O bară, de lungime $2l$, de greutate neglijabilă, este suspendată de un cuiu printr'un fir prins cu fiecare capăt de câte o extremitate a barei. Lungimea firului este $2a$ mai mare ca $2l$. La capetele barei atârnă greutăţile P şi Q. Să se găsească poziţia punctului de suspensiune precum şi tensiunile în fire în cazul când poziţia de echilibru a barei este orizontală.

EMIL S. MODÂLCĂ.

5628. Din punctul cel mai de sus al unei emisfere de rază R se asvârle un proiectil sub unghiul α faţă de orizontală. Să se determine viteza iniţială minimă, pentru ca emisfera să nu fie atinsă.

Să se studieze valorile acestei viteze minime pentru α cuprins între 0 şi $\frac{\pi}{2}$.

GABRIELA ŢIŢEICA.

5629. *Acţiunea unui cutremur* asupra unui bloc paralelipipedic drept, omogen, de greutate G, cu baza orizontală un patrat de latură a şi de înălţime h, *fiind asimilată unei percursiuni orizontale* P să se determine: 1° poziţia *axei instantanee de rotaţie* pentru o direcţie şi un punct de aplicaţie *oarecare* a percursiunii date; 2° condiţiile pentru ca tendinţa de mişcare a blocului în urma cutremului să fie sau o *răsturnare* în jurul unei axe orizontale sau o *răsucire* în jurul verticalei; 3° *forţele normale centrifugale de inerţie* ce acţionează blocul după percursiune.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La pag. 234 prima din relaţiile (7) este

$$m = \frac{2\log u}{\log 2n}.$$

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andrei Gh. A. (5507); *Badrus I. Gh.* (5486); *Bârzescu I. M.* (5486); *Boiangiu D. D.* (5555, P); *Buzescu M. R.* (5486); *Cartoşan C. J.* (5486); *Cetăţianu St.* (N); *Cotariu D. M.* (5543, 93, 98); *Drăghicescu P. P.* (5381, 555, 63, 75, 90, 96, 97, 98, 99); *Gheorghiu E. Oct.* (3736, 4352, 5473, 92, 547, 67, 93); *Ghiţeseu A. M.* (5543, 44, 98); *Gloden A.* (A, N); *Iacomi Mircea* (5590); *Iliescu C. C.* (3486); *Manolache M.* (5595, 616); *Mihăiescu S. S.* (4592); *Modâlcă Ion* (5345); *Musceleanu D.* (5468); *Nache D.* (5381); *Nisipeanu Tr.* (5486); *Pavel Eug.* (5555); *Popa N. A.* (5537); *Postelnicu Gh. N.* (5486); *Poulet P.* (N); *Purica I. I.* (5486); *Radu T. M.* (5486); *S. C. T.* (R); *Seni Cl.* (5558, 95); *Ştefănescu N.* (5378); *Thébault V.* (A, P); *Tudoran M. Lydia* (5581, 95, 604, N); *Turculeţ T.* (5598); *Vasiliu Gh. D.* (5507, 37); *Voinea R. R.* (5593, 98, 609, 16); *Volanschi A. D.* (5486).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă** o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea I-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 80 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.
Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 77 014

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1942

SUMARUL

1. Asupra mişcării tautocrone plane (urmare şi sfârşit) . . . . . *Radu Bădescu.*
2. Asupra teoremei lui Fermat . . . . . *Iulian Petrescu.*
3. Asupra limitei unor triunghiuri . . . . *I. C. Vasiliu.*
4. Premiul „Ing. Alexandru Roşu" . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. **Note Matematice**: 34 — 40.
6. Chestiuni de examen.
7. **Bibliografie.**
8. **Cereri**: 310, 311.
9. **Diverse.**
10. **Probleme rezolvate**: 2607, 4592, 5003, 5147, 5415, 5444, 5488, 5510.
11. **Exerciţii**: 13 — 15.
12. **Probleme propuse**: 5630 — 5641.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 5542, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 6000, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

ASUPRA MIŞCĂRII TAUTOCRONE PLANE

(Urmare dela pag. 310)

Aplicaţie.

Putem face o aplicaţie simplă la cicloida

$x = x_0 + a(\theta + \sin\theta)$, $y = y_0 + a(1 - \cos\theta)$ $x_0 \leqslant 0$, $y_0 \leqslant 0$,

care are concavitatea în sus, tangenta la curbă în punctul cel mai jos fiind paralelă cu axa Ox, iar x_0 şi y_0 coordonatele acestui punct. Originea O o vom alege într'un punct oarecare al curbei. Să găsim acum forţa F, paralelă cu axa Oy şi funcţie de y, care determină o mişcare tautocronă, punctul de tautocronism fiind în origine. Cum avem

$$ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \sqrt{\frac{2a}{y-y_0}}\,dy$$

se găseşte

$$s = 4a\left[\sqrt{\frac{y-y_0}{2a}} - \sqrt{-\frac{y_0}{2a}}\right]$$

sau, utilizând relaţia (9),

$$(11) \qquad F(y) = -4amk^2\left[1 - \sqrt{\frac{y_0}{y_0-y}}\right].$$

Forţa aceasta nu este constantă decât dacă $y_0 = 0$, adică numai când punctul de tautocronism coincide cu punctul cel mai de jos al curbei, caz care a fost studiat de HUYGHENS. Se poate verifica cu uşurinţă că mişcarea determinată pe cicloidă de forţa (11) este într'adevăr tautocronă.

CAZUL CÂND SE CUNOAŞTE LEGEA DE FORŢĂ

Problema inversă se prezintă cu totul altfel căci, cunoscând câmpul de forţe definit de vectorul

$$\vec{F} = X.\vec{i} + Y.\vec{j}$$

şi alegând originea ca punct de tautocronism, se pot determina traiectoriile tautocrone ce trec prin acest punct integrând o ecuaţie diferenţială. Ne vom mărgini în acest articol să studiem numai cazul când câmpul considerat derivă dintr'un potenţial $V(x, y)$, rămânând să tratăm altădată cazul general precum şi extinderea lui în spaţiul cu trei dimensiuni.

Teorema forţei vii dă în acest caz

$$v^2 = \frac{2}{m}(V_0' - V)$$

V_0' fiind valoarea potenţialului în punctul M_0. Dacă ţinem acum seamă de relaţia (7) şi introducem valoarea potenţialului V în origine, găsim

$$s = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{V - V_0} \qquad V_0 = V_0' - \frac{mk^2}{2}s_0^2$$

sau, desemnând prin W potenţialul care se anulează în origine,

$$(12) \qquad ds^2 = (1 + y'^2).dx^2 = \frac{1}{2mk^2} \cdot \frac{(d\,W)^2}{W}.$$

Această condiţie ne dă imediat ecuaţia diferenţială

$$(13) \quad \begin{aligned} &(2mk^2 W - W_y'^2).dy^2 - 2W_x' W_y' dx.dy + \\ &(2mk^2 W - W_x'^2).dx^2 = 0 \end{aligned}$$

şi astfel putem calcula coeficienţii unghiulari y' ai tangentelor la traiectoriile tautocrone ce trec prin origine:

$$(14) \quad y' = \frac{W_x' W_y' \pm \sqrt{2mk^2 W[W_x'^2 + W_y'^2 - 2mk^2 W]}}{2mk^2 W - W_y'^2}.$$

Există deci în general două curbe tautocrone [1]) ce trec prin origine, dacă se presupune că potenţialul W e uniform în jurul originei şi bine înţeles şi derivabil. Ne rămâne însă de examinat existenţa soluţiunilor singulare. Vom distinge cazurile următoare:

a) *Traiectoria e definită de ecuaţia* $W(x, y) = 0$.

In acest caz ecuaţia (13) se poate scrie sub forma

$$(15) \qquad (W_x'.dx + W_y'.dy)^2 = 0$$

sau

$$(X.dx + Y.dy)^2 = 0$$

ceea ce e imposibil dacă se ţine seamă de relaţia (8). Traiectoria tautocronă nu poate fi o linie echipotenţială şi din cauză că forţa F este normală unei asemenea curbe, astfel că punctul material M

1) O mai amplă discuţie se va face cu altă ocazie.

nu se va putea mişca dacă este pus pe curbă fără viteză iniţială. Se vede că relaţia (15) este diferenţiala ecuaţiei $W(x, y) = 0$ ridicată la patrat.

b) *Potenţialul* W *este o soluţiune a ecuaţiei cu derivate parţiale.*

(16) $2mk^2 W = W_x'^2 + W_y'^2 = F^2$, cu condiţiile $W_x' \neq 0$, $W_y' \neq 0$[1]).

In această ipoteză, relaţia (14) ne dă ecuaţia diferenţială a traiectoriei

(17) $W_x' . dy - W_y' . dx = 0$, sau $X . dy - Y . dx = 0$,

care e tocmai ecuaţia diferenţială a liniilor de forţă. Acestea constitue deci o soluţiune dacă potenţialul W verifică ecuaţia (16).

Să căutăm prin metoda lui LAGRANGE-CHARPIT două integrale complete ale ecuaţiei (16). Sistemul corespunzător fiind

(18) $$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dW}{p^2 + q^2} = \frac{dp}{mk^2 p} = \frac{dq}{mk^2 q}$$

avem o integrală primă $q = ap$ care ne conduce la ecuaţia cu diferenţiale totale

$$dW = \sqrt{\frac{2mk^2}{1+a^2}} (dx + a\, dy) \sqrt{z}$$

a cărei soluţiune generală este

$$W = \frac{mk^2}{2(1 + a^2)} (x + ay + b)^2.$$

Potenţialul W care se anulează în origine se obţine făcând $b = 0$, iar forţa F corespunzătoare

$$F = -mk^2 (x . \cos\theta + y . \sin\theta)$$

unde am pus $a = \operatorname{tg}\theta$. Această forţă e deci paralelă cu o direcţie constantă care face unghiul θ cu axa Ox iar linia de forţă căutată este dreapta $y = x . \operatorname{tg}\theta$. Se verifică imediat că această dreaptă e o traiectorie tautocronă căci condiţia (1) e verificată, arcul s fiind acum

$$s = x . \cos\theta + y . \sin\theta.$$

---

1) Dacă $W_x' =$ forţa e paralelă cu axa Oy şi depinde numai de y. Cazul acesta se deduce imediat din aplicaţia pe care o tratăm la sfârşitul articolului.

A doua integrală completă se obţine luând integrala primă

$$p - mk^2x = mk^2a$$

pentru care avem

$$W = \frac{mk^2}{2}[(x+a)^2 + (y+b)^2].$$

Forţa F va avea expresia

$$F = -mk^2\sqrt{x^2+y^2} = -mk^2 \cdot r$$

şi, cum ea e dirijată după raza vectoare OM, rezultă că toate dreptele ce trec prin origine sunt traiectorii tautocrone.

Din aceste două exemple se vede diferenţa dintre cazurile când integrala completă depinde sau nu de o constantă arbitrară.

Aplicaţie.

O aplicaţie interesantă se poate face anulând unul din coeficienţii ecuaţiei diferenţiale (13)

$$2mk^2 W = W_y'^2. \tag{19}$$

Dacă potenţialul W e o soluţiune a acestei ecuaţii cu derivate parţiale, curbele tautocrone căutate sunt soluţiunile ecuaţiilor diferenţiale

$$dx = 0, \quad \text{şi} \quad (2mk^2 W - W_y'^2) \cdot dx - 2W_x' W_y' \cdot dy = 0. \tag{20}$$

Să determinăm întâi forma potenţialului W. Această funcţie se poate determina prin metoda lui LAGRANGE-CHARPIT, însă e mai uşor să derivăm relaţia (19) şi să simplificăm apoi cu W_y'. Obţinem ecuaţia

$$mk^2 = W_{y^2}''$$

astfel că, printr'o integrare se deduce

$$W_y' = mk^2[y + A(x)]$$

$A(x)$ fiind o funcţie arbitrară, sau, ţinând seama de ecuaţia (19),

$$W = \frac{mk^2}{2}[y + A(x)]^2$$

cu condiţia $A(0) = 0$, căci potenţialul W trebue să se anuleze în origine.

Pentru determinarea traiectoriilor, reluând ecuațiile (20), se vede că axa Oy constituie una dintre soluțiuni. A doua ecuație (20) se scrie acum

$$(mk^2)^2 [y + A(x)]^2 \{ 2A'(x) . dy - (1 - A'^2(x)] . dx \} = 0$$

de unde se deduce, punând $X(x) = A'(x)$

$$(21) \qquad y = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{X} - X \right) . dx.$$

Aceasta este cea de-a doua traiectorie căutată.

Pentru a verifica dacă într'adevăr familia aceasta de curbe, care depinde de o funcție arbitrară $X(x)$, este tautocronă, vom determina forța și pentru cazul întâi când am găsit axa Oy, și pentru familia (21). Cum

$$X = W'_x = mk^2 (y + A(x)] . A'(x) \quad , \quad Y = mk^2 . [y + A(x)]$$

deducem că forța F are expresia

$$F = - mk^2 [y + A(x)] . \sqrt{1 + A'^2(x)} .$$

Pe de altă parte, direcția forței F este dată de relația $\frac{Y}{X} = \frac{1}{A'}$, astfel că, făcând $x = 0$, se vede imediat că proiecția acestei forțe pe axa Oy este tocmai $- mk^2 y$, adică verifică condiția (8).

Calculând acum forța F de-a-lungul curbelor (21), se obține

$$F = - mk^2 \left[\int_0^x \left(X + \frac{1}{X} \right) . dx \right] . \sqrt{1 + X^2}$$

și cum

$$ds^2 = \left[1 + \frac{1}{4} \left(X - \frac{1}{X} \right)^2 \right] . dx = \frac{1}{4} \left(X + \frac{1}{X} \right)^2 . dx^2$$

găsim

$$s = \frac{1}{2} \int_0^x \left(X + \frac{1}{X} \right) . dx.$$

Și în acest caz, proiecția forței pe tangentă la curba (21) este efectiv egală cu $- mk^2 s$.

Se vede că proprietățile acestor curbe generalizează pe acelea ale lănțișorului.

RADU BĂDESCU.

ASUPRA TEOREMEI LUI FERMAT

Vom arăta în cele ce urmează cum se poate verifica, pe o cale elementară, în unele cazuri particulare, teorema nedemonstrată bine cunoscută a lui FERMAT. Pentru aceasta vom demonstra mai întâi câteva proprietăți dintre care una, cunoscută o reproducem numai pentru unitatea expunerii.

1°. *Dacă* x, y *sunt numere naturale prime între ele și* n *un număr întreg* > 1, *atunci numerele* $x - y$ *și* $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ *nu pot avea ca divizori primi comuni decât divizorii lui* n.

Aceeași proprietate are loc și pentru numerele $x + y$ *și* $\frac{x^n + y^n}{x + y}$, *dacă, în plus,* n *este impar.* (E. LUCAS, *Théorie des nombres*, V, p. 342).

Fie, în adevăr, p^α cea mai mare putere a numărului prim p, care divide prin $x - y$. Deoarece atunci $x = kp^\alpha + y$, unde k *este* prim cu p, vom avea:

$$(x - y)\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^n - y^n = (kp^\alpha + y)^n - y^n = p^\alpha(Qp^\alpha + kny^{n-1}).$$

Dar pentrucă x și y sunt prime între ele, paranteza nu se împarte exact cu p decât dacă acesta divide pe n. Prima parte a teoremei este demonstrată și la fel se demonstrează și a 2-a parte.

Dacă n este în plus un număr *prim impar* putem scoate imediat din demonstrație și din rezultat următoarele două *corolare:*

a) Numerele $x - y$ și $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ pe de o parte, $x + y$ și $\frac{x^n + y^n}{x + y}$ pe de altă parte sunt prime între ele dacă x, y și n sunt prime două câte două.

b) Dacă x, y și n sunt prime cu p atunci $x - y$ și $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ $\left[\text{sau } x + y \text{ și } \frac{x^n + y^n}{x + y}\right]$ nu se pot divide în același timp cu p.

2°. *Dacă* $x - y$ (*sau* $x + y$) *sunt prime cu numărul prim* p, *atunci* $\frac{x^p - y^p}{x - y}\left(\text{sau } \frac{x^p + y^p}{x + y}\right)$ *au toți factorii primi de forma* $2kp + 1$.

In adevăr se ştie că congruenţa $x^n \equiv a \pmod{p}$ unde n este prim cu $p-1$, admite totdeauna o soluţie şi numai una singură (COHEN, *Théorie des nombres*, II, 17) faţă de modulul p.

Fie atunci r un alt număr prim, impar şi care nu e de forma $kp+1$. Atunci dacă $x^p - y^p \equiv 0 \pmod{r}$ sau $x^p \equiv y^p \pmod{r}$, după proprietatea precedentă avem $x \equiv y \pmod{r}$ sau $x-y \equiv 0 \pmod{r}$. Deasemenea dacă $x^p + y^p = x^p - (-y)^p \equiv 0 \pmod{r}$ avem $x-(-y) = x+y \equiv 0 \pmod{r}$.

In consecinţă dacă $x^p - y^p$ (sau $x^p + y^p$) are un factor prim r care nu e de forma $kp+1$, acesta divide neapărat şi pe $x-y$ (sau $x+y$), care este, după corolarul *a*) al teoremei 1°, prim cu $\frac{x^p-y^p}{x-y}$ $\left(\text{sau } \frac{x^p+y^p}{x+y}\right)$. Rezultă de aci că acesta din urmă n'are decât factori primi de forma $kp+1$, sau mai precis de forma $2kp+1$, deoarece toţi factorii primi de forma $kp+1$ sunt impari.

3°. *Congruenţa*

$$(1) \qquad x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

unde p *este prim, are* $p-1$ *soluţii distincte congruente cu câte una din puterile* p *ale primelor* $p-1$ *numere.*

In adevăr, în primul rând, fiecare din numerele din şirul $1^p, 2^p, \ldots, (p-1)^p$ verifică congruenţa (1), căci după teorema lui EULER, avem

$$(i^{p-1})^p = i^{p(p-1)} = i^{1(p^2)} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Fie x o soluţie a congruenţei (1) şi fie i numărul unic din şirul primelor $p-1$ numere care verifică congruenţa (conf. COHEN loc. cit)., $i^p \equiv x \pmod{p}$. Vom avea:

$$x^{p-1} - i^{p(p-1)} = (x - i^p) \times \frac{x^{p-1} - i^{p(p-1)}}{x - i^p} \equiv 0 \pmod{p^2}$$

şi cum primul factor în baza relaţiei $x - i^p \equiv 0 \pmod{p}$ este divizibil cu p, acesta nu divide conform corolarului *b*) al teoremei 1° pe cel de al 2-lea factor, şi vom avea $x - i^p \equiv 0 \pmod{p^2}$; teorema e astfel demonstrată.

* * *

4°. Cu această pregătire să considerăm ecuaţia în numere întregi,

$$(2) \qquad x^n + y^n = z^n$$

unde n nu este o putere a lui 2. Fie p un divizor prim impar a lui n, deci $n = kp$; ecuaţia se scrie:

$$(x^k)^p + (y^k)^p = (z^k)^p$$

şi are prin urmare forma:

$$x^p + y^p = z^p. \tag{3}$$

Soluţiile ecuaţiei (2) sunt deci legate de ale ecuaţiei (3), unde p este un factor prim divizor a lui n.

Să ne limităm numai la soluţiile unde x, y, z sunt prime între ele (ceea ce nu micşorează generalitatea) şi prime cu p, de unde rezultă că şi $x+y$, $z-x$, $x-y$ sunt prime cu p.

Punând ecuaţia (3) sub forma

$$(x+y) \times \frac{x^p + y^p}{x+y} = z^p,$$

deducem după corolarul *a*) al teoremei 1° şi teorema 2°.

$$x + y = c^p, \frac{x^p + y^p}{x+y} = (kp+1)^p = Qp^2 + 1, \tag{C}$$

deci

$$x^p + y^p \equiv x + y \pmod{p^2}.$$

Dacă punem ecuaţia (3) şi sub una din formele

$$(z-x)\frac{z^p - x^p}{z-x} = y^p \quad ; \quad (z-y)\frac{z^p - x^p}{z-y} = x^p$$

se mai deduce în mod analog

$$z - x = b^p \quad ; \quad z^p - x^p \equiv z - x \pmod{p^2} \tag{B}$$

$$z - y = a^p \quad ; \quad z^p - y^p \equiv z - y \pmod{p^2} \tag{A}.$$

Folosind în mod convenabil congruenţele (A), (B), (C) deducem apoi

$$x^{p-1} \equiv 1, \quad y^{p-1} \equiv 1, \quad z^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2},$$

căci de ex.

$$2x(x^{p-1} - 1) = 2(x^p - x) = (x^p + y^p - x - y) - (z^p - x^p - z + x)$$
$$+ (z^p - y^p - z + y) \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

In definitiv:

Dacă ecuaţia (3) admite soluţii întregi prime cu p, atunci 1°) $x+y$, $z-x$, $z-y$ sunt puteri p perfecte.

2^0) x, y, z satisfac fiecare congruenţei $X^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

5^0. Din cele ce preced scoatem mai întâi

$$z \equiv z^p = x^p + y^p \equiv x + y \pmod{p^2} \quad \text{deci} \quad z \equiv x + y \pmod{p^2}.$$

Fie atunci α, β, γ numerele mai mici ca p^2 pentru care avem

$$x \equiv \alpha, \quad z \equiv \beta, \quad z \equiv \gamma \pmod{p^2}.$$

Vom avea şi:

$$\alpha + \beta \equiv \gamma \pmod{p^2} \tag{4}$$

Numerele α, β, γ sunt toate distincte, dacă p^2 nu este un divizor a lui $2^{p-1} - 1$, căci dacă am avea $\alpha = \gamma$ (sau $\beta = \gamma$) am avea $\beta = 0$ (sau $\gamma = 0$) conform relaţiei (4). De asemeni dacă am avea $\alpha = \beta = a$, deoarece

$$\alpha^p + \beta^p \equiv \alpha + \beta \equiv \gamma \equiv \gamma^p \equiv (\alpha + \beta)^p \quad , \quad \alpha^p + \beta^p \equiv (\alpha + \beta)^p \pmod{p^2}$$

am avea:

$$2^p a^p \equiv 2a^p \quad \text{sau} \quad 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

ceea ce este contrar ipotezei.

6. *Aplicaţii.* Să luăm $p = 3$; deoarece $2^2 - 1$ nu se divide cu 9 suntem în ipoteza precedentă. Pe de altă parte resturile şirului 1^3, 2^3 faţă de 9 sunt 1 şi 8 şi se observă că suma lor nu face parte din acest şir. In consecinţă ecuaţia

$$x^3 + y^3 + z^3$$

nu este posibilă în numere întregi prime cu 3, de unde rezultă după cele arătate la Nr. 4^0, acelaşi lucru şi pentru ecuaţie

$$x^n + y^n = z^n$$

unde n este un multiplu de 3. Căpătăm astfel un rezultat, cuprins în cunoscuta teoremă a lui EULER, unde nu se presupune că rădăcinile sunt prime cu 3, însă arătat pe o cale elementară şi ceva mai generală.

Să luăm $p^5 = 5$ avem $2^4 - 1 = 15$ care nu divide pe 25 deci suntem încă în aceleaşi ipoteze. Şirul 1^5, 2^5, 3^5, 4^5 este faţă de modulul 25 congruent cu şirul 1, 7, 18, 24, iar sumele două câte două ale numerelor acestui şir sunt congruente faţă de modulul

25 cu unul din numerele: 0, 6, 8, 17, 19 care nu sunt cuprinse în şirul precedent. Concludem deci că ecuaţia

$$x^5 + y^5 = z^5$$

sau

$$x^n + y^n = z^n$$

unde n este un multiplu de 5, este imposibilă în numere întregi prime cu 5.

Să luăm în sfârşit $p = 7$; avem $2^6 - 1 = 63 \not\equiv 0 \pmod{49}$. Şirul

$$1,\ 2^7,\ 3^7,\ 4^7,\ 5^7,\ 6^7$$

este congruent (mod. 49) cu şirul

$$(5) \qquad 1,\ 30,\ 31,\ 18,\ 19,\ 48$$

iar sumele două câte două a acestui şir sunt congruente (mod. 49) ca unul din numerele şirului

$$0,\ 1,\ 12,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 37,\ 48$$

care are în comun cu şirul precedent numerele

$$1,\ 18,\ 19,\ 30,\ 31 \text{ şi } 48.$$

Aceste numere sunt singurele valori posibile pentru γ, de unde scoatem valorile corespunzătoare conform relaţiei (4) pentru α, β din şirul (5).

Vom avea cu excepţia unei schimbări între rolul literelor x şi y.

$$(6) \quad \begin{cases} z = M\,49 + 1\ ; & x = M\,49 + 19\ ; & y = M\,49 + 31 \\ = M\,49 + 18\ ; & = M\,49 + 19\ ; & = M\,49 + 48 \\ = M\,49 + 19\ ; & = M\,49 + 1\ ; & = M\,49 + 18 \\ = M\,49 + 30\ ; & = M\,49 + 18\ ; & = M\,49 + 30 \\ = M\,49 + 31\ ; & = M\,49 + 1\ ; & = M\,49 + 30. \end{cases}$$

In consecinţă ecuaţia

$$x^7 + y^7 = z^7$$

nu poate admite în numere întregi prime cu 7, decât soluţii de forma (6) sau de cea simetrică faţă de grupul (x, y).

IULIAN PETRESCU.

ASUPRA LIMITEI UNOR TRIUNGHIURI

Fie M un punct în planul unui triunghiu $A_0 B_0 C_0$ şi $A_n B_n C_n$ triunghiul format de polarele lui M faţă de unghiurile triunghiului $A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$.

In articolul cu titlul de mai sus, publicat în G. M., XLI, 33, D-l G-L GH. BUICLIU demonstrează prin considerente geometrice că, pentru $n \to \infty$, triunghiul $A_n B_n C_n$ degenerează în dreapta (Δ), polara triliniară a punctului M faţă de triunghiul $A_0 B_0 C_0$, determinând şi poziţia lui A_∞.

Ca un frumos exerciţiu de calcul, voiu căuta coordonatele trilatere ale punctelor A_n, B_n, C_n, verificând, la limită, teorema D-lui G-L GH. BUICLIU.

Fie: $M(x, y, z)$ coordonatele lui M faţă de triunghiul fundamental $A_0 B_0 C_0$.

Pentru construirea punctului A_n, observăm că el este intersecţia $[A_{n-1} A', B_{n-1}, C_{n-1}]$, unde A' e intersecţia $[\Delta, BC]$.

Pentru $n = 1, 2, 3$, găsim prin calcul:

$$A_1[-x, y, z], \quad A_2[-3x, y, z], \quad A_3[-5x, 3y, 3z].$$

Rezultă că pentru A_n putem lua:

$A_n[P_n x, Q_n y, Q_n z]$, unde P_n, Q_n sunt funcţii de n. Sau, notând $P_n/Q_n = X_n$ avem $A_n[X_n x, y, z]$.

Construind pe A_n cu ajutorul triunghiului anterior, vom găsi:

$$A_n[-(X_{n-1} - 2)x, \; X_{n-1} y, \; X_{n-1} z],$$

$$\therefore \frac{X_{n-1} - 2}{X_n} = -X_{n-1}, \quad \text{sau:}$$

$$X_n X_{n-1} + X_{n-1} = 2.$$

Calculând cu ajutorul acestei formule, găsim:

$$X_n = \frac{2 - X_{n-1}}{X_{n-1}}, \quad X_{n+1} = \frac{3X_{n-1} - 2}{2 - X_{n-1}}, \quad X_{n+2} = \frac{6 - 5X_{n-1}}{3X_{n-1} - 2}.$$

Ceea ce ne face să punem:

$$X_n = \frac{A_n + B_n X_1}{C_n + D_n X_1}, \text{ unde } A_n, B_n, C_n, D_n \text{ sunt funcţii de } n.$$

$$\therefore X_{n+1} = \frac{(2C_n - A_n) + (2D_n - B_n) X_1}{A_n + B_n X_1}$$

$$X_{n+2} = \frac{(3A_n - 2C_n) + (3B_n - 2D_n) X_1}{(2C_n - A_n) + (2D_n - B_n) X_1}.$$

De unde scoatem în definitiv:

$$\lambda_{n+2} + \lambda_{n+1} - 2\lambda_n = 0$$

λ reprezentând fiecare din coeficienţii A, B, C, D.

Ecuaţia caracteristică este:

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{cu rădăcinile} \quad x_1 = 1,\ x_2 = -2.$$

$$\therefore\ \lambda_n = \alpha + (-2)^n \beta.$$

Cu ajutorul valorilor particulare:

$$A_2 = 2\ ,\ B_2 = -1,\ C_2 = 0,\ D_2 = 1$$

$$A_3 = -2,\ B_3 = 3\ ,\ C_3 = 2,\ D_3 = -1$$

determinăm pe α şi β pentru fiecare din şirurile A, B, C, D şi găsim:

$$A_n = \frac{2}{3}[1 - (-2)^{n-1}]\ ,\quad B_n = \frac{1}{3}[1 - (-2)^n]$$

$$C_n = \frac{2}{3}[1 - (-2)^{n-2}]\ ,\quad D_n = \frac{1}{3}[1 - (-2)^{n-1}]$$

$$\therefore\ X_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)^n}.$$

Şi deci:

$$P_n = 1 - (-2)^{n+1}\ ,\quad Q_n = 1 - (-2)^n.$$

Coordonatele lui A_n vor fi aşa dar:

$$A_n\ [1 - (-2)^{n+1}]x,\ \ [1 - (-2)^n]y,\ \ [1 - (-2)^n]z].$$

Iar pentru $n \to \infty$

$$A_\infty\ [-2x,\ y,\ z]$$

un punct de pe dreapta (Δ)

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 0$$

şi anume intersecţia (AM, Δ).

I. C. VASILIU.

PREMIUL „ING. ALEXANDRU ROȘU“

Subsemnații, membri în Comisiunea pentru decernarea premiului « ING. ALEXANDRU ROȘU », cercetând volumul XLVI al *Gazetei Matematice* pentru alegerea celui mai harnic corespondent al Gazetei, elev de liceu, am constatat următoarele:

D-l PAUL P. DRĂGHICESCU, elev în clasa V-a la Lic. Militar din Iași, apare în fruntea tuturor corespondenților cu o bogată activitate ca rezolvator de probleme propuse.

Astfel, D-sa figurează pe copertele volumului cercetat, cu un număr de 173 probleme rezolvate, iar în cuprinsul acestui volum cu 31 probleme rezolvate și publicate.

Din acestea, problemele 2717 și 5385 îl au unic rezolvator, iar la problemele 5237, 5340, 5353 și 5436 D-sa figurează drept singurul rezolvator elev de liceu.

D-l P. P. DRĂGHICESCU, în rezolvarea problemelor propuse a căutat să găsească soluțiuni elegante, întovărășindu-le adesea și cu observațiuni, cum sunt problemele 5229 și 5338.

Mai adăogăm la această activitate și propunerea exercițiului Nr. 6.

Menționăm că activitatea D-lui PAUL P. DRĂGHICESCU la *Gazeta Matematică* a fost încununată cu premiul V, la concursul anual din 1941 și cu premiul VI la concursul din 1939, pe când era elev în clasa V-a, an în care își începe și activitatea la *Gazeta Matematică*.

Față de cele de mai sus, propunem ca premiul « ING. AL. ROȘU » să se acorde pentru anul XLVI D-lui PAUL P. DRĂGHICESCU, azi elev clasa VIII-a la Liceul Militar din Iași.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI
« ING. AL. ROȘU »

ALEXANDRU AL. ROȘU, D. STOICA,
GABRIELA ȚIȚEICA.

Acest raport a fost citit și aprobat în ședința Adunării Generale din 19 Februarie 1942.

NOTE MATEMATICE

34. *Asupra problemei 3911.* Primindu-se un articol al D-lui I. B. FLORESCU, în legătură cu problema 3811, suntem nevoiţi să rezolvăm un incident ivit cu acea problemă. Enunţul problemei cerea să se găsească pătratele mai mici ca 10 000 care să aibă complimentul lor aritmetic tot un pătrat perfect. In al doilea rând se mai întreba dacă sunt cuburi în aceleaşi condiţiuni.

Problema conduce la rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei nedeterminate

$$x^2 - 3y^2 = 10^n . \qquad (1)$$

D-l Inginer O. ORĂNESCU, care a redijat această problemă, publicată în Anul XXXV, pag. 274, a făcut o confuziune considerând că x şi y pot merge până la 10 000, pe când enunţul cerea ca pătratele lor x^2 şi y^2 să nu depăşească 10 000. Astfel fiind, D-sa a examinat cazurile $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ în loc să se oprească la $n = 4$, a examinat apoi şi cazul $n = 7$ afirmând că nu se găsesc soluţii ca şi pentru $n > 7$, căci $x^2 > 10\,000$, deşi această neegalitate era de mai înainte satisfăcută. Problema cerea să ne oprim la această neegalitate. Ecuaţia (1) însă are soluţii şi pentru $n \geqslant 7$. Pe de altă parte D-l O. ORĂNESCU a spus că *„pentru cuburi nu există soluţii"* fără a demonstra aceasta.

Aceste fapte au făcut pe D-l G. CONSTANTINESCU, Profesor, ca să trimită o Notă matematică, considerând că soluţia dată este incompletă şi că are neexacticităţi. D-sa a arătat cum se pot găsi soluţii pentru n cât de mare, şi a dat o demonstraţie pentru cuburi. Nota a fost trimisă D-lui O. ORĂNESCU spre a lua cunoştinţă de criticele aduse soluţiei, şi să-şi facă observaţiile sale. D-sa însă a redijat o notă, care s'a publicat sub Nr. 46 din Anul XLII, pag. 581, spunând cu D-l G. CONSTANTINESCU a arătat cum se pot găsi soluţii pentru $n \geqslant 7$ şi demonstrând că problema este imposibilă în cazul cuburilor. D-l Profesor G. CONSTANTINESCU a trimis un protest în contra modului cum i s'a prezentat nota D-sale, căci aşa pare că a fost modificată la redacţie nefiind publicabilă direct. Acest protest, adus la cunoştinţa D-lui O. ORĂNESCU, D-sa a arătat că în două locuri a specificat că soluţia din notă este a D-lui G. CONSTANTINESCU. Era mai bine ca, în

conformitate cu uzul în asemenea circumstanţe, să se publice nota trimisă de critic, eventual rezumată, rămânând ca Redactorul să-şi facă observaţiile la urmă. D-sa însă a redijat în Nota 46 răspunsul cu observaţiile făcute redactând o notă nouă. In scrisoarea sa către Societatea *Gazeta Matematica*, D-l O. ORĂNESCU lasă în grija Redacţiei rectificarea ce trebue făcută, „cum se va crede mai nimerit", „pentru a se evita asemenea incidente neplăcute între redactori şi colaboratori".

Societatea mi-a dat mie sarcina de a rezolva această chestiune. Soluţia pe care o dau este următoarea. Reproduc sumar în această notă soluţia dată de D-l G. CONSTANTINESCU, la prima parte a problemei, şi în Nr. viitor voiu pune o notă cu soluţia, redusă puţin şi aceasta, pentru cazul cuburilor. In Nr. de pe luna Iulie vom publica Nota D-lui I. B. FLORESCU.

Iată în rezumat soluţia dată de D-l G. CONSTANTINESCU pentru rezolvarea ecuaţiei (1). Pentru $x = 0$, sau $y = 0$, avem $y^2 = 10^n$ sau $x^2 = 10^n$. Deci luând n pereche, avem o soluţie, care prezintă puţin interes. Pentru $n = 1$ avem vizibil soluţia $x = 1$, $y = 3$ sau invers. Considerăm acum identitatea:

$$(xx' \pm yy')^2 + (xy' \mp x'y)^2 = (x^2 + y^2)\,(x'^2 + y'^2).$$

Facem aci $x' = 1$, $y' = 3$ şi găsim:

$$(3x \pm y)^2 + (x - 3y)^2 = 10\,(x^2 + y^2).$$

Deci, dacă cunoaştem o soluţie pentru un anumit n, putem găsi alta pentru $(n+1)$, înafară de cele formate înmulţind pe x şi y cu 10. D-l G. CONSTANTINESCU a dat câte o soluţie pentru toate numerele dela 1 la 20 şi o soluţie pentru numărul mai mare $n = 65$. Se arată astfel că problema, redusă la rezolvarea ecuaţiei nedeterminate (1), admite soluţii pentru orice n. D-sa conchide că afirmaţia din soluţia dată problemei 3811, că ea nu are soluţii pentru $n \geqslant 7$, nu este justă. De fapt însă, pentru aceste valori, problema pusă nu este admisibilă, căci prin enunţ se limitează pătratele la cel mult 10 000.

In soluţia D-sale, D-l G. CONSTANTINESCU nu demonstrează că metoda D-sale dă toate soluţiile pentru un n oarecare.

I. IONESCU.

35. *Asupra problemei 5557.* Această problemă a fost rezolvată la pag. 290—292 din acest an. Asupra ei, D-l STELIAN CETĂŢEANU (Student-inginer la Politehnica din Bucureşti) şi D-ra LYDIA M. TUDORAN (Clasa VII-a, Şcoala centrală de fete „Marica Brâncoveanu" din Bucureşti) atrag atenţiunea că în cazul $k = 10$, egalitatea $(10a + b)/(10c + d) = a/c$ este verificată identic şi putem lua pe a şi c oricum sub 100, cu singura condiţie $a < c$, pentru ca fracţia a/c să fie subunitară. Cu modul acesta cazul $k = 10$ comportă $C_{99}^2 = 4851$ soluţii, la care alăturând pe cele 46 găsite pentru $k > 10$, găsim că numărul total al soluţiilor este 4897.

I. I.

36. *Asupra problemei 5556.* La această problemă, *Domnul Colonel Inginer* MANOIL EUGEN *S. S. I. A.*, a dat o soluţie admirabilă atât ca formă cât şi ca fond pe care regretăm că nu am primit-o înainte de redijarea şi publicarea soluţiei în *Gazeta Matematică.*

S'au mai primit de asemenea la timp soluţii foarte bune şi riguroase dela *Domnii S-lt.* PAUL DOBRESCU (Elev-Inginer al Politehnicei Bucureşti) şi Elev-Plotonier CONSTANTIN PANTELIMON (Şc. Ofiţeri de Artilerie Antiaeriană).

ING. ALEXANDRU STOENESCU.

37. *Asupra unui exerciţiu din „Théorie des Nombres"* par E. LUCAS.

La pag. 154, exerciţiul III este:

„Dacă două progresiuni aritmetice

$$a,\ b,\ c, \ldots\ k,\ l$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots\ \varkappa,\ \lambda$$

au aceeaşi raţie r *şi acelaşi număr de termeni, atunci avem formula:*

$$\frac{a}{\alpha\beta} + \frac{ab}{\alpha\beta\gamma} + \ldots + \frac{abc\ldots k}{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa.\lambda} = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{a}{\alpha} - \frac{abc\ldots l}{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda}\right].$$

Imi propun a arăta în cele ce urmează că egalitatea nu este satisfăcută decât într'o anumită condiţiune.

In adevăr, observăm că pentru doi termeni ai progresiei ar trebui să avem:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{b}{\beta}\right]$$

de unde deducem că $b = \beta - r$.

De asemenea, pentru trei termeni ai progresiei avem:

$$\frac{1}{\beta} + \frac{b}{\beta . \gamma} = \frac{1}{r} \cdot \left[1 - \frac{b . c}{\beta . \gamma}\right].$$

Apoi cum avem:

$$c = b + r \quad \text{şi} \quad \gamma = \beta + r$$

se deduce lesne că trebue să avem:

$$(2r + b) . b = (\beta - r)(\beta + r)$$

de unde condiţia: $b = \beta - r$.

Dar să presupunem că vom avea n termeni ai progresiei, atunci dând factori comuni şi făcând simplificările necesare, egalitatea se mai poate scrie:

$$1) \quad \frac{1}{\beta} \cdot \left[1 + \frac{b}{\gamma} + \ldots + \frac{b . c \ldots k}{\gamma \ldots \lambda}\right] = \frac{1}{r} \cdot \left[1 - \frac{bc \ldots l}{\beta\gamma \ldots \lambda}\right].$$

Dacă însă formula dată ar fi adevărată, ea s'ar mai putea scrie:

$$2) \quad \frac{a}{\beta} + \frac{ab}{\beta\gamma} + \ldots + \frac{abc \ldots k}{\beta\gamma \ldots \lambda} = \frac{1}{r}\left[a - \frac{abc \ldots k}{\beta\gamma \ldots \lambda}\right].$$

In acest caz, în baza egalităţii 2), ar trebui să avem:

$$\frac{b}{\gamma} + \ldots + \frac{bc \ldots k}{\gamma \ldots \lambda} = \frac{1}{r}\left[b - \frac{bc \ldots l}{\gamma \ldots \lambda}\right].$$

Şi atunci egalitatea 1) devine:

$$\frac{1}{\beta} \cdot \left[1 + \frac{1}{r}\left[b - \frac{bc \ldots l}{\gamma \ldots \lambda}\right]\right] = \frac{1}{r} \cdot \left[1 - \frac{bc \ldots l}{\beta\gamma \ldots \lambda}\right].$$

Dar această egalitate se reduce la:

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{r}\left(\frac{b}{\beta} - 1\right) = 0$$

de unde obţinem condiţia că $b = \beta - r$.

Aşa dar, pentru ca formula dată să fie valabilă, trebue să avem progresiile:

$$a,\ b,\ c,\ldots\ l$$

$$b,\ c,\ d,\ldots\ m$$

sau:

$$(\alpha - r),\ \alpha,\ \beta,\ldots\ \varkappa$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots\ \lambda$$

cari verifică formula.

COMANDOR I. LINTEŞ.

38. *Asupra problemei 5039.*

I. In soluţia acestei probleme, publicată la pag. 266, volumul XLVI, s'au strecurat erori datorită faptului că nu s'a ţinut seama de topografia figurii. Intr'adevăr, după felul cum s'a ales necunoscuta, (3) este ecuaţia problemei numai când M se găseşte pe latura BC şi nu pe prelungirea ei. In aceste cazuri nu trebuesc acceptate decât soluţiile mai mici ca $\frac{\pi}{2}$. Aşa dar (3) nu dă decât soluţiile

$$\alpha = B \quad , \quad \alpha_0 = \frac{\pi - B}{3}.$$

Când M este pe prelungirea lui BC, ecuaţia problemei este

$$\sin 2\alpha = \sin (B - \alpha)$$

şi ne dă soluţiile

$$\alpha' = \pi - B, \quad \alpha_1 = \frac{2\pi + B}{3}.$$

Soluţia $\alpha' = \pi - B$ corespunde punctului dela infinit de pe dreapta BC. Deci, înafară de soluţiile banale: piciorul medianei şi punctul dela infinit al dreptei BC, numai două puncte, M_0 şi M_1, corespunzătoare valorilor α_0 şi α_1, satisfac enunţul problemei.

Cum $\alpha_0 + \alpha_1 = \pi$, cele două catete sunt bisectoarele unghiului M_0AM_1, iar cele două puncte *divid armonic ipotenuza triunghiului dreptunghiu.*

II. *Iată o soluție geometrică simplă.*

Presupunând problema rezolvată și însemnând cu A′ punctul unde dreapta AM taie a doua oară cercul ABC, cum MA . MA′ = MB . MC = k, relația

$$\frac{2}{AM} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{CM}$$

devine

$$2A'M = MB + MC. \qquad (1)$$

a) Să presupunem că M este pe ipotenuza BC. In acest caz (1) poate fi scrisă

$$A'M = OB$$

(O fiind centrul cercului ABC). Se deduce de aici că A′ este la intersecția cercului ABC cu o concoidă a dreptei BC obținută prelungind razele vectoare AM cu lungimea OB = R. Sunt două puncte de intersecție (exceptând cazul particular în care ABC este isoscel), unul fiind, evident, diametral opus lui A și conducând la soluția banală O. Al doilea punct, A′, ne dă soluția M_0. Pe figură se urmăresc ușor următoarele relații între unghiuri

$$\sphericalangle BM_0A = \sphericalangle A'M_0O = \sphericalangle A'OM_0 = 2 \sphericalangle OCA' = 2 \sphericalangle BAM_0 = 2\alpha_0$$

$$\sphericalangle BM_0A + \alpha_0 + B = \pi \quad \therefore \quad 3\alpha_0 + B = \pi \quad \therefore \quad \alpha_0 = \frac{\pi - B}{3}.$$

b) Dacă M este pe prelungirea ipotenuzei, (1) devine

$$A''M = OM \qquad (2)$$

Această relație este, evident, verificată când M se găsește la infinit pe BC; obținem astfel a doua soluție banală. Dar (2) arată că punctul A″ descrie o strofoidă ce trece prin A și are pe O ca punct dublu. Inafară de A strofoida mai taie cercul încă în trei puncte, dintre care numai unul ne conduce la soluția M_1, celelalte două corespunzând la poziții ale lui M între B și C.

Pe figură se pot urmări relațiile

$$\sphericalangle BAA'' = \alpha_1 = \sphericalangle BAO + \sphericalangle OAA'' = B + \sphericalangle M_1OA''$$

$$\sphericalangle M_1OA'' = \sphericalangle M_1OA + \sphericalangle AOA'' = 2C + \pi - 2 \sphericalangle M_1OA''$$

$$\therefore \quad 3 \sphericalangle M_1OA'' = 2C + \pi = 2\pi - 2B$$

$$\therefore \quad 3\alpha_1 = 3B + 2\pi - 2B \quad \therefore \quad \alpha_1 = \frac{2\pi + B}{3}.$$

Această valoare a unghiului α_1 arată că dreapta $A''M_1$ este simetrica dreptei $A'M_0$ față de catete.

In concluzie, problema admite patru soluții, cărora le corespunde pe BC patru puncte, două câte două conjugate armonic față de ipotenuză.

Din aceste patru soluții două sunt lipsite de interes fiind evidene.

Construcțiile nu se pot face cu rigla și compasul.

PETRE B. BOLDESCU.

39. *Asupra notei precedente.* Să păstrăm notațiile din soluția problemei. Eroarea semnalată de D-l P. BOLDESCU provine din următorul fapt:

Când M este între B și C atunci triunghiurile ABM și AMC ne dau:

$$\frac{\overline{BM}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AM}}{\sin B} \; ; \; \frac{\overline{MC}}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\overline{AM}}{\sin C} \; \therefore \; \frac{\overline{MC}}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AM}}{\cos B}$$

care introduse în relația:

$$(1) \qquad \frac{2}{AM} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$$

ne dau ecuația

$$\sin 2\alpha = \sin(B + \alpha).$$

Când M este dincolo de C, deci $\alpha > 90$ atunci aceleași triunghiuri ne dau:

$$\frac{\overline{BM}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AM}}{\sin B} \; ; \; \frac{\overline{MC}}{\sin(\alpha-90)} = \frac{\overline{AM}}{\sin C} \; \therefore \; \frac{\overline{MC}}{-\cos\alpha} = \frac{\overline{AM}}{\cos B}$$

care duse în (1) ne dau:

$$\sin 2\alpha = \sin(B - \alpha).$$

Problema are deci soluțiile indicate în nota de mai sus.

Celelalte soluții publicate la redijarea problemei 5039 verifică relația:

$$\frac{2}{AM} = \frac{1}{MB} - \frac{1}{MC}.$$

G. D. S.

40. *O proprietate a bisectoarelor unghiurilor triunghiului.* Dau în cele ce urmează, o demonstrație simplă și pe care n'am întâlnit-o încă, următoarei teoreme:

Bisectoarea unui unghiu într'un triunghiu, determină pe latura opusă segmente proporționale cu laturile adiacente.

Dacă Q și R sunt proiecțiile piciorului P al bisectoarei AP pe laturile AB, AC atunci

$$(1) \qquad \overline{PQ} = \overline{PR}.$$

Scriind suprafețele triunghiurilor APB, APC sub formele

$$S(APB) = \frac{BP \times AH}{2} = \frac{AB \times PQ}{2}$$

$$S(APC) = \frac{CP \times AH}{2} = \frac{AC \times PR}{2}$$

și ținând seamă de (1) se găsește imediat

$$\overline{BP} \cdot \overline{AC} = \overline{PC} \cdot \overline{AB}.$$

C. PANTELIMON.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL «GAZETEI MATEMATICE» DIN ANUL 1942

PROBELE SCRISE (9 Aprilie 1942)

(Timpul acordat: 3 ore)

CLASA IV-a

Geometria în spațiu. Să se arate că, în general, există două sfere care să treacă prin două puncte date, să fie tangente la două plane date și să aibe centrele pe un plan dat.

Algebra. 1. Din cauza unui asediu, care se crede că va dura 30 de zile, comandantul unei cetăți reduce rația de hrană la jumătatea rației normale. După 14 zile, comandantul crezând că asediul va fi prelungit cu 8 zile, reduce din nou rația, astfel ca hrana să ajungă până la noul termen. In a 34-a zi cetatea e despresurată. Hrana rămasă ajunge pentru 50 de rații normale pe timp de 4 zile.

Ştiind că raţiile au fost egale şi că a fost acelaşi număr de persoane în tot timpul asediului, să se afle numărul de persoane din cetate.

2. Să se desvolte expresia:

$$E = (AX + BY + CZ)^2 + (BX + CY + AZ)^2 + (CX + AY + BZ)^2.$$

Ştiind că:

$$A = a(a - b)$$

$$B = b(b - a)$$

$$C = ab$$

$$D = a^2 + b^2 - ab$$

să se arate că:

$$E = D^2(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

CLASA V-a

Algebra. 1. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia:

$$x^4 - 2px^2 + q^2 = 0.$$

2. Să se scrie sub forma cea mai simplă rădăcinile ecuaţiei date în cazurile:

I. $\begin{cases} p = 5m - 1 \\ q = 3m + 1 \end{cases}$

II. $\begin{cases} p = a + b \\ q = a - b. \end{cases}$

3. Cu ajutorul rezultatului dela punctul II, să se descompună în factori expresia:

$$A^4 + B^4 + C^4 - 2B^2C^2 - 2C^2A^2 - 2A^2B^2.$$

Aritmetica. 1. Am luat trei numere consecutive, le-am înmulţit, iar produsul lor l-am ridicat la pătrat şi am găsit rezultatul 90 418 * 84 416. Cifra dela mijloc e cam ştearsă şi de aceea în locul ei am pus o steluţă. Se cere:

1°. Care este acea cifră?

2°. Care sunt cele trei numere pe care le-am înmulţit la început?

* * *

2. Dacă a şi b sunt numere prime între ele, cu ce număr prim absolut s'ar putea simplifica fracţia $(a^2 + 2b^2) / (b^2 + 2a^2)$?

CLASA VI-a

Trigonometria. 1°. Pe mediatoarele laturilor BC, CA, AB ale unui triunghiu se consideră respectiv punctele M, N, P astfel încât $\sphericalangle MBC = \sphericalangle NCA = \sphericalangle PAB = \alpha$. Să se determine unghiul α, aşa fel încât triunghiul MNP să fie echilateral.

(Punctele M, N, P se vor considera în afara triunghiului).

2°. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 5x \cos x + 2 \sin 2x \cos^2 2x - 3 \sin 3x \cos 3x - 3 = (3 - \sin 2x) \cos 4x.$$

Algebra. 1. Să se găsească pentru ce valori reale ale lui x şi y, următoarele trei numere formează o progresie geometrică:

$$t_1 = a^2 + x^2 + y^2 \qquad t_2 = a^3 + x^3 + y^3 \qquad t_3 = a^4 + x^4 + y^4,$$

(a fiind real).

2. Se consideră primele n numere date de relaţia

$$a_p = a_{p-1} + a_1 \cdot q^{p-1}$$

unde a_1 şi q sunt cunoscute, iar p ia valori de 1 până la n.

Se cere să se exprime a_n numai cu ajutorul lui a_1 şi q şi să se calculeze suma primelor n numere.

Aplicaţie pentru şirul:

$$1 \; ; \; 3 \; ; \; 7 \; ; \; 15 \; ; \; \ldots$$

Să se calculeze al 20-lea termen din acest şir precum şi suma primilor 20 termeni.

Aritmetica. I. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \frac{s\,(1001) \cdot \sigma\,(1001^2)}{\varphi[p\,(1001)]}$$

unde $s(i)$, $p(i)$, $\varphi(i)$ şi $\sigma(i)$ reprezintă respectiv: suma divizorilor, produsul divizorilor, indicatorul şi suma numerelor prime şi mai mici ca el, relativ la numărul i.

II. Ştiind că p este un număr prim absolut, a este un număr întreg şi pozitiv nedivizibil cu p, iar m şi n sunt numere întregi şi pozitive, atunci avem:

$$a^{m \cdot \varphi(p)} - (n \cdot p)^m - 1 = M\,(m \cdot n \cdot p)$$

unde $\varphi(i)$ este indicatorul lui i.

III. Dacă numerele:

$$n_1, \; n_2, \ldots \; n_{\frac{p-1}{2}}$$

reprezintă, într'o ordine oarecare, numerile:

$$1, \; 2, \ldots \; \frac{p-1}{2}$$

unde p este un număr prim absolut, mai mare ca 2, atunci să se arate că avem două numere $(p - i)$ şi n_i astfel încât:

$$(p - i) \cdot n_i = Mp \pm 1.$$

De asemenea, să se arate că avem şi:

$$n_1 \cdot n_2, \ldots \cdot n_{\frac{p-1}{2}} = Mp \pm 1.$$

CLASA VII-a

Algebra. Se consideră funcţiunea:

$$y = a \sin x + b \cos x + c. \qquad (1)$$

1°. Să se determine a, b, c ştiind că pentru

$$x = \alpha - 2\beta \quad , \quad x = \alpha \quad , \quad x = \alpha + 2\beta$$

funcţiunea ia respectiv valorile:

$$y = m - 2n \quad , \quad y = m \quad , \quad y = m + 2n.$$

2°. Să se reprezinte funcţiunea astfel obţinută, când

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \beta = \frac{5\pi}{12}.$$

3°. Să se arate că funcţiunea

$$y = \sin \frac{9x - \pi}{6} + \sin \frac{3x + \pi}{6}$$

are ca reprezentare o curbă din familia de curbe reprezentate la punctul 2°.

4°. In funcţiunea (1), unde a, b, c sunt oarecari, să se determine valorile lui x, pentru care

$$\frac{y'}{y''} = k.$$

5°. Considerând una din aceste valori şi presupunând

$$b = an^2 \qquad (n \text{ întreg şi pozitiv}),$$

să se calculeze suma seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x + \operatorname{arctg} k).$$

Geometria descriptivă. Se dau punctele: A (30, 0, 0); C (70, 0, 120); D (150, 130, 0) şi planul P care trece prin punctele C şi D, a cărei urmă verticală face cu linia pământului un unghiu de 45 grade spre stânga şi care întâlneşte linia pământului în punctul B.

Se cere:

1) Să se determine liniile de intersecţie ale planelor ACD, între ele şi cu planele de proiecţiune.

2) Notând cu M, N, Q, R, S, T, mijloacele liniilor: CD, AB, BD, AC, BC şi AD, se cere să se determine proiecţiunile poliedrului care are ca vârfuri punctele M, N, Q, R, S, T, trasând cu linii pline muchiile văzute şi cu linii întrerupte muchiile nevăzute.

Se va socoti că numai acest poliedru este plin şi opac, cele două plane fiind socotite ca transparente.

Linia pământului paralelă cu marginile mici ale paginei a 4-a a coalei de hârtie şi la mijloc.

Datele în milimetri.

Cele trei numere din paranteză sunt: primul distanţa dela o origină comună luată la 3 milimetri dela marginea din stânga a paginei; al doilea număr este depărtarea şi al treilea uumăr cota.

Pe pagina a treia a coalei de hârtie se va face o legendă arătând în linii mari construcţiile făcute şi metodele adoptate.

CLASA VIII-a

Geometria analitică. Se consideră, faţă de un sistem de axe de coordonate perpendiculare Ox, Oy, cercul (Γ) cu centrul în origine şi cu raza R. Dreapta (D), de ecuaţie

$$y = mx + n$$

taie bisectoarele unghiului xOy în punctele A şi B.

1°. Să se scrie ecuaţia generală a cercurilor (C) care trec prin A şi B.

2°. Să se arate că axul radical al unui cerc (C) şi cercului (Γ), trece prin un punct fix M, când cercul (C) variază.

3°. Să se găsească apoi locul descris de punctul M, când dreapta (D) variază, rămânând paralelă cu o direcţie fixă.

4°. Să se arate că locul este o iperbolă având o asimptotă paralelă cu direcţia fixă a dreptelor (D).

Mecanica. *Problema I.* Un tanc are baza de susţinere AB = 2,00 m, iar centrul său de greutate G este situat pe verticala lui C (AC = 1,10 m) la distanţa

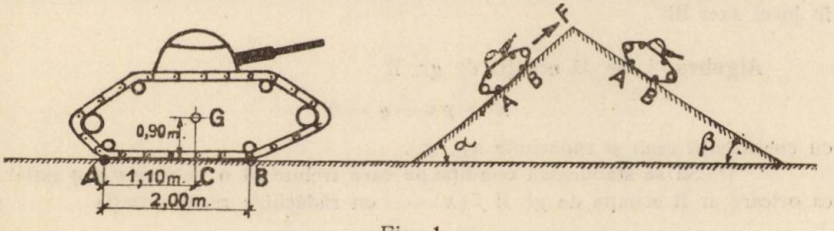


Fig. 1.

tancului P = 5 tone, să se determine *forţa de tracţiune minimă* F paralelă cu linia de cea mai mare pantă necesară urcării tancului pe rampa maximă. GC = 0,90 m. Să se calculeze (prin determinarea unghiurilor α şi β făcută de liniile de cea mai mare pantă cu orizontala) *rampa maximă* şi *panta maximă* pe care poate circula acest tanc fără să se răstoarne. Considerând greutatea

Problema II. Un tun de coastă O al marinei noastre trăgând un proiectil *cu iuţeala iniţială* $v_0 = 500$ *m/sec şi cu unghiul de tragere* $\alpha_1 = 30^0$ loveşte în centru un distrugător sovietic aflat în mers pe orizontala lui O. După $t = 140$ *secunde* dela prima tragere, acelaş tun, în acelaş plan vertical trage un al doilea proiectil cu *aceeaşi iuţeală iniţială dar cu unghiul de tragere* $\alpha_2 = 45^0$ şi loveşte iarăşi în centru distrugătorul.

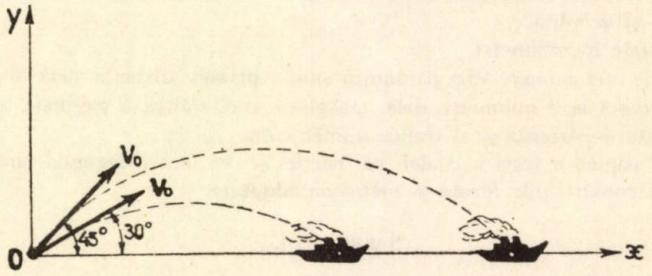


Fig. 2.

Să se calculeze *iuţeala* (presupusă constantă) *cu care fuge distrugătorul sovietic.*

ANUL I AL ŞCOALEI POLITEHNICE

Geometria analitică. Fie M un punct variabil pe o elipsă (E) având focarele F, F′, axa mare $\overline{AA'}$, axami că $\overline{BB'}$. Fie P intersecţia perpendicularelor BP şi B′P respectiv pe MF′ şi MF, iar R intersecţia perpendicularelor BR şi MR respectiv pe MF şi AA′.

1°. Să se găsească locul punctului P şi să se construiască acest loc, construindu-se grafic elementele.

2°. Să se găsească locul punctului R şi să se construiască acest loc.

3°. Să se găsească suprafeţele de rotaţie înnăscute de locurile (P) şi (R) în jurul axei BB′.

Algebra. I. Se dă ecuaţia de gr. II

$$x^2 + px + q = 0$$

cu coeficienţii reali şi rădăcinile x_1, x_2.

1°. Să se stabilească condiţia pe care trebue să o verifice p şi q astfel ca oricare ar fi ecuaţia de gr. II $f(x) = 0$ cu rădăcinile reale, ecuaţia

$$f(x) + pf'(x) + qf''(x) = 0$$

să aibă de asemenea rădăcinile reale.

2°. Să se interpreteze pe urmă geometric condiţia găsită considerând punctele reprezentative ale numerelor complexe x_1, x_2.

3°. Să se examineze aceeaşi problemă când nu se face ipotezacă p, q, sunt reali.

II. 1°. Să se determine λ astfel ca forma patratică

$$\sum x_i^2 + \lambda \sum x_i x_j$$

de n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ să fie definită şi pozitivă.

2°. Să se deducă că forma

$$F = 2 \sum x_i x_j - \sum x_i^2$$

nu este definită şi nici semi-definită.

3°. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ măsoară lungimile laturilor unui poligon de n laturi, avem

$$F > 0.$$

(O chestiune obligatorie).

* * *

ANALIZA

I. Se consideră patru forme liniare

$$L_i = a_i x + b_i y + c_i z \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

în trei variabile x, y, z, coeficienţii a_i, b_i, c_i fiind daţi.

Se cere să se studieze maximul produsului

$$P = (L_1 + d_1)(L_2 + d_2)(L_3 + d_3)(L_4 + d_4),$$

d_1, d_2, d_3, d_4 fiind alte patru numere date, iar x, y, z luând toate valorile reale posibile.

Să se arate că în general avem

$$\max P = +\infty.$$

Să se găsească condiţiile pe cari trebue să le îndeplinească coeficienţii a_i, b_i, c_i pentru ca $\max P$ să fie un număr finit.

II. Se consideră o funcţie $f(x)$ definităin intervalul închis $[0, 1]$ şi admiţând în toate punctele acestui interval o derivată a doua continuă şi pozitivă.

Se cere:

1°. Să se arate că

$$(1) \qquad f(x) = \int_0^x (x - t) f''(t)\, dt + Ax + B$$

A, B fiind constante ale căror valori se cer.

2°. Să se arate că avem

$$(2) \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) < \int_0^1 f(x)\, dx < \frac{1}{2}[f(0) + f(1)].$$

3°. Din formula (2) să se deducă că avem în general

$$(3) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{2i+1}{2n}\right) < \int_0^1 f(x)\, dx < \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} \left[f\left(\frac{i}{n}\right) + f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right].$$

4°. Să se interpreteze geometric inegalităţile (3).

(O chestiune obligatorie).

Mecanica. *Problema I.* Un punct material M de greutate P este silit să rămână pe un cerc de raza r situat într'un plan vertical.

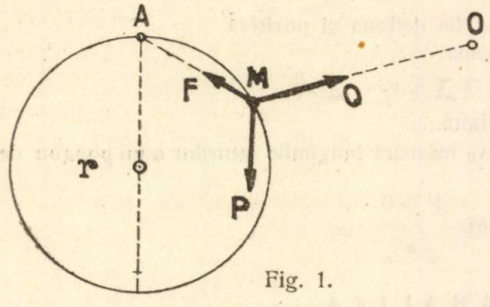


Fig. 1.

Punctul este atras de capătul A al diametrului vertical al cercului cu o forţă F proporţională cu distanţa

$$\overline{AM},\ F = \frac{P}{r} \cdot \overline{AM}$$

şi de un punct fix O din planul cercului cu o forţă Q.

Se cere poziţia de echilibru. Frecarea dintre punct şi cerc se va neglija. Pentru poziţia de echilibru să se determine reacţiunea cercului.

Problema II. Se dă sistemul din figură situat într'un plan vertical şi compus din două roţi concentrice, solidare mobile în jurul axei fixe O de care sunt prinse cu fire greutăţile P şi Q şi o bară O_1BA înclinată cu unghiul α pe

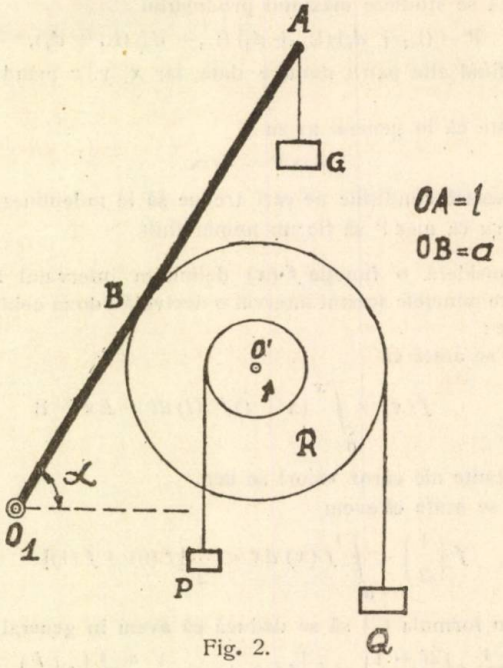


Fig. 2.

orizontală, articulată în O_1, simplu rezemată în B pe roata cea mare, de care este prinsă greutatea G. Ţinând seama de frecare în B (coef. de frecare f), să se determine în funcţie de elementele geometrice date în figură minimul greutăţii G care opreşte punerea în mişcare a roţilor.

Să se determine reacţiunile din O şi O_1. Frecările în O şi O_1 şi greutăţile proprii ale pieselor sistemului se vor neglija.

BIBLIOGRAFIE

Revista matematică din Timişoara. Anul XXI. Nr. 12. Februarie 1942. Un nou sistem de coordonate: Coordonate rombice, de V. ALACI. Proprietăţi de geometrie având origina în aplicaţiile coordonatelor rombice, de O. N. ŢINO.

Idem. Anul XXII. Nr. 1, Martie 1942. Un nou sistem de coordonate: Coordonate rombice, de V. ALACI. Proprietăţi de geometrie având origina în aplicaţiile coordonatelor rombice, de O. N. ŢINO.

TH. ANGHELUŢĂ şi P. SERGESCU. Comemorarea iluştrilor matematicieni EMILE PICARD şi HENRI LEBESGUE. Timişoara, 1942.

CERERI

310. D-l Dr. N. I. ANGELESCU într'un articol asupra vestitului comerciant din Bucureşti, GR. CAPŞA, spune că „un fiu al acestuia", NICULAE CAPŞA (1834—1864) *„e primul român care îşi ia doctoratul în matematici dela Paris, fiind bursier al Eforiei Şcoalelor*, însă moartea îl răpune de tânăr".

Ce se ştie despre studiile matematice ale acestui tânăr bucureştean? Noi ştim că primul Doctor în matematici dela Paris a fost SPIRU HARET în 1878. Chiar în cazul când N. CAPŞA ar fi fost numai licenţiat, este interesant pentru istoricul matematicilor în România de a avea date precise asupra acestui tânăr.

I. I.

311. Pentru biblioteca *Gazetei Matematice*, D-l M. PORTOCALĂ a donat o algebră românească la care îi lipseşte titlul, autorul şi numele tipografiei precum şi anul tipăririi. S'ar putea găsi aceste date ştiind că la pag. 1 este scris *Cursu elementaru de algebră.* Noţiuni preliminare. Cartea I începe la pagina 10. Cartea II la pag. 69. Cartea III la pag. 156. Cartea IV la pag. 209. Sfârşitul este pag. 264!

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

C. A. BJERKNES: NIELS-HENRIK ABEL. Paris, 1885.

M. RIQUIER: Sur les principes de la théorie générale des fonctions. Paris, 1891.

Donate de D-l ION IONESCU, Inginer.

I. N. BLĂNDU: Algebra pentru cursul învăţământului secundar. Ediţia II. Iaşi, 1870.

JUAN DE GRECIANU: Cours d'algèbre (litografiat). 1856.

EL. ANGELESCU: Curs de algebră elementară. Ediția I. București, 1869.

M. SCHWARTZI: Elemente de aritmetică. București, 1865.

. . . . . : Curs de algebră. Format 175 × 105 cm. (Îi lipsește coperta cu titlul).

M. CAMUS: Eléments d'arithmétique. Paris, MDCCLXVIII.

M. CAMUS: Eléments de géométrie théorique et pratique. Paris, 1769.

M. CAMUS: Eléments de mécanique statique. Paris, MDCCLXVIII.

CLUSISIMI HELSHHAMI: Physica experimentalis. Ediția III. CIↃDCCLXIX. Vindobonne.

Donate de D-l Inginer M. PORTOCALĂ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2607. *Pe o conică cu centru*[1] *se dau două puncte fixe* A, B *și un punct mobil* M. *Se știe că segmentele determinate pe axele conicei de perpendicularele pe mijlocul coardelor* AM, BM *sunt constante. Să se găsească punctele* A *și* B *astfel ca unul din segmente să fie de* k *ori mai mare ca celălalt. Dacă* u *și* u_1 *sunt cele două segmente, să se arate când*[2] *raportul segmentelor* u *a două conice din fascicolul acelora care au aceeași axă și care trec prin* A, B *este egal cu raportul segmentelor* u_1 *a conicelor considerate.*

D. PERIEȚEANU.

Fie

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - 1 = 0$$

ecuația unei conice (C), raportată la axele ei de simetrie și (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) coordonatele punctelor A, B, M față de aceste axe. Ecuațiile perpendicularelor pe AM și BM în mijlocul lor sunt

$$(\Delta_b) \qquad y - \frac{y+y_1}{2} = -\frac{x-x_1}{y-y_1}\left(X - \frac{x+x_1}{2}\right)$$

$$(\Delta_a) \qquad y - \frac{y+y_2}{2} = -\frac{x-x_2}{y-y_2}\left(X - \frac{x+x_2}{2}\right).$$

1) Cuvintele „cu centru" nu erau în enunțul inițial.

2) În enunțul publicat la pag. 31, Vol. XXIV s'a imprimat greșit *că* în loc de *când*.

Dacă P_1, Q_1 şi P_2, Q_2 sunt intersecţiile axelor de coordonate, cu Δ_b şi Δ_a atunci din ecuaţiile (Δ_b) şi (Δ_a) se deduce uşor

$$P_1\left[\frac{x^2-x_1^2+y^2-y_1^2}{2(x-x_1)},\ 0\right],\quad Q_1\left[0,\ \frac{y^2-y_1^2+x^2-x_1^2}{2(y-y_1)}\right]$$

$$P_2\left[\frac{x^2-x_2^2+y^2-y_2^2}{2(x-x_2)},\ 0\right],\quad Q_2\left[0,\ \frac{y^2-y_2^2+x^2-x_2^2}{2(y-y_2)}\right].$$

De aci rezultă

$$(2)\qquad u=\overline{P_1P_2}=\frac{x^2-x_2^2+y^2-y_2^2}{2(x-x_2)}-\frac{x^2-x_1^2+y^2-y_1^2}{2(x-x_1)}.$$

Scăzând din (1) pe rând pe fiecare din egalităţile

$$\frac{x_i^2}{\alpha}+\frac{y_i^2}{\beta}-1=0\quad,\quad i=1,\ 2$$

se găseşte

$$(3)\qquad y^2-y_i^2=-\frac{\beta}{\alpha}(x^2-x_i^2)\quad\text{şi}\quad x^2-x_i^2=-\frac{\alpha}{\beta}(y^2-y_i^2)$$

care duse în (2), dau

$$(4)\qquad u=\overline{P_1P_2}=\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}(x_2-x_1)=C^t.$$

La fel se găseşte

$$(5)\qquad u_1=\overline{Q_1Q_2}=\frac{\beta-\alpha}{2\beta}(y_2-y_1)=C^t$$

oricare ar fi punctul M pe conica (C). Condiţia

$$u=ku_1$$

devine, în baza relaţiilor (4) şi (5):

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{\beta}{\alpha k}$$

adică: *când* $u=ku_1$, *punctele* A *şi* B *se găsesc la intersecţia conicei* (C) *cu o dreaptă de coeficient unghiular egal cu* $\left(-\frac{\beta}{\alpha k}\right)$.

Pentru partea a doua a problemei observăm că o conică care trece prin A, B şi are pe Ox ca axă de simetrie, trece şi prin $A'(x_1, -y_1)$, $B'(x_2, -y_2)$ simetricele lui A, B faţă de Ox. Fie

$$y = mx + n \tag{6}$$

ecuaţia dreptei AB, unde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad n = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1}. \tag{7}$$

Ecuaţia dreptei A'B' fiind

$$y = -mx - n \tag{8}$$

ecuaţia generală a fascicolului de conice din condiţiile enunţului va fi

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - 1 + \lambda [y - (mx + n)][y + mx + n] = 0 \tag{9}$$

care devine

$$\frac{x'^2}{\alpha'} + \frac{y'^2}{\beta'} - 1 = 0 \tag{10}$$

dacă facem schimbarea de axe

$$x' = x - \frac{mn\lambda}{\frac{1}{\alpha} - \lambda m^2}; \quad y' = y. \tag{11}$$

Din (9) şi (10) se găseşte

$$\alpha' = \frac{\frac{1}{\alpha} + \lambda\left(\frac{n^2}{\alpha} - m^2\right)}{\left(\frac{1}{\alpha} - \lambda m^2\right)^2}; \quad \beta' = \frac{\frac{1}{\alpha} + \lambda\left(\frac{n^2}{\alpha} - m^2\right)}{\left(\frac{1}{\alpha} - \lambda m^2\right)\left(\frac{1}{\beta} + \lambda\right)}. \tag{12}$$

Ţinând seamă de prima parte a problemei, se scoate, pentru una din conicele (10):

$$u' = \overline{P_1' P_2'} = \frac{\alpha' - \beta'}{2\alpha'}(x_2' - x_1'); \; u_1' = \overline{Q_1' Q_2'} = \frac{\beta' - \alpha'}{2\beta'}(y_2' - y_1'). \tag{13}$$

Dar formulele de transformare (11) dau:

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1 \quad \text{şi} \quad y_2' - y_1' = y_2 - y_1.$$

Ducând aceste valori în (13) şi ţinând seamă de (12), găsim

$$u' = \frac{\left(\frac{1}{\beta} + \lambda - \frac{1}{\alpha} + \lambda m^2\right)(x_2 - x_1)}{2\left(\frac{1}{\beta} + \lambda\right)};$$

(14)

$$u_1' = -\frac{\left(\frac{1}{\beta} + \lambda - \frac{1}{\alpha} + \lambda m^2\right)(y_2 - y_1)}{2\left(\frac{1}{\alpha} - \lambda m^2\right)}.$$

Formulele (4), (5) şi (14) ne dau respectiv

$$\frac{u}{u'} = \frac{(\alpha - \beta)(1 + \lambda\beta)}{\alpha + \lambda\alpha\beta - \beta + \lambda\alpha\beta m^2} \quad ; \quad \frac{u_1}{u_1'} = \frac{(\alpha - \beta)(1 - \lambda m^2)}{\alpha + \lambda\alpha\beta - \beta + \lambda\alpha\beta m^2}.$$

De unde rezultă că pentru a avea egalitate între aceste două rapoarte trebue ca

$$(15) \qquad m^2 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Cum din (1) se vede că avem

$\alpha = a^2$, $\beta = b^2$ în cazul elipsei

$\alpha = a^2$, $\beta = -b^2$ „ „ hiperbolei

rezultă că (15) nu poate avea loc decât în cazul hiperbolei şi deci răspunsul la partea a doua a problemei este următorul: *raportul segmentelor* u *a două conice din fascicolul acelora care au aceiaşi axă şi care trec prin* A *şi* B, *este egal cu raportul segmentelor* u_1 *a conicelor considerate atunci când conica* (C) *este hiperbolă şi când între coordonatele punctelor* A, B *şi axele hiperbolei există relaţia*

$$\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Notă. 1°. La 15 Ian. 1940 s'a primit o soluţie analoagă de la D-l R. WELTNER, pe atunci student anul III la Cluj. D-sa a ajuns la relaţia (15) şi a conchis că partea a doua a problemei, aşa cum a fost enunţată la pag. 31, Vol. XXIV nu este adevărată.

2°. In cazul parabolei, găsim pe aceeaşi cale

$$u = \overline{P_1P_2} = \frac{x_2 - x_1}{2} = C^t$$

pe când

$$u_1 = \overline{Q_1Q_2} = \frac{y_2 - y_1}{8p^2}\left[y^2 + (y_1 + y_2)y + y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + 4p^2\right]$$

care nu este constant.

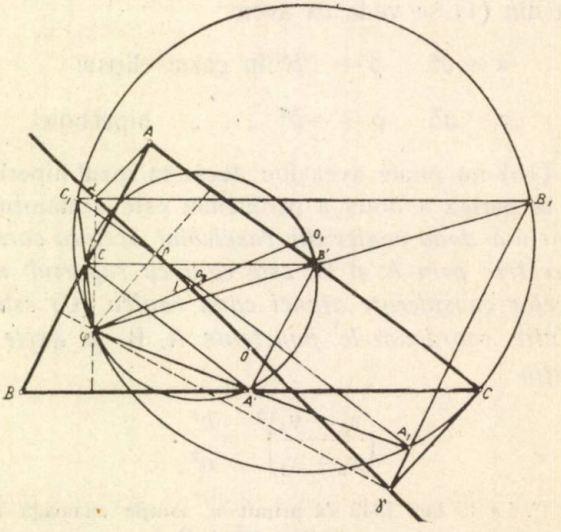
G-L GH. B.

PROBLEMA 4592. *Prin proiecţiile ortogonale ale vârfurilor* A, B, C *ale unui triunghiu pe linia centrelor cercurilor înscris şi circumscris triunghiului, se duc paralele la laturile* BC, CA, AB. *Aceste paralele determină un triunghiu* $A_1B_1C_1$. *Să se demonstreze că distanţa punctului lui* FEUERBACH *al triunghiului* ABC *la unul din vârfurile* A_1, B_1, C_1 *este egală cu suma distanţelor la celelalte două vârfuri.*

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-l ŞT. S. MIHĂIESCU.

Se ştie (TR. LALESCU, *Geometria Triunghiului*, pag. 328) că punctul φ al lui FEUERBACH este ortopolul dreptei OI faţă de



triunghiul ABC şi se găseşte pe cercul EULER al acestui triunghiu. Pe de altă parte s'a demonstrat de D-l CĂP. M. FOCŞENEANU,

în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXI, pag. 447 în articolul *„Asupra ortopolului"* că φ se găseşte şi pe cercul $A_1B_1C_1$, cerc care este tangent cercului lui EULER al triunghiului ABC. In plus triunghiul $A_1B_1C_1$ este omotetic cu triunghiul median $A'B'C'$, raportul de omotetie fiind 1 : 2 (Proprietatea 11 din articolul citat al D-lui CĂP. M. FOCŞENEANU) iar centrul de omotetie fiind φ. De aici rezultă că

$$\varphi A_1 = 2\varphi A' \quad , \quad \varphi B_1 = 2\varphi B' \quad , \quad \varphi C_1 = 2\varphi C'.$$

Dar se ştie (TR. LALESCU, *Geometria Triunghiului*, pag. 329) că una din distanţele $\varphi A'$, $\varphi B'$, $\varphi C'$ este egală cu suma celorlalte două. De aici şi din relaţiile precedente rezultă imediat proprietatea din enunţ care poate fi complectată în felul următor:

Cercul $A_1B_1C_1$ *are centrul pe* O_9 *într'un punct diametral opus lui* φ *iar una din distanţele* φA_1, φB_1, φC_1 *este egală cu suma celorlalte două.*

Notă. Problema se poate rezolva şi pe calea următoare, care pune în evidenţă şi alte proprietăţi. Fie α, β, γ perpendicularele din A_1B_1C pe OI. Perpendicularele din α, β, γ pe laturile triunghiului ABC concură în ortopolul φ al dreptei OI, pe cercul $A_1B_1C_1$, căci aceste proiectante sunt perpendiculare şi pe laturile triunghiului $A_1B_1C_1$. Rezultă că OI este dreapta lui SIMSON a lui φ faţă de $A_1B_1C_1$ şi deci φ este focarul parabolei π înscrisă în triunghiul $A_1B_1C_1$, care este simetric egal cu ABC. Tangenta în vârful parabolei π este IO. De asemeni φ este focarul parabolei π' înscrisă în $A'B'C'$ de directoare OI. Deci triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A'B'C'$ se corespund în omotetia $(\varphi, 2)$ şi A_1, B_1, C_1 sunt simetricele lui φ faţă de A', B', C' de unde rezultă imediat proprietatea din enunţ.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5003. *Intre ce limite trebue să fie cuprins* m *pentru ca fiecare din ecuaţiile*

$$x^2 - (m^2 - 1)x + m^2 - 1 = 0$$

$$(m^2 - 3)x^2 - 6x - m^2 + 1 = 0$$

să aibă o rădăcină şi numai una singură, cuprinsă între rădăcinile celeilalte ecuaţii.

G-L GH. BUICLIU.

I. *Soluție* dată de D-l C. D. EFTIMIE (elev-inginer, București). Se știe că condiția necesară și suficientă pentru ca două ecuații

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

să fie așa încât o rădăcină a uneia din ele să fie cuprinsă între rădăcinile celeilalte este ca realizantul:

$$E = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') < 0.$$

In cazul ecuațiilor particulare din enunț se găsește

$$E = (1 - m^2)(6m^4 - 31m^2 - 11) < 0$$

$$\therefore \quad E = -(m-1)(m+1)\left(m^2 - \frac{11}{2}\right)\left(m^2 + \frac{1}{3}\right) < 0$$

care are loc pentru

$$(1) \quad m_1 < -\sqrt{5{,}5} \quad ; \quad -1 < m_2 < 1 \quad , \quad \sqrt{5{,}5} < m_3 .$$

Căutând condițiile de realitate găsim că ecuația a doua are rădăcinile totdeauna reale, iar prima numai când

$$m_1 < -\sqrt{5} \quad ; \quad -1 < m_2 < 1 \quad ; \quad \sqrt{5} < m_3 .$$

Limitele (1) cuprinzând și pe acestea conchidem că ecuațiile date au rădăcinile reale și în condițiile din enunț, când m are valorile date de (1).

II. *Soluție* dată de D-nii: M. D. POPA, P. P. DRĂGHICESCU, C. PANTELIMON și A. N. POPA (Lic. militar, Iași).

Fie x', x'' rădăcinile primei ecuații și $f(x)$ membrul întâi al ecuației a doua. Pentru condițiile enunțului trebue să avem neapărat

$$f(x')\, f(x'') < 0$$

adică

$$[(m^2 - 3)x'^2 - 6x' - m^2 + 1][(m^2 - 3)x''^2 - 6x'' - m^2 + 1] < 0.$$

Făcând calculele și ținând seamă de relațiile între rădăcinile și coeficienții primei ecuații se ajunge la condiția

$$-(m^2 - 1)(2m^2 - 11)(3m^2 + 1) < 0$$

dela prima soluție.

III. *Soluție* dată de D-l T. A. ȘERBAN (elev-inginer).

Să notăm cu x', x'' rădăcinile primei ecuații și cu x_1, x_2 pe acelea ale ecuației a doua. In condițiile enunțului, este necesar și suficient ca rapoartele

$$(1) \qquad \frac{x'-x_1}{x'-x_2} \quad \text{și} \quad (2) \quad \frac{x''-x_1}{x''-x_2}$$

să fie de semne contrare. In adevăr dacă (1) este negativ înseamnă că x' se află în intervalul (x_1, x_2), iar (2) fiind pozitiv înseamnă că x'' este exterior aceluiași interval. Condiția este suficientă căci dacă x' se află în intervalul (x_1, x_2), iar x'' exterior atunci rapoartele (1) și (2) sunt de semne contrare. Produsul rapoartelor (1) și (2) dă

$$\frac{x'x''-(x'+x'')x_1+x_2^2}{x'x''-(x'+x'')x_2+x_1^2}<0$$

$$\therefore \quad [x'x''-(x'+x'')x_1+x_2^2]\,[x'x''-(x'+x'')x_2+x_1^2]<0$$

care, ținând seamă de relațiile între coeficienți și rădăcini, duce la rezultatele din primele două soluții.

Notă. S'au primit soluții parțiale dela D-nii: O. E. GHEORGHIU, I. V. JAREGHIE, S. LEIBOVICI, C. I. PĂSCARIU și ACHILE PETRESCU.

PROBLEMA 5147. *Două bare* AB *și* AC, *de greutate neglijabilă, sunt articulate în* A *și legate cu un fir inextensibil la capetele* B *și* C. *Barele* AB *și* AC *se reazimă, fără frecare, respectiv pe cuiele* D *și* E *așezate pe o orizontală, iar în punctul* A *acționează o forță* P *verticală. Se cere:*

a) *poziția de echilibru*;

b) *reacțiunile în* D *și* E;

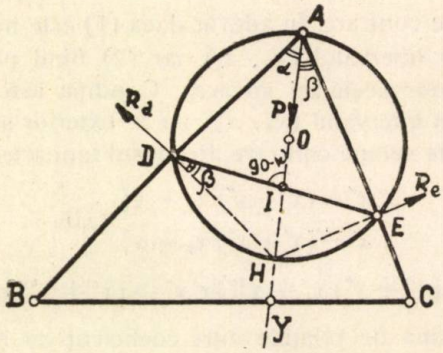
c) *tensiunea firului.*

GH. D. SIMIONESCU.

Să considerăm cazul mai general când cele două cuie D și E nu sunt pe aceeași orizontală și să notăm cu ω unghiul făcut de DE cu orizontala. DE va face cu verticala Ay unghiul $90^0-\omega$.

Este evident că nu va fi echilibru decât dacă firul BC va fi perfect întins, iar în acest caz triunghiul ABC este complet determinat prin laturi. Rămâne să-i găsim poziția de echilibru, care va

fi fixată prin cunoaşterea unghiului α sau β făcut respectiv de AB sau AC cu verticala Ay. Să presupunem triunghiul ABC într'o poziţie oarecare şi să înlocuim cuiele D şi E — elemente fizice — prin reacţiunile R_d şi R_e — elemente mecanice — perpendiculare respectiv pe AB şi AC. Fie H punctul de întâlnire al acestor reacţiuni şi I punctul unde AH întâlneşte pe DE.



Patrulaterul ADHE este inscriptibil, iar punctele A şi H sunt diametral opuse în acest cerc. In general AH nu e verticală. Ca să existe echilibru trebue ca cele trei forţe R_d, R_e şi P să fie concurente, adică Ay să treacă prin H, deci AH să fie verticală.

a) Să presupunem îndeplinită această condiţiune şi să determinăm elementele cerute de problemă, *în poziţia de echilibru.* Avem:

$$\sphericalangle DAH = \alpha \quad ; \quad \sphericalangle HAE = \sphericalangle HDE = \beta,$$

iar triunghiul ADI ne dă:

$$\alpha + (90 - \omega) + (90 - \beta) = 180^0 \quad \therefore \quad \alpha - \beta = \omega.$$

Această relaţie, împreună cu $\alpha + \beta = A$, ne dă:

$$(1) \qquad \alpha = \frac{A + \omega}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{A - \omega}{2}.$$

b) Să proiectăm forţele pe orizontala în H şi pe verticala AH:

$$R_d \cos\alpha = R_e \cos\beta$$

$$R_d \sin\alpha + R_e \sin\beta = P.$$

Rezolvând acest sistem obţinem:

$$R_d = \frac{P \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad ; \quad R_e = \frac{P \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

sau, ţinând seama de valorile lui α şi β din (1):

$$(2)\quad R_d = \frac{P\cos\frac{A-\omega}{2}}{\sin A}\ ;\ R_e = \frac{P\cos\frac{A+\omega}{2}}{\sin A}.$$

c) Să tăiem acum firul BC şi să-l înlocuim prin tensiunea T, apoi să izolăm bara AB. Bara astfel izolată va trebui să fie în echilibru, deci suma momentelor forţelor va fi nulă (se ia momentul în raport cu A pentru ca să dispară momentul reacţiunii din articulaţie). Notând cu h înălţimea din A a triunghiului ABC, avem:

$$R_d \times \overline{AD} - Th = 0.$$

Insă

$$\overline{AD} = \frac{\overline{DE}}{\sin A}\sin D\hat{E}A = \overline{DE}\,\frac{\cos\alpha}{\sin A}.$$

Atunci rezultă:

$$T = \frac{1}{h} \times \frac{R_d\,\overline{DE}\cos\alpha}{\sin A} \quad \therefore\ (3)\ T = \frac{P \times \overline{DE}\cos\frac{A-\omega}{2}\cos\frac{A+\omega}{2}}{h\sin^2 A}.$$

In cazul particular al problemei propuse $\omega = 0$, iar formulele (1), (2) şi (3) ne dau:

$$a)\ \alpha = \beta = \frac{A}{2}\ ;\ b)\ R_d = R_e = \frac{P}{2\sin\frac{A}{2}}\ ;\ c)\ T = \frac{P \times \overline{DE}}{4h\sin^2\frac{A}{2}}.$$

Niciunul din corespondenţi nu a tratat problema în cazul general. S'au primit soluţii bune, pentru problema aşa cum a fost propusă, dela d-nii: C. D. EFTIMIE, EMIL S. MODÂLCĂ, TEODOR ŞERBAN (elevi-ingineri Buc).

PROBLEMA 5415. *Să se arate că inegalitatea*

$$\tfrac{1}{2}(a^8 + b^8 + c^8) < b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4$$

exprimă condiţiunea necesară şi suficientă ca toate unghiurile unui triunghiu să fie mai mici decât 90°.

ŞERBAN GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: ANDREI AUREL (Lic. Militar, Iaşi), BODNĂRESCU M. HORIA (student, Buc.), P. P. DRĂGHICESCU (Lic. Militar, Iaşi), ADRIAN ERMIN (elev, Predeal).

Inegalitatea din enunț devine:

$$(a^2+b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)>0.$$

Sau:

$$P=(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)>0,$$

deoarece factorul $a^2+b^2+c^2$ este mereu pozitiv.

Condițiunea enunțată este *necesară*. Intr'adevăr, dacă triunghiul are toate unghiurile mai mici decât 90°, fiecare din factorii produsului P este pozitiv și deci și produsul este de asemeni pozitiv.

Condițiunea enunțată este *suficientă*. P fiind positiv, urmează că, sau toți factorii săi sunt pozitivi și deci unghiurile triunghiului sunt ascuțite, sau doi din factori sunt negativi, ceea ce este imposibil. Astfel, este evident că nu putem de exemplu, avea simultan:

$$-a^2+b^2+c^2<0,$$

și

$$a^2-b^2+c^2<0.$$

In acest caz, am avea de asemeni $2c^2<0$, ceeace este absurd.

Rezultă deci, că P fiind pozitiv unghiurile triunghiului sunt ascuțite.

PROBLEMA 5444. *Un cerc care trece prin proiecția punctului lui* MIQUEL *pe dreapta lui* MIQUEL *a aceluiași patrulater, taie parabola înscrisă patrulaterului în trei puncte astfel că normalele în aceste puncte sunt concurente.*

CPT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

Soluție dată de D-l PAUL DRĂGHICESCU.

Se știe că punctul lui MIQUEL al unui patrulater este focarul parabolei înscrise în acest patrulater, deoarece cercurile circumscrise triunghiurilor formate de trei tangente la parabolă, trec prin focar.

Dreapta lui MIQUEL unind proiecțiile punctului lui MIQUEL pe laturile patrulaterului circumscris parabolei, este deci *tangenta la vârf a acestei parabole.*

Proiecția punctului lui MIQUEL pe această dreaptă este vârful parabolei.

Se ştie însă că un cerc trecând prin vârful parabolei, o taie în alte trei puncte, în care normalele sunt concurente. (De exemplu, CH. MICHEL: *Compléments de géométrie,* 1926).

Cercul din problemă trece prin vârful parabolei înscrise în patrulater şi taie deci parabola în 3 puncte, în care normalele sunt concurente.

Notă. 1°. Cercul care trece prin proiecţia punctului lui MIQUEL pe dreapta lu MIQUEL, este un *cerc* IOACHIMSTAHL al parabolei.

2°. Dacă notăm cu $C(x, y)$ centrul cercului care trece prin vârful parabolei, punctul P în care se întâlnesc normalele la parabolă este punctul $P(2x - p, 4y)$.

Se vede astfel că curba descrisă de punctul P este în general de acelaşi grad cu curba pe care se mişcă centrul cercului.

Dacă centrul cercului descrie o dreaptă, punctul P descrie de asemenea o dreaptă.

CPT. M. I. F.

PROBLEMA 5488. *Se dă un triunghiu dreptunghiu* ABC. *Pe cateta* AB *se ia un punct* M *astfel ca:*

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM} \cdot \overline{AB}.$$

Fie P *proiecţia punctului* M *pe* BC.

1°. *Să se găsească locul punctului* P *când* B *variază de dreapta* AB.

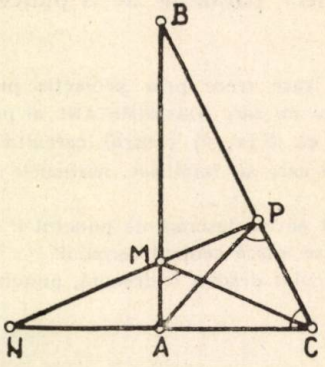
2°. *Să se arate că dreapta* MP *trece printr'un punct fix.*

BAL LASCU.

Soluţia I-a dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iaşi) şi MIREL D. STOENESCU (Şc. ofiţeri aviaţie).

1°. Din relaţia dată în enunţ, scrisă sub formă de proporţie, rezultă că triunghiurile ABC şi AMC sunt asemenea, deci $\sphericalangle AMC = \sphericalangle C$. Dar patrulaterul AMPC fiind inscriptibil $\sphericalangle AMC = \sphericalangle APC$. Comparând cele două egalităţi de unghiuri, se vede că triunghiul APC este isoscel, adică $\overline{AP} = \overline{AC} = \text{const.}$ Locul descris de punctul P este cercul cu centrul în A, de rază $\overline{AC}$.

2°. Fie N intersecția dreptei MP cu AC. Ținând seamă de asemănări putem scrie imediat: $\sphericalangle MNA = \sphericalangle B = \sphericalangle MCA$, adică triunghiul CMN este isoscel. Punctul N fiind simetricul lui C față de A, este fix.



Soluția II-a dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), HORIA M. BODNĂRESCU (student inginer București), MIRCEA C. NICULESCU (bacalaureat, București), FLORIN D. CĂRUNTU (cl. 6-a, lic. mil. Iași), GH. GH. BROȘTEANU (cl. 8-a lic. mil. Iași), MIRCEA D. POPA (Șc. ofițeri artilerie), MARIN GH. POPESCU (cl. 7-a, lic. Pitești), NIC. SOTIRESCU (cl. 8-a, lic. mil. Timișoara).

Fie N intersecția dreptelor MP și AC. Din triunghiurile asemenea MAN și CAB deducem:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AN}} \quad \therefore \quad \overline{AC} \times \overline{AN} = \overline{AM} \cdot \overline{AB}.$$

Comparând cu relația dată prin enunț rezultă $\overline{AN} = \overline{AC}$, adică:

1°. Punctul N este fix; 2° punctul P descrie cercul de diametru CN, deci cu centrul în A și cu raza $\overline{AC}$.

Au trimis soluții analitice D-nii: MIRCEA A. NEGREA, GH. GH. BROȘTEANU, MIRCEA D. POPA, NIC. SOTIRESCU, OCT. E. GHEORGHIU (student), ALEX. JILETCOVICI (Șc. ofițeri artilerie), FLORIN POPESCU (lic. „Marele Voevod Mihai"), IOAN A. BADEA (cl. 8-a, lic. „A. Șaguna" Brașov), GH. D. SBÂRNEA (lic. Tecuci), C. BAKONYI (lic. „Diaconovici-Loga" Timișoara), COSTIN ALEXE (lic. mil. Timișoara).

S'au mai primit două soluții dela doi buni corespondenți: una are calculul greșit, iar în cealaltă se afirmă că ecuația $x^2 + y^2 = c^2$ reprezintă o iperbolă echilateră!

G. D. S.

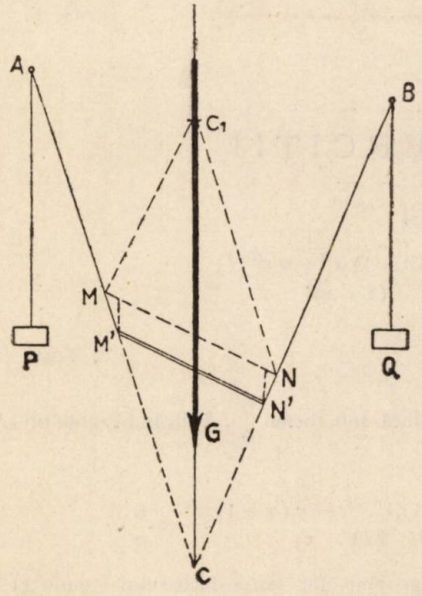
PROBLEMA 5510. *Se dă o bară omogenă de greutate* G, *de lungime* l *susţinută la ambele capete prin fire care, după ce trec prin 2 inele de poziţie dată în planul vertical, prind respectiv greutăţile* P *şi* Q.

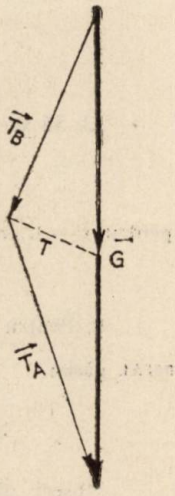
Să se determine grafic poziţia de echilibru a barei, neţinând seama de frecări. Greutatea firelor se neglijează.

GABRIELA ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-nii: C. D. EFTIMIE şi E. MODÂLCĂ (Politehnica, Bucureşti).

Direcţia firelor se determină ştiind că în ele lucrează tensiunile $I_A = P$ şi $I_B = Q$, care ţin în echilibru forţa G.





Ducem deci forţa G; dintr'o extremitate a ei ca centru descriem un cerc cu raza P, din cealaltă un cerc cu raza Q. Unind punctul de intersecţie al cercurilor cu extremităţile lui G, avem direcţiile lui T_A şi T_B. Ducem prin cele 2 inele, două drepte: $AC \parallel T_A$ şi $BC \parallel T_B$. Pe verticala lui C se află mijlocul barei, căci cele 3 forţe trebue să fie concurente.

Pentru a determina direcţia barei putem întrebuinţa 2 metode:

(1°) Descompunem în poligonul forţelor pe G în 2 părţi egale şi remarcăm că componenta verticală a lui P şi Q trebue să fie egală cu $\frac{G}{2}$, deci paralela la T este direcţia barei.

(2°) Dintr'un punct M pe AC ducem o paralelă la CB şi formăm un paralelogram în care G fiind diagonală împarte pe MN în 2 părţi egale. Luând pe dreapta MN de fiecare parte a forţei G o porţiune egală cu $\frac{l}{2}$, ducând verticale până ce întâlnesc firele, avem poziţia M'N' a barei.

S'au mai primit soluţii foarte bune dela D-nii: D. BOIANGIU şi COSTESCU G. ION (Politehnica Bucureşti) şi RADU P. VOINEA (Bacalaureat, Craiova).

G. Ţ.

EXERCIŢII

13. Să se afle limita expresiei

$$y = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

pentru $x \to 1$. Interpretare.

E. VIŞA.

R. Pentru $x \to 1$, y se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$. Aplicând regula lui L'HOPITAL găsim

$$\lim y = \lim \frac{n(n+1)x^{n-1}-n(n+1)x^n}{2(1-x)} = \frac{0}{0}.$$

Observ că nedeterminarea provine din cauza factorului comun $(1-x)$ la numărător şi numitor. După simplificare avem

$$\lim y = \lim_{x \to 1} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Interpretare. Membrul al doilea este valoarea sumei

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

pentru $x = 1$.

14. Să se afle limita expresiei

$$y = \frac{1 + x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1) x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

pentru $x \to 1$. Interpretare.

E. VIŞA.

R. Pentru $x \to 1$ expresia dată se prezintă sub forma $\frac{0}{0}$. Aplicând de trei ori regula L'HOPITAL găsim

$$\lim y = \lim_{x \to 1} \frac{n(n+1)^2(n-1)(n-2)x^{n-3} - n(n+1)(n-1)(2n^2+2n-1)x^{n-2}}{1.2.3} +$$

$$+ \frac{n^3(n+1)(n+2)x^{n+1}}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

Interpretare. Se vede că $\lim y$ este tocmai valoarea sumei

$$S = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1}$$

pentru $x = 1$.

15. Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia

$$\frac{\Sigma r_a^3 r_b + \Sigma r_a^2 r_b^2}{\Sigma r_a^2 r_b r_c} = 4\frac{R-r}{r}.$$

LOCOT. I. C. SAVIN.

R. Se ţine seama de relaţiile cunoscute

$$\Sigma r_a = 4R + r \quad ; \quad \Sigma r_a^2 = (4R+r)^2 - 2p^2 \quad ; \quad \Sigma r_a^3 = (4R+r)^3 - 12p^2 R;$$

$$\Sigma r_a^4 = (4R+r)^4 - 16p^2 R(4R+r) + 2p^4 \quad ; \quad r_a r_b r_c = p^2 r,$$

deducându-se

$$\Sigma r_a^3 r_b = 4p^2 R(4R+r) - 2p^4 \quad ; \quad \Sigma r_a^2 r_b^2 = 2p^4 - 4p^2 r(4R+r);$$

$$\Sigma r_a^2 r_b r_c = p^2 r(4R+r).$$

PROBLEME PROPUSE

5630. Pentru tipărirea a 1000 exemplare din broşura *„Maxime şi minime geometrice“*, apărută în „Biblioteca Matematică GEORGE ŢIŢEICA“, Nr. 1, Tipografia *„Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului“* a prezentat o factură din care extrag următoarele:

Tipăritul a 172 pagini pe costul de 3400 lei coala de 16 pagini. Pentru culesul formulelor un supliment total de 3080 lei; pentru clişeele figurilor 14 680 lei, în total. Pentru legatul volumelor 10000 lei. In plus impozitul de 4% la valoarea totală, sporită la prima sută de lei peste valoarea facturii, în total 2572 lei impozite.

Regulamentul fondului cerea ca broşurile să nu întreacă 100 de pagini. Din broşură primele 6 pagini conţin titlul şi Prefaţa, iar ultimele 5 pagini Tabla numelor şi Tabla de materii.

In aceste condiţii să se calculeze care este partea din valoarea totală de 66842 lei care revine fondului şi care este partea ce rămâne în sarcina autorului pentru depăşirea numărului regulamentar de pagini?

ION IONESCU.

5631. Să se găsească un pătrat perfect de şase cifre astfel, că suprimându-i prima cifră, să rămână un cub perfect.

M. GHERMĂNESCU.

5632. Să se arate că:

$$n! = 1 + 1!\ 1 + 2!\ 2 + 3!\ 3 + \ldots + (n-1)!\ (n-1).$$

COMANDOR GR. ZAPAN.

5633. Fie B_1, C_1, B_2, C_2 patru puncte pe cercul circumscris triunghiului ABC. Dacă A_1, A_2 sunt punctele ale căror drepte SIMSON relative la triunghiul ABC sunt paralele cu B_1C_1 şi B_2C_2, atunci triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ sunt triunghiuri S, unul în raport cu celălalt.

P. P. DRĂGHICESCU.

5634. Se consideră un triunghiu ABC şi fie M_1, M_2, M_3 trei puncte din planul lui. Să se arate că ecuaţia

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \overline{AM_1}^2 & \overline{BM_1}^2 & \overline{CM_1}^2 & 1 \\ \overline{AM_2}^2 & \overline{BM_2}^2 & \overline{CM_2}^2 & 1 \\ \overline{AM_3}^2 & \overline{BM_3}^2 & \overline{CM_3}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

exprimă condiţia necesară şi suficientă ca punctele M_1, M_2 M_3 să fie coliniare.

Ce reprezintă, în cazul general, determinantul Δ?

2°. M_1, M_2, M_3, M_4 fiind patru puncte din planul triunghiului, să se arate că ecuaţia

$$\left| \overline{AM_i}^2 \ \overline{BM_i}^2 \ \overline{CM_i}^2 \ 1 \right| = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

exprimă condiția necesară și suficientă ca punctele M_i să fie pe același cerc. In particular, ce devine această ecuație pentru cercul circumscris triunghiului ABC?

3°. Problema analoagă pentru tetraedru.

ȘERBAN GHEORGHIU.

5635. Fie în un tetraedru $\overline{SA} = \alpha$; $\overline{SB} = \beta$; $\overline{SC} = \gamma$; $\overline{BC} = a$; $\overline{CA} = b$; $\overline{AB} = c$, iar λ, μ, ν unghiurile făcute de muchiile opuse. Să se demonstreze relația:

$$\alpha a \cos\lambda + \beta b \cos\mu + \gamma c \cos\nu = 0.$$

2. Dacă tetraedrul este echifacial, iar p, q, r sunt distanțele cele mai mici dintre muchiile opuse, să se demonstreze relația:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

ION C. VASILIU.

5636. Se dă triunghiul ABC, dreptunghiu isoscel. Fie L un punct mobil pe paralela dusă din A la ipotenuză. Pentru fiecare poziție a punctului L corespunde o iperbolă echilateră trecând prin punctele A, B, C, L.

1°. Să se arate că parabola (P) bitangentă la iperbola echilateră în punctele B, C și parabola (P') bitangentă la iperbolă în punctele A. L au axele paralele și sunt tangente, locul punctului de tangență fiind o dreaptă.

2°. Să se găsească locul creștetelor parabolelor (P) și (P').

ȘERBAN OTETELEȘANU.

5637. Să se demonstreze, că dacă A' este piciorul înălțimii AA' în triunghiul ABC, iar d și D diametrele cercurilor înscrise în triunghiurile AA'C și AA'B, atunci avem relația

$$c(b + d)\sin(45^0 + B) = b(c + D)\sin(45^0 + C),$$

unde b și c înseamnă laturile AC și AB.

G-L GH. BUICLIU.

5638. Să se calculeze

$$\lim_{x \to 0} \frac{[m(m+2)\sin(a+mx) - m^2 \sin[a+(m+1)x]]\sin\frac{x}{2} - 2\sin\left(a+\frac{mx}{2}\right)\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{x}{2}}{4\sin^3\frac{x}{2}}.$$

GH. D. SIMIONESCU.

5639. Se consideră expresia

$$E \equiv 2^n \cos x = 2^2 \sin x + e^{2x} + e^{-2x} + e^{-x} + k,$$

unde k este oarecare şi e baza logaritmilor neperieni.

Să se demonstreze, că dacă $n > 1$, atunci

$$E \leqq 2(1 + 2^{n-1}) + k$$

şi să se determine neegalitatea corespunzătoare pentru $n \leqq 1$.

NIC. PAVEL.

5640. Fie $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$ trei vectori concurenţi; dacă notăm prin (M_2M_3) mărimea vectorului $\overline{M_2M_3}$, să se arate că

$$\varphi = \operatorname{ung}(\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = -i \log \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{M_1M_3}} : \frac{(M_1M_2)}{(M_1M_3)}.$$

Dacă N_1, N_2, N_3 sunt inversele punctelor M_1, M_2, M_3, de pol O şi modul arbitrar, notând cu

$$\psi = \operatorname{ung}(\overline{N_1N_2}, \overline{N_1N_3}), \quad \theta = \operatorname{ung}(\overline{OM_2}, \overline{OM_3}),$$

să se deducă relaţia

$$\psi = \varphi - \theta.$$

N. N. MIHĂILEANU.

5641. Un con circular drept, omogen, de greutate specifică ρ, este aşezat cu baza sa pe un plan orizontal.

De vârful acestui con se atârnă cu un fir o sferă omogenă executată din acelaşi material ca şi conul.

Elementele geometrice fiind cunoscute, să se determine condiţia ca sfera să nu răstoarne conul.

Să se determine tensiunea în fir şi reacţiunea dintre sferă şi con. Greutatea firului se va neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andreescu M. (5547); *Boiangiu D. D.* (5379, 529, 94, 617); *Cotariu D. M.* (5561, 71, 605, 16); *Cruceru Gh. C.* (5447, 529, 94); *Drăghicescu P. P.* (5616, P); *Enăchescu Gr. I.* (5584); *Florescu B. I.* (N); *Gheorghiu E. Oct.* (5598, 627); *Iacomi D. M.* (5550); *Ivan C. Z.* (5550); *Manolache E. M.* (5570, 617); *Oprea Gh.* (5447); *Petrescu N.* (5447); *Popa N. A.* (5550); *Popescu M.* (5570); *Pupezeanu Gh. I.* (5447); *Seni Cl.* (5598); *Tilică C. Şt.* (5530); *Ţonciu Gh.* (5447); *Turculeţ T.* (5529, 95); *Vasilescu P. I.* (5598); *Vasiliu Gh. D.* (5423, 47, 529, 50, 72, 99); *Voinea P. R.* (5605).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe **dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea I-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 80 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon : 3-9803).

C. 77.619.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 9. — MAI 1942

BIBLIOTECA CENTRALĂ ... SIBIIU

SUMARUL

1. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice“ din anul 1942 . . . . . *Gh. Th. Gheorghiu.*
2. Despre parabola cubică . . . . . *D. Barbilian.*
3. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
4. Raport asupra premiului de algebră . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 41 — 42.
6. Bibliografie.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 2394, 4978, 5193, 5268, 5311, 5393, 5403, 5409, 5439, 5511, 5604.
9. Exerciţii: 16 — 17.
10. Probleme propuse: 2647, 5642 — 5653.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer, şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **55**42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **6**00, 01, 02, 03, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimete gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLVII. Nr. 9 *SUPLIMENT* MAI 1942

DAREA DE SEAMĂ

asupra mesei comune care a încheiat al 32-lea Concurs al „Gazetei Matematice"

Suntem în seara zilei de 12 Aprilie 1942 în luna a zecea a *Războiului nostru Sfânt.*

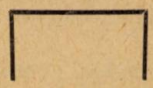
Departe de ţară, trupele noastre poartă cu mândrie tricolorul românesc în lupte grele pentru *Cruce* şi *Dreptate.*

Sfinţite prin jertfa sângelui, parte din provinciile româneşti smulse din trupul ţării noastre au fost readuse între hotarele patriei.

Pentru obţinerea victoriei finale şi pentru împlinirea dreptăţii totale, lupta este continuată atât pe front de către bravii noştrii ostaşi, cât şi în interiorul ţării prin munca fără răgaz a fiecăruia şi prin pregătirea pentru conducere şi lupte viitoare a generaţiilor ce vor veni.

In acest ultim cadru s'a ţinut al 32-lea Concurs al *Gazetei Matematice* încheiat cu tradiţionala masă comună dela Restaurantul Luzana.

In jurul mesei tradiţionale în formă de



iau loc D-nii: COLONEL CONSTANTIN PANĂ, COLONEL GH. ALEXIU, INSPECTOR TRAIAN POPP, S-LT. ROŞCA SPIREA şi V. GRIGORCEA invitaţi ai Societăţii *Gazeta Matematică.*

D-l PROF. ION IONESCU, stâlp al *Gazetei Matematice*, D-l GENERAL GH. BUICLIU, stâlp cooptat al *Gazetei Matematice*, D-ra GABRIELA ŢIŢEICA, D-na OTILIA GEORGESCU-ROEGEN şi D-nii: PAUL BENEŞ, AL. BUNESCU, IOAN CHIŢULESCU, NICOLAE GEORGESCU, N. GEORGESCU-ROEGEN, ADRIAN GHEORGHIU, GH. TH. GHEORGHIU, GH. ILIESCU, C-DOR I. LINTEŞ, N. N. MIHĂILEANU, EM. MEREUŢĂ, ALEX. PANTAZI, VICTOR POPESCU, AL. AL. ROŞU, D. STAN, AL. STOENESCU, D. STOICA, C. C. TEODORESCU, RADU ŢIŢEICA, M. VASILIU, C-DOR ZAPAN, membri ai *Gazetei Matematice.*

D-nii: BOGDAN GR. GH., DRĂGHICESCU PAUL, FLOREŞTEANU ALEX., MĂNESCU GH. ION, MUSCELEANU ST. ION, POPA AUREL, CONSTANTINESCU EMIL, POPA TEODOR, GHIŢĂ M. VASILE, IEŞAN ST. ALEX., PAVICA VICTOR şi BĂRZESCU MIRCEA, candidaţi la Concursul *Gazetei Matematice* admişi la oral.

* * *

Aceeaşi sală dela *Restaurantul Luzana*, acelaşi ceas cu acele oprite ca şi la Concursul precedent al *Gazetei Matematice.*

Dar membrii *Gazetei Matematice* nu mai sunt toţi: lipsesc acei ce luptă acum pe front departe de noi.

Şi sufletele noastre s'ar fi întristat poate dacă n'ar găsi înviorarea necesară în ceata tinerească şi viguroasă a candidaţilor *Gazetei Matematice*, în zâmbetele lor curate, în seninătatea frunţilor lor nedăltuite de griji.

Masa începe cu creştineasca ciocnire a ouălor roşii şi se continuă apoi în linişte într'o comunitate de gânduri, sentimente, amintiri.

Prima cuvântare este ţinută de D-l PROFESOR ION IONESCU:

In calitate de cel mai vechiu membru al **Gazetei Matematice** *prezent la această masă, îmi revine sarcina de a ţine prima cuvântare. Rostirea acestei cuvântări aparţine de drept D-lui* A. GH. IOACHIMESCU; *D-sa fiind bolnav nu a putut lua parte la masa noastră.*

La propunerea D-lui PROFESOR ION IONESCU întreaga asistenţă închină un pahar în sănătatea D-lui PROFESOR A. GH. IOACHIMESCU.

In continuare, D-l PROFESOR ION IONESCU rosteşte următoarele:

Anul trecut D-l COMANDOR LINTEŞ *la încheerea mesei a urat să ţinem Concursul viitor al* **Gazetei Matematice** *într'o Românie Mare.*

Astăzi această dorinţă a fost realizată în parte şi nădăjduim că va fi în curând complet îndeplinită.

In ceea ce priveşte Concursul **Gazetei Matematice** *din acest an se observă o scădere a nivelului matematic, scădere datorită probabil stării de nelinişte a spiritelor din cauza războiului.*

Această scădere este în special accentuată în domeniul Aritmeticii; spun aceste cuvinte întrucât este bine ca să se ştie că la Concursul **Gazetei Matematice** *nu va putea fi premiat niciun concurent care să nu cunoască bine această materie.*

Sperăm însă că la anul viitor Concursul va recăpăta splendoarea de altădată.

Incheiu această cuvântare, închinând pentru Suveranul Ţării, REGELE MIHAI I, *pentru* REGINA-MAMĂ ELENA *şi pentru Armata Română care luptă în aceste momente pentru ţară.*

Urale şi ovaţiuni acoperă ultimele cuvinte ale D-lui PROF. ION IONESCU.

Intreaga asistenţă în picioare aclamă pe *Suveran* şi *Armata Sa.*

Urmează cuvântarea D-lui ING. D. STAN:

Domnilor Concurenţi,

Un străin care ar parcurge bulevardele Capitalei, pe o zi cu soare, acum la începutul acesta întârziat de primăvară, n'ar putea de sigur să-şi închipue nămeţii de zăpadă cari au stăruit până mai ieri, şi nici rigorile iernii excepţionale prin care am trecut.

La fel şi Dv., Domnilor Concurenţi, primind regulat Gazeta, luând parte la acest concurs şi apreciind neîndoios organizarea lui sigură şi fără greş, vizitând localul Gazetei şi întâlnindu-ne pe toţi cei de aici adunaţi în atmosfera sărbătorească de astă seară, nu vă puteţi închipui de sigur greutăţile prin care a avut să treacă această înaltă organizaţie educativă care este **Gazeta Matematică,** *în cursul celor 47 de ani de viaţă ai ei, până să ajungă la echilibrul ce se vede, la situaţia şi posibilităţile ei de azi şi la autoritatea necontestată de care se bucură.*

Totuşi, multe şi de tot felul au fost aceste greutăţi, pe care, dintre toţi cei de faţă, numai D-l PROFESOR ION IONESCU *le-a trăit şi le cunoaşte pe de-a-întregul.*

Domnilor Concurenţi, trebue să ştiţi că a vorbi despre viaţa **Gazetei Matematice** *dela înfiinţarea ei până astăzi, este a vorbi despre 47 de ani din viaţa D-lui* ION IONESCU. *Una se confundă cu cealaltă. Ar fi greu de conceput lucruri mai strâns împletite decât desvoltarea* **Gazetei** *şi viaţa D-lui* PROFESOR IONESCU.

Din cei 5 tovarăşi cari au înfiinţat **Gazeta** *în 1895, D-sa este singurul rămas în viaţă. Iar dintre cei 4* **„stâlpi"** *cari i-au făcut faima şi i-au statornicit prestigiul, doi ne-au părăsit pentru totdeauna, — neuitaţii* GH. ŢIŢEICA *şi* V. CRISTESCU, — *al treilea, D-l* A. IOACHIMESCU *ne urmăreşte de sigur cu gândul în astă seară, neconsolat că starea sănătăţii nu-i permite să fie aici cu noi, şi numai D-l* ION IONESCU *a rămas neclintit să ne prezideze şi să ne arate calea ce avem de urmat. Numai D-sa ar putea să spună cât de spinos a fost drumul parcurs, câtă muncă desinteresată, cât entusiasm neclintit şi câtă perseverenţă au fost necesare ca să se ajungă până unde suntem.*

Adevărul este însă, că peste munca, entuziasmul şi perseverenţa colaboratorilor mari şi mici, necontenit a stat pe deasupra voinţa de a merge înainte şi a învinge a D-lui PROFESOR IONESCU, *darul său de a antrena la muncă disciplinată pe toţi cei din jurul* **Gazetei,** *şi dragostea sa nedesmînţită pentru această instituţie care este una din operele vieţii sale.*

Domnilor Concurenţi, am înţeles să vă vorbesc astă seară, în cadrul tradiţionalei « cuvântări morale », despre aceste lucruri, nu pentru că aş crede că D-l PROFESOR ION IONESCU *ar avea nevoie de fumul de tămâe al laudelor noastre şi de sunetul de trompetă al ditirambelor care să-i pună în lumină opera şi succesul, — ci pentru că din punct de vedere educativ nimic nu poate fi mai concludent şi mai folositor decât exemplul.*

Să mă ierte de aceea D-l PROFESOR *dacă am nesocotit o clipă modestia D-Sale cunoscută, dar n'aş fi putut găsi un exemplu mai strălucit, ca să vă îndemn şi pe Dv. ca în toată viaţa să preferaţi drumul drept — chiar dacă e anevoios — al muncii disciplinate şi al perseverenţii, în locul celui întortochiat al succeselor ieftine şi efemere.*

Este prea generalizată la noi tendinţa de a se porni lucruri mari şi promiţătoare spre a fi lăsate apoi neterminate, prea la tot pasul iniţiativele entuziasmului de o clipă care se uită de a doua zi, nenumărate sunt Asociaţiile, Institutele şi revistele care apar şi dispar cu rapiditate de comete.

Generaţia Dv., care îşi va aduce de sigur aportul ei la progresul neamului nostru întârziat pe calea civilizaţiei de împrejurări atât de vitrege, va binemerita dela generaţiile ce vor veni, dacă îşi va îndrepta sforţările şi în această direcţie : a disciplinării muncii, a perseverenţii în eforturi, a statorniciei în activitate.

Ca să vă puteţi da seama cât de mult se poate realiza prin acestea, v'am dat un exemplu, dragi Concurenţi ai **Gazetei,** *pe care nu trebue să-l pierdeţi din vedere nici odată.*

Şi pentru că aţi intrat în marea familie a **Gazetei Matematice** *pe care dorim să o iubiţi şi să o sprijiniţi toată viaţa de aci înainte, vă rog să uniţi glasul Dv. tânăr cu al tuturor membrilor Societăţii* **„Gazeta Matematică"** *aci de faţă, ca să mulţumim D-lui* PROFESOR ION IONESCU *pentru tot ce a făcut ca să ne dea* **Gazeta** *aşa cum ne-a dat-o şi să-i exprimăm omagiile noastre şi marea noastră recunoştinţă.*

Trăiască D-l PROFESOR ION IONESCU!

Trăiască **Gazeta Matematică!**

Asistenţa întreagă în picioare aclamă pe D-l PROFESOR ION IONESCU şi închină un pahar cu vin în sănătatea sa.

In calitate de delegată a *Gazetei Matematice*, vorbeşte D-ra GABRIELA ŢIŢEICA aducând mulţumiri tuturor celor ce au contribuit la ţinerea Concursului din acest an şi menţionând că iscălitura ce o va depune pe adresele oficiale de mulţumire nu o va da, fără a o cumpăni, deoarece de când era copil a învăţat că o iscălitură trebue bine chibzuită când este vorba de a hotări ceva pentru *Gazeta Matematică.*

D-sa povesteşte că la vârsta de şase ani a iscălit de primire într'o condică de expediere a *Gazetei Matematice* pentru un plic trimis tatălui său şi a fost cuprinsă apoi de remuşcări la ideea că iscălitura aceasta ar fi putut cumva să aibă consecinţe rele.

La reîntoarcerea acasă, tatăl său a liniştit-o, dar cu toate acestea, cu tot timpul trecut de atunci, D-ra GABRIELA ŢIŢEICA mărturiseşte că şi astăzi are grije ca activitatea sa să fie numai spre binele şi ridicarea *Gazetei Matematice.*

Asistenţa, profund impresionată, aplaudă îndelung pe D-ra GABRIELA ŢIŢEICA pentru admirabila şi duioasa sa povestire.

D-l ING. AL. BUNESCU în numele *Societăţii Gazeta Matematică* aduce mulţumiri D-lui GENERAL TRAIAN ILIESCU Directorul Şcolilor Militare pentru concursul dat prin adăpostirea şi hrana tuturor concurenţilor.

D-sa mulţumeşte de asemenea D-lui PROFESOR C. C. TEODORESCU, Rectorul Politehnicii din Bucureşti pentru punerea la dispoziţie a sălilor Şcoalei Politehnice pentru ţinerea *Concursului.*

Aplauze vii subliniază mulţumirile aduse D-lor GENERAL ILIESCU şi PROFESOR C. C. TEODORESCU.

In răspuns, D-l COLONEL CONST. PANĂ rosteşte următoarele cuvinte:

A fost o onoare pentru Liceele Militare de a găzdui pe concurenţii **Gazetei Matematice.** *Actualul director al acestor licee D-l General de divizie* TRAIAN ILIESCU *a fost şi este colaborator şi membru al* **Gazetei Matematice.** *D-sa înţelegând a continua frumoasa tradiţie a Liceelor Militare oferă* **Gazetei Matematice** *o donaţie modestă de 20.000 lei.*

Direcţiunea Liceelor Militare prin mine declară că este recunoscătoare Societăţii **Gazeta Matematică** *şi Comitetului său de conducere în frunte cu D-l* PROF. ION IONESCU *pentru desvoltarea matematicilor şi vă doreşte tuturor să trăiţi ani mulţi, iar numărul Dvs. să se mărească cu alţi colaboratori tot atât de entuziaşti ca şi Dvs.*

Aplauze puternice salută frumoasele cuvinte ale D-lui COLONEL CONSTANTIN PANĂ.

Din partea concurenţilor vorbeşte D-l ALEXANDRU FLOREŞTEANU, elev cl. 8-a a Liceului Militar „N. Filipescu". Redăm mai jos admirabila sa cuvântare:

Domnilor Profesori,

Iată-ne din nou adunaţi ca să reîntărim vechea legătură ce suntem convinşi că trebue să existe între profesori şi elevi. **Gazeta Matematică,** *în felul în care ni se înfăţişează astăzi, împlineşte dorinţa elevilor de totdeauna de a fi cât mai aproape de profesorii lor, de a-i înţelege şi de a fi înţeleşi.*

Ne simţim mai ales plini de bucuria mulţumirii sufleteşti, că în această atmosferă de intimitate intelectuală sărbătorim promovarea spiritului matematic şi afirmarea gândirii româneşti şi puterilor sale latente. Nu avem altă dorinţă decât ca mai târziu să facem parte din această ilustră familie a **Gazetei Matematice** *pentru a contribui şi la noi la progresul matematicilor româneşti.*

Împresuraţi de vulturii furtunii, cu aripi de victorie spre Răsărit şi adieri sălbatice de jale spre Apus, azi mai mult ca totdeauna ne simţim alături de Dvs. cu sufletul tineretului românesc, recunoscători că ştiinţa nu uită naţiunea, că prezentul nu uită viitorul.

Dorim ca **Gazeta Matematică** *să fie de acum înainte un stimulent al energiilor tinere şi ca membrii ei prezenţi să trăiască încă mulţi ani pentru a ne conduce şi călăuzi spre autarhia creaţiilor proprii. Într'un gând cu noi, D-lor Profesori, să închinăm un pahar pentru Societatea* **Gazeta Matematică** *atât de dragă nouă.*

Cuvântarea D-lui ALEXANDRU FLOREŞTEANU se încheie în aplauzele prelungite ale tuturor sub plăcuta impresie a cuvintelor sale frumoase şi al glasului său vibrant şi convingător.

Ulterior ia cuvântul D-l PROFESOR ION IONESCU rostind următoarele:

Îmi daţi voie să completez cuvântările D-rei ŢIŢEICA *şi D-lui* AL. BUNESCU *aducând mulţumiri D-lui* ING. GH. ILIESCU *care cu râvnă neobosită şi absolut dezinteresat se ocupă cu scoaterea la timp de sub tipar a* **Gazetei Matematice.** *Apariţia regulată, la dată precisă a acestei publicaţii se datoreşte muncii fără preget a D-lui* GH. ILIESCU.

D-sa reprezintă un exemplu de activitate rodnică şi neobosită demnă de imitat.

Asistenţa aduce prin vii aplause mulţumirile sale D-lui GH. ILIESCU.

Urmează apoi cuvântarea D-lui COMANDOR ZAPAN care în calitate de reprezentant al Armatei roagă pe toţi activii prezenţi la masă să mulţumească D-lui PROFESOR ION IONESCU pentru elogiile aduse Armatei.

O furtună de aplause provenite atât dela activi cât şi dela rezervişti răspunde dorinţii D-lui COMANDOR ZAPAN.

In continuare D-l COMANDOR ZAPAN roagă pe D-l GENERAL BUICLIU, să rostească câteva cuvinte ocazionale la această masă comună.

Dar la acest apel, răspunde însă D-l ING. D. STOICA:

Concursul **Gazetei Matematice** — spune D-sa — *constitue pentru mine o nespusă bucurie și ca părinte a mai multor copii mă simt profund legat sufletește de elevii concurenți.*

Doresc ca fiecare dintre ei să fie vesel și fericit și pentru aceasta voiu ruga pe acei candidați cari nu sunt premianți să-și aleagă câte o carte de matematici pe care să le-o dăruesc cu ocazia acestui concurs.

Aplauze ce nu mai contenesc mulțumesc D-lui D. STOICA, pentru darul său izvorît dintr'o nepreținută delicateță sufletească.

Pe figura sa senină și blândă iradiază bunătatea și bucuria celui ce este fericit prin fericirea ce o produce în jurul său; dânsul este pentru fiecare dintre noi și mai mari și mai mici imaginea tânără a unui *Moș-Crăciun* iubit din copilăria noastră de altădată.

Urmează D-l GEORGESCU-ROEGEN care într'o mișcătoare cuvântare își reamintește că acum 20 ani în uniformă, în calitate de concurent al *Gazetei Matematice* se găsea exact în același loc în care se află astăzi.

D-sa observă cât de pătrunzător leagă firul tradiției și siguranța continuității generațiile de azi cu cele ce au fost, cu cele care vor urma.

In încheere, D-l GEORGESCU-ROEGEN urează *Gazetei Matematice* să trăiască ani mulți continuându-și opera sa tradițională prin făuritorii ei de eri și de azi și prin adepții săi de mâine.

Adânc emoționată, asistența aplaudă frumoasa cuvântare a D-lui GEORGESCU-ROEGEN.

Ultima cuvântare este ținută de D-l GENERAL GH. BUICLIU.

D-sa evocă timpul de altădată când masa comună a Concursului *Gazetei Matematice* era înveselită de epigrame, poezii, cântece și terminată cu mândra horă românească.

Astăzi suntem însă sub încruntarea și grija *Războiului nostru Sfânt. Dar curând va apare pentru Țara noastră mândrul soare al dreptății și biruinții și în această credință nestrămutată încheiu tradiționala masă a* **Gazetei Matematice** *urând tuturor o revedere cu bine în viitorul an.*

Astfel luă sfârșit la ora $23\,^1/_2$ al 32-lea Concurs al *Gazetei Matematice* din anul 1942.

ALEXANDRU STOENESCU.

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1942

Concursul *Gazetei Matematice* face parte din tradiţiile noastre, la care, o spunem fără niciun înconjur, ţinem foarte mult. Poate că cineva citind aceste rânduri ne va reproşa că nu vrem să ne schimbăm, conducându-ne după metode învechite. Ce să schimbăm noi? Cei cari ne cunosc, ştiu bine că toate faptele noastre sunt bazate pe muncă continuă şi dezinteresată. Aceasta este prima tradiţie a vieţii noastre dela *Gazeta Matematică*. Din ea decurge totul! N'avem deci nimic de schimbat! Din contră, cu ajutorul acestei tradiţii înaintaşii noştrii au reuşit, şi noi ne vom strădui cu toate puterile noastre să menţinem a face din *Gazeta Matematică* un ideal, o emblemă, o făclie! O făclie pe care toţi o purtăm aprinsă şi strălucitoare în sufletele noastre şi căutăm mereu să o facem să se aprindă şi în sufletele celor ce urmează după noi. In felul acesta *Gazeta Matematică* nu ne mai aparţine nouă, ci neamului. Au trecut înaintaşii noştri, vom trece şi noi, dar *Gazeta Matematică* va rămâne.

A cincea zi de Paşti au apărut pe sălile Şc. Politehnice din Bucureşti placarde pe care era scris „*Concursul Gazetei Matematice*“ şi care indicau sala unde o mână de elevi, aranjaţi cu grijă de gospodarul nostru neobosit D-l GH. ILIESCU, aşteptau să înceapă probele scrise. In ochii lor tineri se citea dragostea de muncă şi de adevăr!

Incet, încet se adună unul câte unul profesorii, în frunte cu D-l ION IONESCU, ingineri, ofiţeri, toţi gustând din atmosfera concursului ca dintr'un tonic de forţe noi. Cele două teze decurg liniştit în tot cursul zilei de Joi 9 Aprilie. A doua zi începe oralul, bine înţeles numai cu candidaţii cari au făcut lucrări scrise bune. Comisia caută, cu obiectivitatea caracteristică omului de ştiinţă, să aşeze cea mai dreaptă rânduială în ordinea de clasificaţie a concurenţilor. Ceilalţi membri prezenţi pun şi ei întrebări pentru a se convinge mai bine de valoarea candidaţilor. Dela început, concursul *Gazetei Matematice* cimentează printr'o încredere reciprocă, întemeiată pe o cinste exemplară, legătura dintre generaţiile noui şi cele vechi dela *Gazeta Matematică*.

Dar, conform tradiţiei fixată de mult regretatul GEORGE ŢIŢEICA, în interiorul acestui raport trebue să spunem părţile bune dar şi cele neplăcute. Acestea sunt spuse în special pentru candidaţi, pentru a trage ei singuri concluziile care-i privesc. Din toţi cei înscrişi, au fost admişi la concurs 48 candidaţi. Numele lor se găsesc publicate într'un număr anterior al revistei. Dintre aceştia au absentat 5, s'au retras în timpul lucrărilor scrise 6; din cei rămaşi au fost admişi la oral 15 dintre cari s'a mai retras unul. Deci numai 14 candidaţi din 48 au fost admişi a trece toate probele concursului. Evident un număr cam mic! Dar ne miră faptul că printre ei au fost unii ce s'au retras dela oral sau dela scris. Cum să ne explicăm acest lucru ? Nu şi-au dat ei oare seama de seriozitatea problemelor ce se dau la concurs, sau concursul a fost numai un motiv spre a veni la Bucureşti ? Oricare ar fi cauzele, ele pun într'o lumină urîtă pe candidat. Sperăm ca în viitor să nu se mai întâmple asemenea lucruri! O a doua constatare neplăcută este că răspunsurile la aritmetică au fost foarte slabe, sub orice nivel! Evident că acest fapt se datoreşte programei analitice a liceelor care nu dă nicio atenţie acestei părţi importante a matematicilor, care desvoltă în special raţionamentul. Pentru a împlini golul din programele liceelor, măcar pentru unele elemente, *Gazeta Matematică* a hotărît ca de aci înainte toate concursurile să conţină probe de aritmetică.

Comisia examinatoare era formată din D-na OTILIA GEORGESCU ROEGEN, algebră la clasele IV şi V şi din D-nii I. IONESCU aritmetică clasa V-a, C-DOR I. LINTEŞ aritmetică clasa VI-a, P. BENEŞ algebră clasă VI-a, C. IONESCU-BUJOR algebră clasa VII-a, ADR. GHEORGHIU geometrie clasa IV-a şi V-a, GH. D. SIMIONESCU geometrie şi trigonometrie clasa VI-a, I. CHIŢULESCU geometrie descriptivă clasa VII-a, ALEX. PANTAZI geometrie analitică clasa VIII-a, O. N. ŢINO geometrie analitică pentru Politehnică, TIB. POPOVICIU algebră şi analiză pentru Politehnică şi ALEX. STOENESCU mecanică pentru clasa VIII-a şi Politehnică.

In afară de membrii comisiunii de examen, s'au mai interesat de aproape de mersul concursului luând parte la supravegherea tezelor şi la examenul oral şi următorii membri din societatea noastră: D-şoara GABRIELA ŢIŢEICA şi D-nii: G-L GH. BUICLIU, GH. TH. GHEORGHIU, V. GORCIU, GH. ILIESCU, G-L GH. I. LITEANU,

E. MEREUȚĂ, N. N. MIHĂILEANU, TR. POPP, A. A. ROȘU, D. STOICA, C. C. TEODORESCU, RADU ȚIȚEICA, ȘERBAN ȚIȚEICA, M. VASILIU și C-DOR GR. ZAPAN.

Rezultatul concursului este după cum urmează:

Premiul întâiu D-l DRĂGHICESCU P. PAUL elev clasa VIII-a dela lic. militar Gh. Makarovici din Iași. D-sa a dat răspunsuri foarte bune la toate probele scrise și orale dând dovada că stăpânește foarte bine materia clasei sale așezându-se cu cinste în lista primilor reușiți la concursurile *Gazetei Matematice*. I se dau ca premii: I. CHIȚULESCU, *Chaosul;* I. CHIȚULESCU, *Skiagrafometria;* GH. EM. FILIPESCU, *Statica construcțiunilor și rezistența materialelor;* I. IONESCU, *Génie civil;* I. IONESCU, *Isac Newton;* I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice;* V. MARIAN, *Elementele lui Euclide,* 3 volume; B. NIEWENGLOWSKI. *Cours de géometrie analytique,* tome I, II, III, IV; WITTENBAUER & PÖSCHL. *Aufgaben aus der Technischen Mechanik.*

Premiul al doilea D-l POPA AUREL, clasa VIII-a, lic. militar Gh. Makarovici, Iași, pentru răspunsurile scrise bune și foarte bune la oral în special la geometria analitică. I se dau ca premii: M. ED. BRAHY, *Exercices methodiques de calcul différentiel;* I. CHIȚULESCU, *Chaosul;* I. CHIȚULESCU, *Skiagrafometria;* I. IONESCU, *Beton armat;* I. IONESCU, *Lucrările publice la Romani;* I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice;* I. IONESCU, *Viața lui Euler;* TH. KLOMPERS, *Traité d'Arithmétique commerciale;* P. SMITH et W. LONGLEY, *Eléments de Mécanique rationnelle.*

S'au acordat apoi mențiuni candidaților cari urmează înscriși în ordinea claselor:

BÂRZESCU MIRCEA, clasa IV-a, lic. Gh. Makarovici, Iași, pentru teză foarte bună la algebră și răspunsuri orale bune. I se acordă cărțile: *Gazeta Matematică,* volum jubilar; I. IONESCU, *Comparațiunea rădăcinelor ecuațiilor de gradul II;* I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice.*

IEȘAN ST. ALEXANDRU, clasa V-a, lic. Matei Basarab, București, pentru teză foarte bună și răspunsuri bune la oral la algebră. I se acordă cărțile: *Gazeta Matematică,* volum jubilar; I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice;* I. IONESCU, *Un nou metod pentru studiul trigonometriei.*

CONSTANTINESCU I. EMIL, clasa VII-a, lic. Gh. Şincai, Bucureşti, pentru teză şi răspunsuri orale foarte bune la geometria descriptivă şi oral de algebră. I se acordă cărţile: I. CHIŢULESCU, *Chaosul;* I. CHIŢULESCU, *Skiagrofometria;* I. IONESCU, *Geometrografia;* I. IONESCU, *Maxime şi minime geometrice.*

POPA TEODOR, clasa VII-a, lic. Moise Nicoară, Arad, pentru teză şi răspunsuri orale foarte bune la geometria descriptivă. I se acordă cărţile: I. CHIŢULESCU, *Chaosul;* I. CHIŢULESCU, *Skiagrafometria;* I. IONESCU, *Maxime şi minime geometrice;* I. IONESCU, *Nomografia.*

BOGDAN GR. GHEORGHE, clasa VIII-a, lic. militar Gh. Makarovici, Iaşi, pentru răspunsuri bune la oral la mecanică şi geometrie analitică. I se acordă cărţile: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial;* I. IONESCU, *Beton armat;* I. IONESCU, *Istoria învăţământului ingineriei.*

DIACONESCU V. CONSTANTIN, clasa VIII-a, lic. militar Ştefan cel Mare, Cernăuţi, pentru ambele lucrări bune la mecanică. I se acordă cărţile: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial;* I. IONESCU, *Beton armat;* I. IONESCU, *Gh. Em. Filipescu.*

FLOREŞTEANU ALEXANDRU, clasa VIII-a, lic. militar N. Filipescu, Predeal, pentru lucrări bune la mecanică. I se acordă cărţile: *Gazeta Matematică,* volum jubilar; I. IONESCU, *Andrée-Marie-Ampère;* I. IONESCU, *Maxime şi minime geometrice.*

MĂNESCU GH. ION, clasa VIII-a, lic. Aurel Vlaicu, Bucureşti, pentru teză foarte bună de mecanică şi oral bun de geometrie analitică. I se acordă cărţile: A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial;* I. IONESCU, *Beton armat;* I. IONESCU, *Reforma calendarului.*

In afară de aceste premii şi menţiuni, acordate de societatea *Gazeta Matematică,* D-l Ing. D. STOICA, colegul nostru din societate, a anunţat la masa comună care a avut loc la restaurantul Luzana în seara de 11 Aprilie, că oferă tuturor candidaţilor prezenţi la masă câte o carte, după dorinţa exprimată de fiecare. Dăm în cele ce urmează numele candidaţilor, în ordinea alfabetică, arătând în dreptul numelui cartea ce şi-a dorit şi pe care i-a oferit-o D-l Ing. D. STOICA:

BÂRZESCU M.: *A. G. Ioachimescu. Culegere de probleme de algebră.* Partea I şi II.

BOGDAN GR. GH.: *G. Ţiţeica. Culegere de probleme de geometrie analitică.*

CONSTANTINESCU EM.: *G. Ţiţeica. Culegere ae probleme de geometrie analitică.*

DRĂGHICESCU P. P.: *F. G. M. Exercices de géometrie.*

FLOREŞTEANU A.: *Al. Stoenescu. Culegere de probleme de mecanică. Statica.*

GHIŢĂ. V.: *I. Ionescu. Culegere de probleme de aritmetică.*

IEŞAN AL.: *A. G. Ioachimescu. Culegere de probleme de algebră.* Partea I şi II.

MUSCELEANU I.: *Fitz-Patrick. Arithmétique.*

PAVICA V.: *A. G. Ioachimescu. Culegere de probleme de algebră.* Partea I şi II.

POPA N. A.: *F. G. M. Exercices de géometrie.*

POPA T.: *Al. Stoenescu. Culegere de probleme de mecanică. Statica.*

Inainte de a încheia ţinem să mulţumim Politechnicei din Bucureşti pentru acordarea sălilor de examen, Direcţiei liceelor militare pentru găzduirea şi întreţinerea elevilor în timpul concursului şi D-lui D. STOICA, care prin iniţiativa ce a luat, a făcut ca concurenţii reuşiţi la oral să obţină câte o carte, spre a le rămâne mai vie amintirea concursului la care au luat parte.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
GH. TH. GHEORGHIU.

DESPRE PARABOLA CUBICĂ

1°. Numim astfel curba de clasa 3-a bitangentă dreptei dela infinit, aşa dar *congruenta afină a ipocicloidei cu 3 puncte de întoarcere* (notată aici, mai jos, cu H_3).

In revistele elementare se studiază şi astăzi cu multă râvnă curba H_3. Dar proprietăţile ei mai însemnate au fost găsite, cu ani în urmă, de către CREMONA, într'un memoriu aproape uitat din *Jurnalul lui* CRELLE [1]). In schimb specia generală afină căreia aparţine H_3, aşa dar parabola cubică, a fost mai puţin cercetata.

1) Regret că nu am timpul să caut în colecţia acestui periodic pentru a da cu preciziune volumul şi anul în care a apărut memoriul lui CREMONA.

In cele ce urmează îmi propun să examinez în ce fel se extind la parabola cubică două din proprietăţile lui H_3. Se ştie că există ∞^2 patrupuncte ortocentroidale cu diagonalele tangente la H_3. Cercurile circumscrise triunghiurilor în care se descompune patrupunctul au o rază constantă iar cercul celor 9 puncte e staţionar. E vorba de generalizarea acestor două proprietăţi.

2⁰. Considerăm un sistem de coordonate isotrope, neomogene (coordonatele lui GAUSS). E clar că, dispunând de aceste coordonate, ecuaţia generală a tangentelor parabolei cubice poate fi adusă la forma

(1) $\Lambda \equiv i\lambda(\lambda - i)x + j\lambda(\lambda - j)y + (ij\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda - j) = 0,$

unde λ e un parametru $i \neq j$, proiectiv variabil iar i, j două constante. Recunoaştem uşor că dreapta Λ înfăşoară o curbă de clasa 3-a bitangentă dreptei dela infinit în punctele de parametri $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ şi ale cărei tangente isotrope $\lambda = i$, $\lambda = j$ se taie în origină (origina coincide deci cu focarul parabolei cubice).

Triunghiurile formate de trei tangente $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$, pentru care

$$t = abc = \text{c-tă}$$

vom zice că formează o *clasă de nivel*[1]).

Se vede uşor pe (1) că trei tangente concurente formează o clasă de nivel particulară

$$t = -1.$$

Deci patrupunctele cu diagonalele a^+, a^-; b^+, b^-; c^+, c^- tangente curbei (patrupunctele circumscrise):

$$a^- b^- c^- = a^+ b^- c^- = a^- b^+ c^- = a^- b^- c^+ = -1,$$

au triunghiurile $a^{\varepsilon_1} b^{\varepsilon_2} c^{\varepsilon_3}$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$, cuprinse în clasa de nivel

$$t = a^{\varepsilon_1} b^{\varepsilon_2} c^{\varepsilon_3} = +1.$$

3⁰. Să considerăm un triunghiu de laturi A, B, C cuprins în clasa de nivel $t = abc =$ c-tă. Prin A, B, C însemnăm în acelaşi timp membrul întâiu al polinomului din (1) pentru $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$. Ecuaţia cercului circumscris triunghiului ABC este

(2) $\qquad S\,bc(b - c)BC = 0 \quad , \quad a \neq b \neq c$

---

1) Definiţia proiectiv-invariantă a unei clase de nivel e următoarea: formele cubice apolare unei forme cubice date în familia pentru care hessiana e perechea de puncte de contact $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$.

după cum uşor se verifică. Un calcul simetric dă pentru (2):

$$(3)\quad t(i-j)^2xy+\mathrm{I}(it-j)x+\mathrm{J}(jt-1)y-\mathrm{IJ}=0,$$

unde s'a pus pentru prescurtare:

$$\mathrm{I}\equiv(i-a)(i-b)(i-c)\quad,\quad \mathrm{J}=(j-a)(j-b)(j-c).$$

Raportul dintre pătratul razei cercului şi puterea originei faţă de cerc (aşa dar pătratul tangentei jumătăţii unghiului θ sub care cercul se vede din origină) este, în virtutea unor calcule uşoare

$$(4)\qquad \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{(t-1)^2}{t}:\frac{(s-1)^2}{s},$$

unde s'a pus [1]):

$$s=\frac{i}{j}\cdot$$

Avem dar următoarea teoremă:

Cercurile circumscrise triunghiurilor unei aceleiaşi clase de nivel ale unei parabole cubice se văd din focarul acesteia sub un unghiu constant.

In special pentru clasa de nivel $t=1$, a triunghiurilor patrupunctelor circumscrise, avem:

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{-1}}{\sin u}$$

unde u e unghiul direcţiilor asimptotice ale parabolei cubice. Se vede de aici că θ e real atunci şi numai atunci când direcţiile sunt imaginar-conjugate.

Făcând pe i şi j să tindă respectiv către 0 şi ∞ se poate arăta că proprietatea generală de mai jos devine teorema lui CREMONA relativă la ipocicloida cu 3 puncte de înapoiere: *cercurile circumscrise triunghiurilor unei aceleiaşi clase de nivel au raza constantă.*

4°. In exagrama formată de diagonalele unui patrupunct se poate înscrie o singură parabolă cubică [2]). *Deci cercurile*

1) Din teorema lui LAGUERRE, a unghiului, între s, şi unghiul u al direcţiilor asimptotice ale parabolei cubice, avem legătura: $s=e^{2\sqrt{-1}\,u}$.

2) Parabolele cubice formează din punct de vedere tangenţial o familie lineară cu 6 parametri.

determinate de cele patru puncte luate câte 3 se v^d din focarul parabolei sub un unghiu constant (clasa de nivel $t = 1$). (Această proprietate am propus-o sub formă de problemă în *Gazeta Matematică*, pentru o demonstrație elementară directă).

Ceva mai mult: punctul de vedere-egală se dovedește a fi tocmai focarul parabolei cubice înscrisă exagramei, și deci, potrivit unui rezultat al lui CLIFFORD: *punctul lui* MIQUEL *generalizat, al exagramei.*

Formula (5) ne dă chiar valoarea unghiului de vedere-egală. Cum parabola cubică înscrisă diagonalelor patrupunctului are, cum se știe, direcții asimptotice comune cu conica celor 9 puncte, rezultă că θ din (5) e real când aceasta din urmă e o elipsă.

* * *

5°. Să întreprindem o cercetare asemănătoare în privința cercului celor 9 puncte al unui triunghiu variabil într'o clasă de nivel pe o parabolă cubică.

Intocmai ca ipocicloida H_3, parabola cubică admite 3 puncte de înapoiere concurente într'un punct, căruia vom continua să-i zicem centru. Considerăm un sistem de coordonate afine de axe concurente în centrul parabolei și paralele cu direcțiile ei asimptotice. Dispunând de parametrul proiectiv al reprezentării, putem aduce ecuația generală a tangentelor acesteia la forma

$$(6) \qquad \Lambda \equiv \lambda^3 x + \lambda y + 1 + \lambda^3 = 0.$$

Intru cât direcțiilor asimptotice le corespund aceleași valori $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, iar clasa tangentelor concurente corespunde aceluiași nivel $t = -1$, tot ce s'a spus despre clasele de nivel la alineatul 2° rămâne încă valabil.

Fie A, B, C trei tangente date de (6) pentru $\lambda = a, b, c$ și care formează un veritabil triunghiu:

$$t = abc \neq -1.$$

Considerăm fascicolul de drepte paralele laturii A:

$$A - \delta = 0,$$

unde δ e un parametru variabil. Se vede ușor că dreapta dela

infinit, dreapta A, şi paralela care trece prin intersecţia lui B cu C, au respectiv parametrii

$$\delta = \infty \quad , \quad \delta = 0$$

$$(7) \qquad \delta \equiv \delta_1 = \frac{(a-b)(a-c)}{bc}(1+t).$$

Dreapta care taie la jumătate două din laturile triunghiului ABC şi e paralelă cu A, este conjugata armonică a dreptei dela infinit $\delta = \infty$ în fascicolul precedent, faţă de dreptele $\delta = 0$, $\delta = \delta_1$. Deci corespunde parametrului

$$\delta = \frac{\delta_1}{2}.$$

Cum cercul celor 9 puncte e circumscris triunghiului median, ecuaţia lui intră, în virtutea celor arătate, în tipul

$$(8) \qquad \begin{aligned} &k_1\left(B-\frac{\delta_2}{2}\right)\left(C-\frac{\delta_3}{2}\right)+k_2\left(C-\frac{\delta_3}{2}\right)\left(A-\frac{\delta_1}{2}\right) \\ &+k_3\left(A-\frac{\delta_1}{2}\right)\left(B-\frac{\delta_2}{2}\right)=0, \end{aligned}$$

unde δ_2, δ_3 se deduc din (7) prin permutări circulare, iar k_1, k_2, k_3 sunt coeficienţi cari trebuesc determinaţi astfel încât conica (8) să treacă prin punctele absolute ale planului. Presupunem că în sistemul de coordonate afine considerat ecuaţia globală a direcţiilor absolute este

$$(8') \qquad I x^2 + 2Kxy + Jy^2 = 0,$$

$$IJ - K^2 > 0.$$

Se găseşte pentru k_1, k_2, k_3 valori proporţionale cu expresia

$$a(b-c)(I - 2aK + a^2 J)$$

şi permutatele ei circulare.

Un calcul mai lung, dar care poate fi condus cu simetrie, ne dă ca formă definitivă a ecuației cercului celor 9 puncte din (8):

$$(9)\quad \begin{cases} \mathrm{I}x^2 + 2\mathrm{K}xy + \mathrm{J}y^2 \\ + \left[\dfrac{3t-1}{2t} e\mathrm{I} + (1-t)\, g\mathrm{K} + \dfrac{t+1}{2}\mathrm{J}\right] x \\ + \left[\dfrac{1+t}{2t}\mathrm{I} + \dfrac{t-1}{t} e\mathrm{K} + \dfrac{3-t}{2} g\mathrm{J}\right] y \\ + \dfrac{t-1}{2t} e^2\mathrm{I} - \dfrac{(t-1)^2}{2} eg\mathrm{K} + \dfrac{1-t}{2} g^2\mathrm{J} \\ + \dfrac{t+1}{2t} g\mathrm{I} - \dfrac{(t+1)^2}{2}\mathrm{K} + \dfrac{1+t}{2} e\mathrm{J} = 0, \end{cases}$$

unde s'a pus

$$e = a + b + c \quad , \quad g = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \cdot$$

Avem în (9) pentru $t =$ c-tă și e, g variabili, ecuația generală a cercurilor lui EULER corespunzătoare aceleiași clase de nivel.

6°. Din (9) conchidem imediat:

Cercurile lui EULER *ale clasei de nivel* $t = 1$ *trec toate printr'un punct fix* [1]).

Sau, cu alte vorbe:

Iperbolele echilatere care trec prin vârfurile celor ∞^2 *patrupuncte cu diagonalele tangente unei parabole cubice păstrează acelaș centru.*

7°. In general coeficienții lui x și y din (9) sunt independenți. Există însă două clase de nivel pentru care între acești coeficienți intervine o legătură lineară cu coeficienți constanți: cazul în care expresiile care înmulțesc pe e și g sunt proporționale, adică

$$(3t-1)(3-t)\,\mathrm{IJ} = -4(1-t)^2\mathrm{K}^2.$$

Această relație se mai scrie

$$\frac{(t+1)^2}{(t-1)^2} = -\frac{(i-j)^2}{ij},$$

---

1) Punctul $x = -\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{I}}$, $y = -\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{J}}$.

unde i, j sunt direcţiile absolute, adică rădăcinile formei pătratice (8′). Ţinând seamă de (4) ecuaţia devine

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{4ij}{i^2+ij+j^2}$$

sau, încă, introducând unghiul $u=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\mathrm{L}\frac{i}{j}$ al direcţiilor asimptotice ale parabolei cubice:

$$(10)\qquad \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos\left(u+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(u-\frac{2\pi}{3}\right)}\,.$$

Avem prin urmare următoarea teoremă:

Triunghiurile al căror „unghiu de nivel" satisface la relaţia (10) *au centrele cercurilor lui* EULER *aşezate pe una sau alta din două drepte remarcabile din planul parabolei cubice*[1]).

Intr'adevăr, pentru acele valori ale lui t coeficienţii lui x şi y din (9) sunt legaţi prin câte o relaţie lineară cu coeficienţi constanţi. Acelaş lucru se întâmplă şi cu coordonatele centrului cercului (9), de unde teorema.

8°. Ce se poate spune însă despre cercurile lui EULER ale unei clase de nivel generală?

Cum am mai observat, coordonatele centrului lui (9) sunt funcţiuni lineare, în general independente, de e şi g. Se vede uşor că raza lui (9) e o relaţie cuadratică, întreagă în e şi g. Prin urmare locul centrelor cercurilor de rază nulă e o conică.

Se poate arăta expeditiv (demonstraţia riguroasă nu prezintă nici o greutate) că această conică se descompune în două drepte.

Intr'adevăr, când una din laturile triunghiului ABC devine isotropă, latura triunghiului median, paralelă cu aceasta, devine de asemenea isotropă, deci cercul lui EULER se descompune în două isotrope, are aşa dar raza nulă. Insă parabola cubică are două şi numai două tangente isotrope distincte. Deci locul centrelor de rază nulă se compune din două ramuri analitice distincte: din două drepte.

---

1) Dacă direcţiile asimptotice fac unghiul $u=\pm\frac{2\pi}{3}$ proprietatea e iluzorie (clasa de nivel e $t=0$ sau $t=\infty$).

Incât, dacă ξ, η sunt coordonatele centrului lui (9) iar r raza, avem:

$$(11) \quad r^2 = (u_1\xi + v_1\eta + w_1)(u_2\xi + u_2\eta + w_2).$$

Se demonstrează uşor că (11) revine la următoarea proprietate geometrică:

Există în planul parabolei cubice două drepte Δ_1 şi Δ_2 şi o direcţie Δ care depind numai de parabolă şi de clasa de nivel, aşa încât cercurile care admit ca perechi de puncte simetrice intersecţiile lui Δ_1 şi Δ_2 cu paralele (Δ) generează totalitatea cercurilor lui EULER *ale nivelului considerat.*

D. BARBILIAN.

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 304)

Derivatele de direcţie ale funcţiunilor scalare vectoriale.

Fie V, $\mathfrak{F}$ două funcţiuni: una scalară şi cealaltă vectorială continui într'un anumit spaţiu.

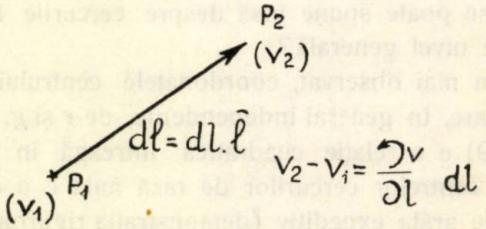


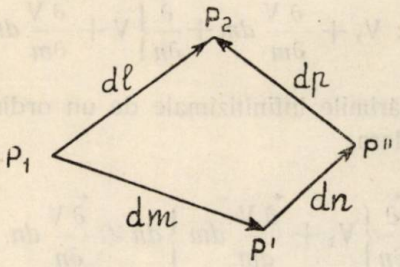
Fig. 42. Derivata de direcţie $\frac{\overleftarrow{\partial V}}{\partial l}$.

Prin definiţie vom exprima derivatele de direcţie ale lor după direcţia vectorului *dl* în felul următor: (Vezi fig. 42).

$$\frac{\overleftarrow{\partial V}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{V_2 - V_1}{\triangle l}$$

$$\frac{\overleftarrow{\partial \mathfrak{F}}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{F}_1}{\triangle l}.$$

Vom stabili derivatele de direcție ale funcțiunilor V, $\mathfrak{F}$ după direcția vectorului unitar $\bar{\ell}$, în funcție de derivatele de direcție după următorii trei vectori unitari necomplanari $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$.



dm, *dn*, *dp* trebue considerați necomplanari (în spațiu).

Fig. 43. Descompunerea lui *dl* după vectorii unitari necomplanari: $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$.

Figura 43 ne arată cum se descompune $d\ell$ în trei componente după vectorii unitari necomplanari $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$.

Avem:

$$d\ell = (d\ell\, m')\,\bar{m} = (d\ell\, n')\,\bar{n} + (d\ell\, p')\,\bar{p} =$$

$$= dl\,\{(\bar{\ell}\, m')\,\bar{m} + (\bar{\ell}\, n')\,\bar{n} + (\bar{\ell}\, p')\,\bar{p}$$

în care:

$$(d\ell\, m') = dm \quad ; \quad (d\ell\, n') = dn \quad ; \quad (d\ell\, p') = dp$$

astfel că:

$$\frac{dm}{dl} = (\bar{\ell}\, m')$$

$$\frac{dn}{dl} = (\bar{\ell}\, n') \qquad (1)$$

$$\frac{dp}{dl} = (\bar{\ell}\, p').$$

Să stabilim acum creșterile infinitizimale spre ex. ale funcțiunei V în P', P'' și P_2. (Vezi fig. 43).

In P_1 avem: V_1

In P' avem: $V_1 + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m} dm$

In P'' avem: $V_1 + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m} dm + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial n}\left\{ V + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m} dm \right\} dn.$

Neglijând mărimile infinitizimale de un ordin superior lui d, vom putea considera:

$$\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial n}\left\{ V_1 + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{dm} dm \right\} dn \cong \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial n} dn.$$

In P_2 avem:

$$V_1 + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m} dm + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial n} dn + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}\left\{ V_1 + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m} dm + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial n} dn \right\} dp$$

şi ţinând seamă de cele de mai sus, vom obţine în P_2:

$$V_1 + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m} dm + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial n} dn + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial p} dp.$$

Aşa dar $V_2 - V_1$ ia forma:

$$V_2 - V_1 = \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial l} dl = \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m} dm + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial n} dn + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial p} dp.$$

Din egalitatea de mai sus rezultă:

$$\frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial l} = \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m}\frac{dm}{dl} + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial n}\frac{dn}{dl} + \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial p}\frac{dp}{dl}$$

şi ţinând seamă de relaţiile (1), putem scrie:

$$\frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial l} = \left(\bar{\imath}\left\{ m' \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial m} + n' \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial n} + p' \frac{\overleftarrow{\partial} V}{\partial p} \right\} \right).$$

Expresia din partea dreaptă a egalității de mai sus se scrie simbolic în felul următor:

$$\frac{\overleftarrow{\partial}\,V}{\partial l} = (\bar{\imath}\,\nabla)\,V$$

în care ∇ denumit vectorul nabla, sau operatorul lui HAMILTON (introdus de HAMILTON în anul 1847) ia forma:

$$\nabla = m'\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial m} + n'\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial n} + p'\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}.$$

Se remarcă că forma simbolului e asemănătoare cu o harfă asiriană.

Așa dar: $$\frac{\overleftarrow{\partial}\,V}{\partial l} = (\bar{\imath}\,\nabla)\,V$$

reprezintă derivata de direcție a funcțiunei scalare V după direcția lui $\bar{\imath}$, înmulțită cu valoarea numerică a lui $\bar{\imath}$, în funcție de derivatele de direcție după $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$.

Analog vom avea: $\dfrac{\overleftarrow{\partial}\,\mathfrak{F}}{\partial l} = (\bar{\imath}\,\nabla)\,\mathfrak{F}.$

Expresia $(\mathcal{A}\,\nabla)\,\mathfrak{B}$ se citește: $\mathcal{A}$ gradient $\mathfrak{B}$, în care $\mathcal{A} = A\bar{a}$ reprezintă derivata de direcție a lui $\mathfrak{B}$ după direcția vectorului $\mathcal{A}$ înmulțită cu valoarea numerică A.

Avem: $$(\mathcal{A}\nabla)\,\mathfrak{B} = A\,(\bar{a}\nabla)\,\mathfrak{B} = A\,\frac{\overleftarrow{\partial}\,\mathfrak{B}}{\partial a}.$$

In cazul când vectorii unitari necomplanari $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ devin ortogonali vectorul nabla ia forma:

$$\nabla = \bar{m}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial m} + \bar{n}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial n} + \bar{p}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}.$$

Spre exemplu, în cazul vectorilor unitari ortogonali de direcţie constantă i, j, k obţinem:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

In cazul acesta nu mai punem săgeata la simbolul derivatei. Vectorul ∇ formează simbolul cel mai important în analiza matematică. Mărimile care se găsesc la dreapta lui vor fi derivate.

O remarcă:

Când e vorba de o derivată de direcţie a unei funcţiuni scalare, ea se mai poate scrie şi în felul următor:

$$\frac{\overleftarrow{\partial}\, V}{dl} = (\bar{t}\,\nabla V)$$

adică se efectuează mai întâi operaţia ∇V (se citeşte: gradient de V) şi vectorul obţinut se înmulţeşte scalar cu $\bar{t}$.

Nu tot aşa se întâmplă cu derivata de direcţie a unei funcţiuni vectoriale. *Nu e permis să se pue:*

$$\frac{\overleftarrow{\partial}\, \mathfrak{F}}{\partial l} = \bar{t}\,(\nabla\, \mathfrak{F}),$$

pentrucă $\mathfrak{F}$ fiind un vector operaţia $(\nabla\, \mathfrak{F})$ reprezintă o anumită scalară denumită divergenţa lui $\mathfrak{F}$ pe care o vom studia mai târziu.

Dacă descompunem vectorul $\mathfrak{F}$, după trei vectorii necomplanari de direcţie constantă spre ex.: $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ derivata de direcţie a lui $\mathfrak{F}$, după vectorul unitar $\bar{t}$, poate lua forma:

$$\frac{\overleftarrow{\partial}\, \mathfrak{F}}{\partial l} = (\bar{t}\,\nabla)\,\mathfrak{F} = (\bar{t}\,\nabla)\,\{(m'\,\mathfrak{F})\,\bar{m} + (n'\,\mathfrak{F})\,\bar{n} + (p'\,\mathfrak{F})\,\bar{p}\} =$$

$$= (\bar{t}\,\nabla\, F_m)\,\bar{m} + (\bar{t}\,\nabla\, F_n)\,\bar{n} + (\bar{t}\,\nabla\, F_p)\,\bar{p}$$

în care:

$$F_m = (m\,\mathfrak{F}) \quad ; \quad F_n = (n'\,\mathfrak{F}) \quad ; \quad F_p = (p'\,\mathfrak{F})$$

reprezintă trei funcţiuni scalare.

Introducând vectorii unitari ortogonali de direcţie constantă i, j, k vom avea:

$$\frac{\overleftarrow{\partial}\,\mathfrak{F}}{\partial l} = (\overline{l}\,\nabla)\,\mathfrak{F} = (\overline{l}\,\nabla\,F_x)\,i + (\overline{l}\,\nabla\,F_y)\,j + (\overline{l}\,\nabla\,F_z)\,k.$$

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI DE ALGEBRĂ

Subsemnaţii, membri ai Comisiunii pentru decernarea acestui premiu, aleşi în şedinţa din 28 August 1941, am cercetat lucrările de Algebră, publicate în *Gazeta Matematică*, anul XLVI şi am constatat:

1. In Vol. XLVI, s'au publicat soluţiile a 22 de probleme de Algebră. Corespondenţii noştri, cari îndeplinesc condiţiile Regulamentului Premiului şi cari figurează ca rezolvitori ai acestor soluţii, sunt în număr de 32. Dintre ei, 8 au dat soluţii la două probleme, iar restul la o problemă.

2. In volumul menţionat, nu sunt articole sau note de Algebră semnate de aceşti corespondenţi.

In consecinţă, suntem de părere ca, pentru anul 1941, să nu se acorde premiul de Algebră.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ

V. ALACI, TH. ANGHELUŢĂ, AL. BUNESCU.

Acest raport a fost citit şi aprobat în şedinţa Adunării Generale din 19 Februarie 1942.

NOTE MATEMATICE

41. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Pentru N_6 începând cu 8 am găsit următoarele 89 soluţii pentru numerele N şi N_6, legate prin relaţia

$$6 \times N_6 = N.$$

N_6	N	N_6	N
804 273 195	4 825 639 170	849 052 713	5 094 316 278
805 294 317	4 831 765 902	849 053 127	5 094 318 762
805 317 942	4 831 907 652	849 127 053	5 094 762 318
805 329 417	4 831 976 502	849 130 527	5 094 783 162
809 451 732	4 856 710 392	849 521 073	5 097 126 438
809 452 317	4 856 713 902	849 523 071	5 097 138 426
809 453 172	4 856 719 032	849 531 072	5 097 186 432
809 453 217	4 856 719 302	849 570 231	5 097 421 386
817 052 943	4 902 317 658	849 571 023	5 097 426 138
817 094 523	4 902 567 138	849 572 031	5 097 432 186
817 209 453	4 903 256 718	850 491 273	5 102 947 638
817 309 452	4 903 856 712	851 047 329	5 106 283 974
817 942 053	4 907 652 318	851 273 049	5 107 638 294
817 943 052	4 907 658 312	854 732 901	5 128 397 406
819 273 045	4 915 638 270	854 732 910	5 128 397 460
819 504 273	4 917 025 638	854 901 273	5 129 407 638
819 542 730	4 917 256 380	854 912 730	5 129 476 380
820 517 943	4 923 107 658	872 495 031	5 234 970 186
820 945 173	4 925 671 038	872 495 103	5 234 970 618
821 709 453	4 930 256 718	872 495 301	5 234 971 806
827 195 043	4 963 170 258	872 495 310	5 324 971 860
827 304 195	4 963 825 170	872 940 153	5 237 640 918
829 417 053	4 976 502 318	872 940 315	5 237 641 890
829 430 517	4 976 583 102	872 941 503	5 237 649 018
830 427 195	4 982 563 170	873 015 294	5 238 091 764
830 517 942	4 983 107 652	873 024 951	5 238 149 706
830 529 417	4 983 176 502	873 029 415	5 238 176 490
830 945 172	4 985 671 032	873 102 495	5 238 614 970
830 945 217	4 985 671 302	873 150 294	5 238 901 764
840 532 971	5 043 197 826	873 152 940	5 238 917 640
841 053 297	5 046 319 782	874 029 315	5 264 175 890
847 053 291	5 082 319 746	874 951 023	5 249 706 138
847 105 329	5 082 631 974	874 952 301	5 249 714 806
847 905 321	5 087 431 926	874 952 310	5 249 713 860

1) Urmare la Nota dela pag. 636, *Gazeta Matematică*, Vol. XLVI.

N_6	N	N_6	N
879 401 523	5 276 409 138	895 324 701	5 371 948 206
879 402 315	5 276 413 890	895 324 710	5 371 948 260
879 415 023	5 276 490 138	895 327 014	5 371 962 084
879 415 230	5 276 491 380	895 327 140	5 371 962 840
890 145 327	5 340 871 962	897 032 451	5 382 194 706
890 327 145	5 341 962 870	897 103 245	5 382 619 470
891 450 327	5 348 701 962	897 450 321	5 384 701 926
895 032 471	5 370 194 826	897 451 032	5 384 706 192
895 032 714	5 370 196 284	897 453 201	5 384 719 206
895 103 247	5 370 619 482	897 453 210	5 384 719 260
895 140 327	5 370 841 962		

G-L GH. BUICLIU.

42. *Asupra problemei 1885* (G. M., XVIII, 457). 1. Să notăm cu $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ c. m. m. c. d. şi cu $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$ c. m. m. c. m. al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Pentru simetrie $(a) = [a] = a$.

In problema 1885 se arată că dacă a, b, c sunt prime între ele,

$$(1) \qquad ([a, b], c) \cdot ([b, c], a) \cdot ([c, a], b)$$

este un pătrat perfect, ceea ce este exact căci în general (1) este egal cu

$$\frac{\{(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)\}^2}{(a, b, c)^3}.$$

La rezolvarea acestei probleme se încearcă şi o generalizare care însă nu este exactă. Se arată anume că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt prime între ele, avem $(n < m)$

$$(2) \quad \begin{cases} \Pi([a_1, a_2, \ldots, a_n], a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m) \\ \qquad = \{\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}^{m-n+1} \end{cases}$$

unde Π se referă la toate combinările câte n ale numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_m$ care intră în $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ respectiv în $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Condiţia $(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 1$ nu este în general suficientă pentru ca să avem (2). Vom stabili însă o formulă din care rezultă că este suficient să presupunem că $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt prime între ele $m - n + 2$ câte $m - n + 2$.

Să punem

$$A_k = \Pi(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m),\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

Π fiind extins la toate combinările $i_1, i_2, \ldots, i_k$ câte k ale numerilor $1, 2, \ldots, n$. In special $A_n = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Avem atunci

$$(3)\quad \begin{cases} ([a_1, a_2, \ldots, a_n], a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m) = \dfrac{A_1 A_3 \ldots}{A_2 A_4 \ldots} \\ \qquad = \prod_{k=1}^{n} A_k^{(-1)^{k-1}}. \end{cases}$$

Această formulă se stabileşte ca de obiceiu observând că un c. m. m. c. d. sau un c. m. m. c. m. nu poate avea alţi factori primi decât factorii primi ai numerelor considerate $a_1, a_2, \ldots, a_m$ şi că dacă factorul prim p intră la puterile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ respectiv, acest factor prim p va intra în $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$ respectiv la puterile

$$\min(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),\ \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Să punem acum

$$P_k = \Pi(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}),\ k = 1, 2, \ldots, m,$$

Π referindu-se la toate combinările $i_1, i_2, \ldots, i_k$ câte k ale numerelor $1, 2, \ldots, m$. In special

$$P_1 = a_1 a_2 \ldots a_m,\ P_m = (a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Formula (3) ne arată acum că, din cauza simetriei, membrul întâi al formulei (2) este de forma

$$(4)\qquad P_{m-n+1}^{\lambda_1} P_{m-n+2}^{-\lambda_2} \ldots P_m^{(-1)^{n-1}\lambda_n},$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt numere naturale. Totul revine la determinarea acestor exponenţi. Aceasta se poate face pe cale algebrică.

In (3) avem $\binom{n}{j}$ paranteze de $m - n + j$ litere, deci în (2) avem $\binom{n}{j}\binom{m}{n}$ astfel de paranteze. Pe de altă parte P_{m-n+j} are $\binom{m}{n-j}$ factori, deci

$$\lambda_j \binom{m}{n-j} = \binom{n}{j}\binom{m}{n}, \qquad \therefore\ \lambda_j = \binom{m-n+j}{j}.$$

Formula exactă (2) este deci

$$(2') \quad \begin{cases} \Pi([a_1, \ldots, a_2, \ldots, a_n], a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m) \\ \qquad = \prod_{j=1}^{n} P_{m-n+j}^{(-1)^{j-1}\binom{m-n+j}{j}}. \end{cases}$$

2. Se cunoaşte formula [1])

$$[a_1, a_2, \ldots, a_m] = \frac{P_1 P_3 \ldots}{P_2 P_4 \ldots} = \prod_{k=1}^{m} P_k^{(-1)^{k-1}}.$$

Dacă punem

$$Q_k = \Pi[a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}], \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

deducem, ca mai sus,

$$Q_k = \prod_{j=1}^{k} P_j^{(-1)^{j-1}\binom{m-j}{k-j}} \quad , \quad P_k = \prod_{j=1}^{k} Q_j^{(-1)^{j-1}\binom{m-j}{k-j}}.$$

Aceste formule de reciprocitate permit să arătăm că avem şi

$$(2'') \quad \begin{cases} \Pi[(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m] \\ \qquad = \prod_{j=1}^{n} Q_{m-n+j}^{(-1)^{j-1}\binom{m-n+j}{j}}. \end{cases}$$

E destul pentru aceasta să observăm că

$$[(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m] \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n, [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m])$$
$$= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m].$$

TIBERIU POPOVICIU.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine. Tome XXIV. No. 4. Bucureşti 1941. Un théorème de géométrie, par D. POMPEIU.

Idem. No. 5. Les fonctions indéfiniment symétriques et les équations différentielles, par D. POMPEIU.

Idem. No. 6. Sur le critère de M. POMPEIU pour l'intégrabilité par quadrature de l'équation de RICCATI, par G. G. CONSTANTINESCU. Un cas

1) Vezi G. POLYA u. G. SZEGÖ, *« Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis »*, II, pag. 121.

d'exception dans la théorie des chaines de MARKOFF, par O. ONICESCU et GH. MIHOC. Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur (III), par TIBERIU POPOVICIU. Sur un problème de balistique, par E. E. STIHI.

Idem. *Bibliographie des travaux scientifique* parus en 1940. Bucureşti 1942. (Partea matematică este redijată de D-l O. ONICESCU).

Buletinul Politecnicei din Bucureşti. Anul XII, 1941. Nr. 3 şi 4. Iulie-Decemvrie. Bucureşti 1941. Sur un théorème de M. POMPEIU, par S. GHEORGHIU. De la constante arbitraire dans les opérations d'intégration, par D. POMPEIU. Strömungsbilder für einzelne oder mehrere Brunnen, von D. PAVEL. Le problème de la Balistique extérieure, par I. LINTEŞ.

Euclides. Revista de Ciencias Exactes, Fisico-Quimicas y Naturales. Ano II, Num. 12, 1942, Madrid. Editorial. Asupra conceptului fenomenului natural, Probabilităţi totale în caractere incompatibile, de SIXTO CAMARA.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXII. Nr. 2, Aprilie 1942. Un nou sistem de coordonate: Coordonate rombice (urmare) de V. ALACI. O problemă de aplicaţii geometrice ale analizei matematice de P. SERGESCU.

Suplimentul cu exerciţii al Gazetei Matematice. Anul VIII. Nr. 7. Aprilie 1942.

C-DOR I. LINTEŞ. *Câteva noutăţi şi învăţăminte de tehnică militară din actualul război.* Comunicare făcută la Academia de Ştiinţe. (Extras din Revista Aeronauticei pe luna Martie 1942).

GH. TH. GHEORGHIU. *Curs de algebră şi trigonometrie.* Timişoara 1942. Cursul litografiat făcut de autor la Politehnica din Timişoara. 440 pag. Preţul 500 lei. Se găseşte de vânzare la autor, Şcoala Politehnică din Timişoara.

M. GHERMĂNESCU. *Sur une équation fonctionelle.* Timişoara 1942.

M. GHERMĂNESCU. Mişcarea punctului material. (Extras din *Pozitiva*). Bucureşti 1942.

M. GHERMĂNESCU. Memoriu de titluri şi lucrări. Timişoara 1942.

P. SERGESCU. *Sur l'indentité des auteurs de quelques articles mathématiques insérés dans „Le Journal des Savants" (1684—1703)*, An. Ac. Române, Memoriile Secţiunii Ştiinţifice, Seria III, t. XVII, Mem. 9, 1942.

Acesta este titlul celei mai noi publicaţii a D-lui SERGESCU, din domeniul istoriei ştiinţelor.

Perioada eroică a analizei matematice dela sfârşitul veacului al XVIII-lea este prea puţin cunoscută. Memorabilele studii de istoria matematicei ale lui P. DUHEM s'au restrâns la evul mediu şi zac în mare parte şi azi nepublicate. După el nimeni nu a încercat să continue aceste cercetări apropiindu-se de epoca modernă. Prin studiile D-Sale despre „*Journal des Savants*", D-l SERGESCU îşi propune să umple această lacună, dându-ne o imagine cât se poate de clară despre evoluţia matematicei în acea epocă. In publicaţia de faţă

se ocupă cu lucrările anonime publicate în cea mai veche revistă de bibliografie critică din lume, „*Journal des Savants*", în prima ei perioadă de apariție, cuprinsă între 1665 și 1701.

Astfel stabilește că autorul unor articole apărute în anii 1595—97 nu e altul decât însuși LEIBNIZ. O mulțime de articole apărute între 1685—1700 se datoresc lui ROLLE (1652—1719), care a atacat calculul diferențial voind să arate că metoda algebrică e cu mult mai bună. D-l SERGESCU observă: „*La renommée d'algébriste de* ROLLE *était assez dangereuse pour la diffusion du calcul différentiel en France. Il fallut tout le prestige du marquis de l'Hospital pour etrainer l'opinion scientifique vers les idées nouvelles*". În urmă ROLLE își recunoscu greșala.

O polemică interesantă avu loc în coloanele revistei între abatele de CATELAN și l'HOSPITAL, ambii identificați de D-l SERGESCU. O altă serie de articole anonime provin dela PIERRE REMOND de MONTMORT (1678—1719), iar altele dela ANTOINE PARENT (1666—1716). MARCHIZA de l'HOSPITAL arată că o demonstrație a lui LA MONTRE e falșă.

Lucrarea D-lui SERGESCU scrisă în stilul clar caracteristic D-Sale este o contribuție valoroasă la cunoașterea operelor matematicienilor menționați.

VICTOR MARIAN.

TH. ANGHELUȚĂ și P. SERGESCU. *Comemorarea iluștrilor matematicieni* EMILE PICARD *și* HENRI LEBESGUE. Timișoara, 1942.

În ziua de 4 Februarie 1942 a avut loc la Facultatea de Științe din Cluj (provizoriu la Timișoara) din partea Cercului Matematic al Societății de Științe din Cluj, comemorarea lui E. PICARD și H. LEBESGUE.

Ședința a fost deschisă de D-l prof. E. RACOVIȚĂ, președintele Societății de Științe, care a menționat că singura și cea mai frumoasă răsplată la care poate aspira un profesor este recunoștința elevilor săi.

S'a cetit apoi comunicarea despre „*Viața și opera matematică a lui* EMILE PICARD" a D-lui prof. TH. ANGHELUȚA, fost elev al marelui dispărut. D-Sa rezumă viața lui PICARD (1856—1941) evidențiind strălucitele calități de matematician ale acestui distins savant, care la 21 ani era doctor în științe și a ilustrat învățământul matematic francez timp de 47 ani. PICARD a fost fără îndoială un mare profesor. „*Cine a avut fericirea*" — spune D-l ANGHELUȚA — „*să asculte o prelegere de a lui* PICARD *nu o mai poate uita*". Lecțiunile lui aveau o formă literară desăvârșită cu o precizie și o eleganță fermecătoare; ele erau discursuri în înțelesul clasic al cuvântului. Teza pe care o trata nu era dela început, înlănțuită în ipoteze. Ideile se desvoltau liber și armonios; treptat apăreau dificultățile, învinse cu o rară măestrie, și îngrădirile necesare. Ascultătorul era astfel, condus să întrezărească el însuși putințe de noi cercetări".

Trecând la caracterizarea operii lui PICARD, autorul scrie: „*Mă voiu mărgini numai la câteva din memoriile marelui învățat, căci altfel nu este cu putință. Opera lui cuprinde mai mult de 400 lucrări. Dar chiar cu această îngrădire și totuși o analiză a acestei opere prezintă greutăți imense, căci subiectele pe care le tratează sunt foarte abstracte și din*

toate domeniile matematicii; analiză, aritmetică, geometrie, fizică matematică, mecanică şi astronomie. PICARD *este un ilustru urmaş al marilor enciclopedişti dar şi un strălucit reprezentant al matematicei pure. In ştiinţă el continuă o epocă şi totodată este precursorul unei epoci noi*". PICARD *s'a interesat şi de istoria ştiinţelor scriind şi un volum intitulat „Ştiinţa modernă şi starea sa actuală", în care se ocupă de toate ştiinţele.*

D-l ANGHELUŢA încheie interesanta comunicare menţionând relaţiile dintre celebrul matematician şi români în termenii următori: *„In ultima jumătate de veac, Şcoala matematică română s'a desvoltat sub înrâurirea covârşitoare a operei lui* PICARD. *Această înrâurire în perfectă rezonanţă cu geniul poporului român este chezăşia unei mari străluciri, într'un viitor nu îndepărtat, al matematicei române.*

Matematicienii români vor păstra în sufletele lor şi vor transmite generaţiilor de studenţi, o adâncă recunoştiinţă memoriei marelui PICARD şi Franţei eterne".

A urmat apoi comunicarea D-lui prof. P. SERGESCU despre *„Viaţa şi opera matematică a lui* HENRI LEBESGUE". După ce face un scurt istoric al desvoltării analizei matematice începând cu descoperirea calculului diferenţial, D-Sa arată rolul covârşitor al lui LEBESGUE în construirea noţiunilor metrice. In prima sa lucrare descopere suprafeţele neriglate aplicabile pe plan. D-l SERGESCU aminteşte apoi că „In 1902, LEBESGUE îşi susţine Teza, în care înlătură îngrădirile clasice ale noţiunii de integrală. Graţie operaţiei de sumabilitate, el reuşeşte să lămurească anomaliile constatate în teoria clasică a integrării. Totodată, el dovedeşte că operaţia de integrare e mai elementară decât cea de derivare ceea ce răstoarnă complet opinia filozofică preconizată timp de peste două veacuri despre calculul infinitezimal". In 1905 LEBESGUE arată existenţa mulţimilor măsurabile, care însă nu sunt măsurabile B. Mai târziu a fost preocupat de funcţiunile armonice, a studiat contururile neregulate, ale punctelor neregulate, precum şi deosebirea dintre cele două specii de probleme ale lui DIRICHLET H. El e *„unul din premergătorii teoriei moderne a aproximării funcţiunilor"*.

In ce priveşte relaţiile lui LEBESGUE cu românii, D-l SERGESCU scrie următoarele: *„Când marele nostru profesor* G. ŢIŢEICA *s'a stins în 1939, prietenii din tinereţă* H. LEBESGUE *şi* PAUL MONTEL *au continuat să-i mărturisească prietenia şi după mormânt. Incă din primăvara lui 1939 au trimis la Bucureşti două articole duioase despre profesorul român. Ele au apărut în numărul din „Natura" închinat lui* ŢIŢEICA *în Februarie 1940, la un an după moartea unuia din cei doi fondatori ai revistei*".

D-l SERGESCU, fost elev a lui LEBESGUE (1875—1941), termină astfel: *„Moare la Paris în Iulie 1941 în vârstă de abia 66 de ani, lipsind matematica universală de unul din maeştrii cei mai de seamă, iar pe cei ce au avut fericirea să-l cunoască şi să-l apropie, de unul din modelele de om cu adevărat mare, pe care le-au întâlnit"*.

Cele două comunicări au apărut ca fascicula VII *din Monografiile Matematice ale Seminarului de Matematici al Universităţii din Cluj.*

V. MARIAN.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

M. OZANAM. La perspective théorique et pratique. Paris 1769. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Su certe relazioni fra due teorie fondamentali. Pavia 1907. Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2394. *Să se găsească două pătrate perfecte de cinci cifre* N *şi* N_1, *aşa ca* N_1 *să fie răsturnatul lui* N, *iar* $\sqrt{N_1}$ *să fie răsturnatul lui* $\sqrt{N}$.

D. LĂZĂRESCU şi GH. I. DUMITRESCU.

Dacă α, β, γ, a, b, ... sunt cifre, conform enunţului trebue să avem simultan

$$\alpha\beta\gamma^2 = abcde \quad \text{şi} \quad \gamma\beta\alpha^2 = edcba$$

cu condiţia ca ambele numere $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\alpha$ să fie mai mici ca 317 căci astfel pătratele au mai mult de 5 cifre. Această condiţie atrage după sine

$$\alpha \leqslant 3 \quad \text{şi} \quad \gamma \leqslant 3 \qquad (1)$$

de unde rezultă că a şi e, care sunt terminaţii de pătrate nu pot avea decât valorile 0, 1, 4 sau 9.

Prin urmare de sau ba, terminaţii de pătrate perfecte, vor putea avea valori numai între grupele

00; 01; 04; 09; 21; 24; 29; 41; 44; 49; 61; 69; 81; 84; 89.

Vom da deci lui de, pe rând valorile acestui şir. Să luăm de exemplu $de = 21$, toate celelalte cazuri se examinează la fel; pentru cruţarea spaţiului nu le mai trecem aici, vom da numai rezultatul final.

Fie deci $de = 21$, atunci

$$\alpha\beta\gamma^2 = abc\,21 \quad \text{şi} \quad \gamma\beta\alpha^2 = 12cba.$$

Din ultimul număr extragem rădăcina pătrată şi avem

$$\begin{array}{l|l} 1 \,.\, 2c \,.\, ba & 1 \\ \hline \quad „ \quad 2 \,.\, c & 2 \,.\, 1 \end{array}.$$

Deci $\gamma = 1$ şi $\beta = 1$. Ţinând seamă de (1) rezultă că am putea avea

$$\alpha = 0,\ 1,\ 2 \text{ sau } 3.$$

Eliminăm însă din aceste valori ale lui α pe 0 şi 1 căci ele ne conduc pentru $\alpha\beta\gamma$ şi $\gamma\beta\alpha$ la soluţii banale şi evidente de numere egale de forma *mmm* sau *mnm*. Cu valorile 2 şi 3, rămase pentru α, se pot forma următoarele 2 numere $\alpha\beta\gamma$: 211 şi 311 care dau soluţii de ale problemei căci

$$211^2 = 44521 \quad \text{şi} \quad 112^2 = 12544$$

$$311^2 = 96721 \quad \text{şi} \quad 113^2 = 12769.$$

Examinăm absolut la fel pe toate celelalte valori posibile ale lui *de* şi mai găsim încă următoarele grupe de soluţii:

$100^2 = 10000$ cu $001^2 = 00001$; $130^2 = 16900$ cu $031^2 = 00961$

$200^2 = 40000$ „ $002^2 = 00004$; $201^2 = 40401$ „ $102^2 = 10404$

$210^2 = 44100$ „ $012^2 = 00144$; $221^2 = 48841$ „ $122^2 = 14884$

$300^2 = 90000$ „ $003^2 = 00009$; $301^2 = 90601$ „ $103^2 = 10609$.

Problema are în total 10 soluţii din care la 5 unul din numerele N este numai formal de 5 cifre.

G-L GH. BUICLIU.

1°. S'au primit soluţii bune în anul 1915/16 dela D-nii: V. PINTILESCU, E. PROTOPOPESCU, M. REINHORN, AL. TRIANDAFIL, P. TUDORAN. In 1916/17 dela D-l O. ORĂNESCU şi în 1920/21 dela D-l N. CIORĂNESCU.

2°. La fel se poate rezolva problema analoagă 5167, propusă la pag. 669, Vol. XLIV şi căreia nu i s'a publicat încă soluţia.

PROBLEMA 4978. *Să se găsească locurile geometrice ale vârfurilor* C *şi* D *ale patrulaterului cu suprafaţa constantă* ABCD, *în care latura* AB *este fixă, iar latura* CD *se mişcă paralel cu ea însăşi.*

D. V. STOICA.

Soluție geometrică. Fie O al patrulea vârf al paralelogramului ADCO și M mijlocul segmentului OB. Unim punctele A, M, C între ele.

Suprafața patrulaterului ABCD este suma suprafețelor triunghiurilor OAB, OBC și a paralelogramului OCDA.

Suprafața triunghiului AMC este numai suprafețelor triunghiurilor OAM, OMC și OCA, care sunt jumătăți din suprafețele triunghiurilor OAB, OBC și paralelogramului OCDA, deoarece AM și MC sunt mediane ale triunghiurilor și CA este mediană a paralelogramului. Rezultă că suprafața triunghiului AMC este jumătate din aceea a patrulaterului ABCD și că este constantă.

Potrivit enunțului, vârfurile A și B sunt fixe, iar latura CD se mișcă paralel cu ea însăși și se înțelege că are lungimea constantă, căci altfel problema ar fi nedeterminată și nu ar avea sens. Rezultă că punctul O rămâne fix, căci latura AO a paralelogramului AOCD are direcția și lungimea constante ca și latura opusă DC, cu care este egală și paralelă, iar vârful A este fix. De asemenea punctul M este fix, fiind mijlocul segmentului OB, ale cărui extremități sunt fixe.

Triunghiul AMC având suprafața constantă și vârfurile A și M fixe, locul geometric al vârfului C este o dreaptă paralelă cu mediana AM a triunghiului fix OAB, iar latura CD cu lungime constantă, mișcându-se paralel cu ea însăși, locul geometric al vârfului D este de asemenea o dreaptă paralelă cu mediana AM.

Altă soluție. Fie P al patrulea vârf al paralelogramului BDCP.

Se știe, că suprafața unui patrulater este echivalentă cu aceea a unui triunghiu, care are două laturi egale cu diagonalele și unghiul cuprins între ele egal cu unghiul diagonalelor. Rezultă că triunghiul ACP este echivalent cu patrulaterul ABCD, căci latura CA a lui este o diagonală în patrulater, latura CP este egală și paralelă cu cealaltă diagonală DB, fiind laturi opuse în paralelogramul BDCP, iar unghiul cuprins între laturile CA și CP ale triunghiului este egal cu unghiul diagonalelor CA și DB.

Când latura DC se mișcă paralel cu ea însăși, păstrează direcția și lungimea constante, iar vârful P rămâne fix, ca și vârfurile A și B. Triunghiul CAP, fiind echivalent cu patrulaterul ABCD, are suprafața constantă și cum vârfurile sale A și P sunt fixe, locul geometric al vârfului C este o dreaptă paralelă cu AP.

Dar latura DC se mişcă paralel cu ea însăşi şi rezultă că locul geometric al vârfului D este de asemenea o dreaptă paralelă cu AP.

Se vede uşor că direcţiile AM şi AP se confundă, adică punctele A, M şi P sunt colineare, căci diagonalele AP şi OB, ale paralelogramului ABPO se taie în M.

D-nii BODNĂRESCU M. HORIA (Elev clasa VIII-a, Seminarul Pedagogic „Titu Maiorescu", Bucureşti) şi POPA D. MIRCEA (Liceul Militar, Iaşi) au arătat — întâiul geometric şi al doilea analitic — că locurile căutate sunt drepte paralele, fără să arate poziţiile lor geometrice.

D. S.

PROBLEMA 5193. *Dacă la un triunghiu sferic o mediană este suplimentul jumătăţii laturii corespunzătoare, atunci şi celelalte două mediane sunt respectiv suplimentele jumătăţilor laturilor corespunzătoare; iar triunghiul sferic, care uneşte mijloacele laturilor este tridreptunghic.*

GENERAL GH. I. LITEANU.

1°. Medianele triunghiului sferic ABC sunt date de formulele cunoscute:

$$\cos m_a = \frac{\cos b + \cos c}{2\cos\frac{a}{2}}; \quad \cos m_b = \frac{\cos c + \cos a}{2\cos\frac{b}{2}}; \quad \text{etc.}\ldots$$

Conform enunţului presupunând $m_a = 180^0 - \frac{a}{2}$, avem

$$-\cos\frac{a}{2} = \frac{\cos b + \cos c}{2\cos\frac{a}{2}}, \text{ de unde } -2\cos^2\frac{a}{2} = \cos b + \cos c$$

sau $$\cos a + \cos b + \cos c = -1.$$

Această ultimă relaţie se poate scrie

$$\cos c + \cos a = -(1 + \cos b) = -2\cos^2\frac{b}{2}$$

şi prin urmare

$$\cos m b = -\cos\frac{b}{2} \qquad \therefore \quad m_b = 180^0 - \frac{b}{2}.$$

Analog se deduce $m_c = 180^0 - \frac{c}{2}$.

2°. Insemnăm $m_a = AA_1$; $mb = BB$; $m_c = CC_1$ şi considerăm triunghiul sferic AA_1C_1 în care A_1B_1 este mediană. Avem

$$\cos A_1B_1 = \frac{\cos m_a + \cos\frac{a}{2}}{2\cos\frac{b}{2}} = \frac{-\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}}{2\cos\frac{b}{2}} = 0$$

$$\therefore \quad A_1B_1 = \frac{\pi}{2}.$$

In mod analog se obţine $B_1C_1 = \frac{\pi}{2}$ şi $A_1C_1 = \frac{\pi}{2}$.

Deci triunghiul $A_1B_1C_1$ este tridreptunghic.

S'au primit soluţii foarte bune dela D-nii: IONEL I. STAMATE (Student-Cluj), MIRCEA D. POPA şi PAUL P. DRĂGHICESCU (elevi Liceul Militar, Iaşi).

G-L G. I. LIT.

PROBLEMA 5268. *In vârfurile* A, B, C, D *ale pătratului* ABCD, *de latură* a, *acţionează forţele paralele* F, 2F, 3F, 4F *de acelaşi sens; iar în punctele* E *şi* M, *aşezate respectiv pe laturile* AB *şi* CD $\left(BE = \frac{a}{4};\ CM = \lambda a\right)$ *acţionează forţele* 5F *şi* kF *paralele cu cele de mai sus, însă în sens contrar.*

Să se determine λ *şi* k *aşa fel încât punctul de aplicaţie al rezultantei să fie la intersecţia dreptei* ME *cu dreapta ce uneşte mijloacele laturilor* AD *şi* BC.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nii: C. D. EFTIMIE, TEODOR ŞERBAN (elevi ingineri, Buc.), MIRCEA C. NICULESCU (lic. „Titu Maiorescu", Buc.), MIHAI I. TREFILOV, CONST. PANTELIMON, MIRCEA D. POPA (lic. mil. Iaşi), VICTOR FLORESCU (Timişoara).

Dacă alegem axa Ox după latura AB, iar Oy după AD, atunci avem: A $(0, 0)$, B $(a, 0)$, C (a, a), D $(0, a)$, E $\left(\frac{3a}{4}, 0\right)$ şi M $(a - \lambda a, a)$. Dreapta ce uneşte mijloacele lui BC şi DA are ecuaţia $y = \frac{a}{2}$ iar dreapta ME:

$$4x - (1 - 4\lambda)y + 3a = 0.$$

Deci punctul lor comun ω va avea coordonatele

$$\left(a\frac{7-4\lambda}{8}, \frac{a}{2}\right).$$

Coordonatele centrului forţelor paralele sunt:

$$x = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{-5F\frac{3a}{4} + 2F.a + 3F.a - kFa(1-\lambda)}{F - 5F + 2F + 3F - kF + 4F}$$

$$= a\frac{5-4k(1-\lambda)}{4(5-k)}.$$

$$y = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} = \frac{3F.a - kF.a + 4F.a}{5F - kF} = a\frac{7-k}{5-k}.$$

Pentru ca acest punct să coincidă cu ω va trebui ca:

$$\frac{5-4k(1-\lambda)}{4(5-k)} = \frac{7-4\lambda}{8}; \quad \frac{7-k}{5-k} = \frac{1}{2}.$$

A doua ecuaţie ne dă $k=9$, care dus în prima dă $\lambda = \frac{17}{28}$.

D-nii EMIL MODÂLCĂ şi PAUL DRĂGHICESCU au determinat exact pe k, dar au greşit calculul lui λ. D-l CONST. G. CRUCERU a dat o soluţie anevoioasă, din cauza alegerii axelor.

PROBLEMA 5311. *Fiind dat un tetraedru* OABC *tridreptunghic în* O, *şi notând* A *unghiul triedru cu vârful în* A, *să se demonstreze relaţia*

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C + 2\sin A \sin B \sin C = 1.$$

ION C. VASILIU.

Fie: $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

notând (b, c) unghiul BAC, se are prin definiţie:

$$\sin^2A = \begin{vmatrix} 1 & \cos(b, c) & \cos(\alpha, b) \\ \cos(b, c) & 1 & \cos(\alpha, c) \\ \cos(\alpha, b) & \cos(\alpha, c) & 1 \end{vmatrix}.$$

Iar volumul tetraedrului este:

$$6V = \alpha\beta\gamma \sin O = abc \sin A = \beta ca \sin B = \gamma ab \sin C.$$

Dar: $\sin O = 1$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{\beta\gamma}{bc} \quad , \quad \sin B = \frac{\gamma\alpha}{ca} \quad , \quad \sin C = \frac{\alpha\beta}{ab}$$

$$\therefore \quad \sin A \sin B \sin C = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2}.$$

Apoi:

$$\Sigma \sin^2 A = \Sigma \frac{\beta^2\gamma^2}{b^2c^2} = \Sigma \frac{a^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2} = \frac{\Sigma (\beta^2 + \gamma^2)\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2}$$

căci: $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad , \quad b^2 = \gamma^2 + \alpha^2 \quad , \quad c^2 = \alpha^2 + \beta^2.$

De unde:

$$\Sigma \sin^2 A = \frac{(\beta^2 + \gamma^2)(\gamma^2 + \alpha^2)(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2}$$

$$= \frac{a^2b^2c^2 - 2\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2} = 1 - 2\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{a^2b^2c^2} = 1 - 2 \sin A \sin B \sin C.$$

Relaţia e astfel demonstrată.

A rezolvat foarte bine problema D-l GHEORGHIU E. OCTAVIAN (student), verificând relaţia propusă. D-l DRĂGHICESCU P. PAUL (Liceul Militar Iaşi), consideră ca unghiu triedru A suma unghiurilor feţelor acestui triedru şi demonstrează că relaţia propusă e valabilă în acest caz.

I. C. V.

PROBLEMA 5393. *Să se arate că dacă* N *este un număr întreg, terminat cu o cifră semnificativă, atunci numărul*

$$A = N^3 + 2N^2 - N + 1$$

nu poate fi patrat perfect.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-l NECULAI N. POPA (liceul militar Iaşi). Ultima cifră a unui patrat perfect poate fi 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Să vedem care este ultima cifră a numărului A, presupunând că N se termină pe rând cu 1, 2,... 9. Facem tabloul

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1
N^3	1	8	7	4	5	6	3	2	9
A	3	5	3	3	1	3	5	3	3

Din acest tablou se vede că A n'ar putea fi patrat perfect decât atunci când N se termină cu 2, 5 sau 7. Să examinăm pe rând aceste cazuri.

a) N *se termină cu 2,* deci $N = 10a + 2$. Atunci

$$A = (10a+2)^3 + 2(10a+2)^2 - (10a+2) + 1$$
$$= 1000a^3 + 800a^2 + 10(5a+1) + 5.$$

Cifra zecilor e dată de $5a+1$, ori $5a$ nu se poate termina decât în 0 sau 5, deci cifra zecilor va fi 1 sau 6. Insă dacă ultima cifră e 5, un patrat nu se poate termina decât în 25. *Deci* A *nu e patrat.*

b) N *se termină cu 5,* deci $N = 10a + 5$. Avem:

$$A = (10a+5)^3 + 2(10a+5)^2 - (10a+5) + 1$$
$$= 1000a^3 + 1700a^2 + 100(9a+1) + 10(4a+7) + 1.$$

Deoarece A se termină cu 1, trebue ca ultimele două cifre să fie 01, 21, 41, 61, 81 (terminaţii de patrate). Dar cifra zecilor lui A e de $(4a+7)$ care e un număr fără soţ, deci nici în acest caz A *nu e patrat.*

c) N *se termină cu 7,* adică $N = 10a + 7$. Avem:

$$A = 1000a^3 + \ldots + 10(4a+3) + 5.$$

Ca şi în cazul (*a*) cifra zecilor trebue să fie 2, ori această cifră e dată de $4a+3$ care e număr fără soţ. A *nu poate fi patrat*

S'a mai primit o soluţie analoagă dela D-l CONST. STAICU (clasa V-a liceul militar Câmpulung) şi o soluţie prea lungă dela D-l PAUL DRĂGHICESCU (liceul militar Iaşi).

PROBLEMA 5403. 1°. *Ce curbă descrie afixul unei cantităţi complexe variabile, ştiind că dreapta ce uneşte acest afix cu afixul unei cantităţi date, trece prin afixul câtului lor?*

2°. *Aceeaşi problemă pentru afixul produsului.*

3°. *Să se explice rezultatul.*

CPT. MIHAIL I. FOCŞENEANU.

Soluţia I-a. 1°. Fie z_1, z şi z_2 cantităţile complexe, în care z_2 este câtul lui z prin z_1. Pentru ca z_2 să aibă afixul pe dreapta afixelor lui z_1 şi z, trebue să avem:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda \quad (\lambda \text{ real}).$$

Cum $z_2 = \frac{z}{z_1}$, înlocuind găsim:

$$\frac{z_1(z - z_1)}{z - z_1^2} = \lambda$$

din care scoatem

$$z\frac{z_1 - \lambda}{1 - \lambda} = z_1^2.$$

Dacă notăm modulele cantităţilor z, $\frac{z_1 - \lambda}{1 - \lambda}$, z_1 prin ρ, ρ_λ şi ρ_1 avem $\rho \cdot \rho_\lambda = \rho_1^2 = c^t$.

Relaţia aceasta ne arată că cele 2 cantităţi z şi $\frac{z_1 - \lambda}{1 - \lambda}$ sunt inverse.

Locul geometric al lui z este inversul locului lui $\frac{z_1 - \lambda}{1 - \lambda}$.

Cum acesta din urmă descrie *o dreaptă, care trece prin afixul lui* z_1, rezultă că *afixul lui* z *va descrie un cerc, trecând prin origine şi afixul lui* z_1.

2°. Dacă scriem că $z_2 = z \times z_1$ rezultă:

$$z \times \frac{1 - \lambda z_1}{1 - \lambda} = z_1.$$

Notând r, r_λ şi r_1 modulele cantităţilor z, $\frac{1 - \lambda z_1}{1 - \lambda}$, z_1 avem

$$r \times r_\lambda = r_1 = c^t$$

ceea ce arată că afixele lui z şi $\frac{1-\lambda z_1}{1-\lambda}$ se obţin printr'o inversiune de pol origine şi putere egală cu rădăcina pătrată a puterii dela 1°.

Cum afixul lui $\frac{1-\lambda z_1}{1-\lambda}$ descrie aceeaşi dreaptă ca la punctul 1°, rezultă că *afixul lui* z *va descrie tot un cerc* ce trece prin origine şi afixul lui z_1.

3°. *Justificare geometrică.* Fie A, M şi M' afixele cantităţilor z_1, z şi z_2 şi ω_1, ω şi ω_2 argumentele lor.

a) Avem relaţia de mai jos, pentru $z_2 = \frac{z}{z_1}$

$$\sphericalangle MOM' = \arg. z - \arg. z_2 = \omega - (\omega - \omega_1) = \omega_1$$

şi deci $\sphericalangle MOM' = c^t$.

Modulele lui z şi z_2 sunt de asemenea în raport constant

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \rho_1.$$

Triunghiul MOM' rămâne asemenea cu el însuşi mereu. Unghiul OMA este constant şi deci M *descrie un cerc trecând prin origine şi* A.

b) Pentru cazul $z_2 = z \times z_1$ avem:

$$\sphericalangle MOM' = \arg. z_2 - \arg. z = \omega + \omega_1 - \omega = \omega_1 = c^t.$$

Raportul modulelor este constant $\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} = \frac{1}{\rho_1}$.

Triunghiul OMM' rămânând asemenea cu el însuşi, unghiul M este constant şi deci M *descrie de asemenea un cerc care trece prin* O *şi* A.

Soluţia II-a dată de D-nii: DRĂGHICESCU PAUL şi RADOSLAV ION.

1°. Dacă notăm M (x, y), A (a, b) afixele cantităţilor z şi z_1, afixul câtului $\frac{z}{z_1}$ va fi M' $\left(\frac{ax+by}{a^2+b^2}, \frac{ay-bx}{a^2+b^2}\right)$.

Condiția ca M, A și M′ să fie coliniare este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ ax+by & ay-bx & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Locul lui M va fi deci:

$$x^2+y^2+(a^2+b^2-2a)\,x+\frac{a^2-b^2-a^3-ab^2}{b}\,y=0 \quad (b\neq 0)$$

un cerc care trece prin origine și A (a, b).

2°. Dacă M′ este afixul produsului $z \times z_1$, va fi

$$M'\,(ax-by,\ bx+ay).$$

Condiția de colinearitate este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ ax-by & ay+bx & 1 \end{vmatrix} = x^2+y^2-x-\frac{a^2+b^2-a}{b}\,y=0 \quad (b\neq 0).$$

Locul lui M *este și în acest caz tot un cerc care trece prin* O *și* A.

Observațiuni. D-l Paul Drăghicescu observă că și M′ descrie în cele două cazuri ale problemei tot 2 cercuri, fără a preciza.

Observând că triunghiul OMM′ rămâne asemenea cu el însuși și vârful M descrie un cerc, rezultă că și al doilea vârf mobil descrie tot un cerc.

Acest cerc este ușor de văzut că trece de asemenea prin O și A.

Cpt. Mihail I. Focșeneanu.

PROBLEMA 5409. *Dacă* $I_m(n)$, $S_m(n)$, $P_m(n)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* n *din șirul natural al primelor* m *numere, suma și produsul lor, atunci să se arate că:*

$$I_{50}(30) - I_{20}(30) = 8 \ ; \ S_{50}(30) - S_{20}(30) = 300$$

$$P_{50}(30) : P_{20}(30) = 3106243534261.$$

(Enunț rectificat).

Cpt. C-dor I. Linteș.

Soluția I-a dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (Lic. Militar Iași).

Numerele prime cu *30* din șirul natural al primelor *50* numere sunt:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49.

Numerele prime cu *30* din șirul natural al primelor *20* numere sunt:

1, 7, 11, 13, 17, 19.

Vom avea deci:

$$I_{50}(30) - I_{20}(30) = 14 - 6 = 8$$

$$S_{50}(30) - S_{20}(30) = 23 + 29 + \ldots + 49 = 300$$

$$P_{50}(30) : P_{20}(30) = 23 \cdot 29 \ldots 49 = 3106243534261.$$

Soluția II-a, dată de D-l M. F. VĂDUVA.

Folosind formulele:

$$F_p(N) = p - \Sigma E\left(\frac{p}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{p}{ab}\right) - \ldots$$

$$S_p(N) = \frac{1}{2} p(p+1) - \Sigma \frac{a}{2} E\left(\frac{p}{a}\right)\left[1 + E\frac{p}{a}\right] + \ldots$$

$$P_p(N) = \frac{p!\ \Pi E\left(\frac{p}{ab}\right)! \ldots\ \Pi (ab)^{E\left(\frac{p}{ab}\right)} \ldots}{\Pi E\left(\frac{p}{a}\right)!\ \Pi\left(\frac{p}{abc}\right)! \ldots \Pi (a)^{E\left(\frac{p}{a}\right)} \ldots\ \Pi (abc)^{E\left(\frac{p}{abc}\right)} \ldots}$$

dat în G. M., XLI, No. 5, avem:

$$I_{50}(30) = 50 - 25 - 16 - 10 + 8 + 5 + 3 - 1 = 14$$

$$I_{20}(30) = 20 - 10 - 6 - 4 + 3 + 2 + 1 = 6.$$

Deci:

$$I_{50}(30) - I_{20}(30) = 8$$

$$S_{50}(30) = 25 \cdot 51 - 25 \cdot 26 - 24 \cdot 17 - 25 \cdot 11 + 24 \cdot 9 + 25 \cdot 6 + 90 - 30 = 368$$

$$S_{20}(30) = 10 \cdot 21 - 10 \cdot 11 - 9 \cdot 7 - 10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 15 = 68.$$

Deci:

$$S_{50}(30) - S_{20}(30) = 300.$$

Apoi:

$$P_{50}(30) = \frac{50!\ 8!\ 5!\ 3!\ 6^8 . 10^5 . 15^3}{25!\ 16!\ 10!\ 2^{25} . 3^{16} . 5^{10} . 30}$$

$$P_{20}(30) = \frac{20!\ 3!\ 6^3 . 10^2 . 15}{10!\ 6!\ 4!\ 2^{10} . 3^6 . 5^4}.$$

Deci:

$$P_{50}(30) : P_{20}(30) = 23 . 29 . 31 . 37 . 41 . 43 . 47 . 49$$
$$= 3 . 106 . 243 . 534 . 261.$$

Soluția III-a. Ținând seamă de formulele din *G. M., XLV,* pag. 20 și de „Nota matematică" din *G. M., XLVI,* pag. 75 avem:

$$I_{x \to y}(n) = I_y(n) - I_x(n)$$
$$S_{x \to y}(n) = S_y(n) - S_x(n)$$
$$P_{x \to y}(n) = P_y(n) : P_x(n)$$

$$P_{50}(30) = \frac{50!\ 8!\ 5!\ 3!\ 6^8 . 10^5 . 15^3}{25!\ 16!\ 10!\ 2^{25} . 3^{16} . 5^{10} . 30}$$

$$P_{20}(30) = \frac{20!\ 3!\ 6^3 . 10^2 . 15}{10!\ 6!\ 4!\ 2^{10} . 3^6 . 5^4}.$$

Deci:

$$P_{50}(30) : P_{20}(30) = 23 . 29 \ldots 49 = 3106243534261.$$

Observațiuni. 1. Au căutat să rezolve problema Nr. 5409 aplicând formulele din *„Extinderi în legătură cu indicatorii"* publicat în *G. M., XLV,* Nr. 1, D-nii: C. GH. CRUCERU și A. ANDREI, fără să țină însă seamă de rectificările aduse ulterior acelui articol, prin *„Nota matematică"* Nr. 9 din *G. M., XLVI.*

2. La soluția II-a rezolvitorul interpretând diferit formulele produselor, a obținut un rezultat numeric diferit de cel dat mai sus,

I. L.

PROBLEMA 5439. $\varphi(n)$ *fiind numărul numerelor prime cu* n *și mai mici ca* n, *să se arate că avem*

$$\varphi(ab) \leqq \sqrt{\varphi(a^2)\,\varphi(b^2)},$$

oricare ar fi numerele naturale a *și* b. *Cum trebue să fie* a *și* b *pentru ca semnul* $=$ *să fie valabil?*

TIBERIU POPOVICIU.

Soluția. Fie p_i factorii primi comuni lui a și b, q_j factorii primi ai lui a cari nu aparțin lui b și r_l factorii primi ai lui b cari nu aparțin lui a. Avem

$$\varphi(ab) = ab \prod_i \frac{p_i - 1}{p_i} \prod_j \frac{q_j - 1}{q_j} \prod_l \frac{r_l - 1}{r_l},$$

$$\varphi(a^2) = a^2 \prod_i \frac{p_i - 1}{p_i} \prod_j \frac{q_j - 1}{q_j},$$

$$\varphi(b^2) = b^2 \prod_i \frac{p_i - 1}{p_i} \prod_l \frac{r_l - 1}{r_l}.$$

Produsele $\prod_i$, $\prod_j$ respectiv $\prod_l$ sunt înlocuite cu 1 dacă nu există factori primi p_i, q_j respectiv r_l.

Dacă ridicăm la pătrat inegalitatea din enunț obținem

$$\prod_j \frac{q_l - 1}{q_j} \prod_l \frac{r_l - 1}{r_l} \leqq 1$$

care este o inegalitate evidentă. Se vede de asemenea că pentru ca să avem egalitate trebue să nu existe nici factori primi q_j și nici factori primi r_l. Condiția necesară și suficientă ca să avem

$$\varphi(ab) = \sqrt{\varphi(a^2)\,\varphi(b^2)}$$

este deci ca a și b să aibă aceeași factori primi.

A rezolvat foarte bine problema D-l POPESCU GR. MARIN (clasa VII-a R., Liceul I. C. Brătianu, Pitești). O bună soluție a trimes D-l PETRESCU IULIAN (Liceul Gh. Lazăr, București).

Menționăm încă o soluție incompletă trimisă de D-l ION C. DIMITRIU (Șc. Politehnică, București). S'au mai primit 5 soluții inexacte.

Observări. 1°. Se știe că avem inegalitatea

$$\varphi(ab) \geqq \varphi(a)\,\varphi(b),$$

unde egalitatea are loc numai dacă a și b sunt prime între ele.

2°. Țin să mai adaog că problema 5439 a fost inspirată din nota 12 Vol. XLVI, p. 142 unde D-l CPT. I. LINTEȘ arată că avem

$$\sigma_0(ab) \leqq \sigma_0(a)\,\sigma_0(b), \tag{1}$$

$\sigma_0(n)$ fiind numărul divizorilor lui n. Egalitatea în (1) este adevărată numai dacă a și b sunt prime între ele. Semnalăm și inegalitatea

$$\sigma_0(ab) \geqq \sqrt{\sigma_0(a^2)\,\sigma_0(b^2)}$$

în care egalitatea are loc numai dacă $a = b$.

Mai general dacă $\sigma_k(n)$ este suma puterilor a k^a a divizorilor lui n avem

$$\sigma_k(a)\,\sigma_k(b) \geq \sigma_k(ab) \geq \sqrt{\sigma_k(a^2)\,\sigma_k(b^2)}$$

unde prima egalitate are loc numai dacă a şi b sunt prime între ele, iar a doua numai dacă $a = b$.

T. P.

PROBLEMA 5511. *Unei bare omogene* AB, *de lungime* l, *mobilă într'un plan vertical în jurul centrului său* O, *i se imprimă iuţeala unghiulară* ω_0.

Ajungând în poziţie verticală, bara se rupe într'un punct M, $\overline{AM} = a$ *şi se desprinde în acelaşi moment şi din articulaţia* O.

Să se studieze mişcările ulterioare ale celor două bucăţi din bară $\overline{AM}$ *şi* $\overline{BM}$ *precum şi a centrului lor de greutate.*

Rezistenţa aerului şi frecările se vor neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluţie dată de D-nii: EMIL MODÂLCĂ şi C. D. EFTIMIE (Şcoala Politehnică din Bucureşti).

A. **Studiul mişcării barei** AB **înainte de rupere.**

Momentul forţelor ce acţionează bara şi anume greutatea sa şi reacţiunea din O în raport cu punctul de rotaţie fiind *nul în tot timpul mişcării,* bara se va roti cu *iuţeala constantă* ω_0 în jurul lui O.

B. **Studiul mişcării porţiunii** AM.

Să alegem drept axe de coordonate Ox orizontală, Oy verticală descendentă şi să notăm cu ρ densitatea liniară a materialului din care este confecţionată bara.

In *mişcarea centrului de greutate* C al piesei AM avem:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = \rho a \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad ; \quad m_1 \frac{d^2y}{dt^2} = \rho a \frac{d^2y}{dt^2} = \rho a g.$$

De unde, integrând odată şi ţinând seama că la momentul iniţial iuţeala lui C are componentele:

$$v_{x_0} = \frac{\omega_0 (l - a)}{2} \quad ; \quad v_{y_0} = 0$$

obținem:

$$\frac{dx}{dt} = \text{const.} = v_x = v_{x_0} = \frac{\omega_0 (l - a)}{2}$$

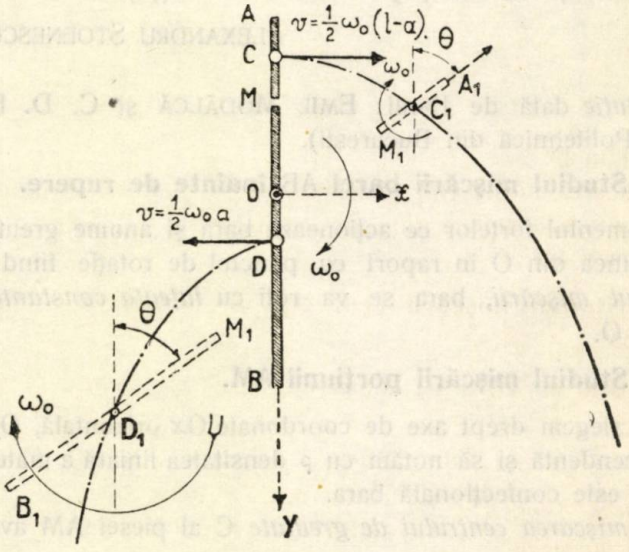
$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_{y_0} + gt = gt.$$

Intregând din nou și ținând seama că la momentul inițial centrul de greutate C are coordonatele:

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = -\frac{l - a}{2}$$

obținem:

$$x_0 = \frac{\omega_0 (l - a)}{2} . t \quad ; \quad y = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{l - a}{2} .$$



Eliminând timpul t între aceste ecuații obținem traiectoria:

$$y = \frac{2g}{\omega_0^2 (l - a)^2} . x^2 - \frac{l - a}{2} .$$

Rezultă că centrul de greutate C descrie în căderea sa o parabolă cu vârful în C.

In *mişcarea în jurul centrului de greutate* C al piesei AM avem:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\frac{d\omega}{dt} = 0$$

I fiind momentul de inerţie polar al barei în raport cu C.

Rezultă:

$$\omega = \text{const.} = \omega_0 \qquad \theta = \omega_0 t.$$

Mişcarea piesei AM în jurul lui C este deci o *mişcare de rotaţie uniformă* cu iuţeala unghiulară constantă ω_0.

C. **Studiul mişcării porţiunii** BM.

Se face absolut analog cazului piesei AM. Notând cu D centrul de greutate al acestei piese, se obţine pentru mişcarea acestui punct parabola:

$$x = -\frac{\omega_0 a}{2} \cdot t \quad ; \quad y = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{a}{2}$$

$$y = \frac{2g}{a^2 \omega_0^2} x^2 + \frac{a}{2}$$

cu vârful în D.

Mişcarea piesei BM în BM în jurul lui D este tot o *mişcare de rotaţie uniformă* cu iuţeala unghiulară constantă ω_0 ca şi în cazul piesei AM.

D. **Studiul mişcării centrului de greutate al pieselor** AM **şi** BM.

Notând cu x_G şi y_G coordonatele acestui centru de greutate avem:

$$x_G = \frac{m_C x_C + m_D x_D}{m_C + m_D} = \frac{\rho a \frac{\omega_0 (l-a)}{2} t - \rho (l-a) \frac{\omega_0 a}{2} t}{\rho a + \rho (l-a)}$$

$$x_G = 0$$

$$y_G = \frac{m_C y_C + m_D y_D}{m_C + m_D} = \frac{\rho a \left(\frac{1}{2} g t_2 - \frac{l-a}{2} \right) + \rho (l-a) \left(\frac{1}{2} g t^2 + \frac{a}{2} \right)}{\rho a + \rho (l-a)}$$

$$y_G = \frac{1}{2} g t^2.$$

Rezultă că centrul de greutate cade pe verticala lui O, ca şi cum bara întreagă s'ar desprinde din O *fără să se rupă.*

Se verifică astfel o importantă teoremă a Mecanicei: *prin nicio forţă internă, prin nicio mişcare din interiorul unui sistem nu se poate modifica mişcarea centrului de greutate al sistemului considerat.*

In cazul problemei de mai sus efortul intern se produce în M prin ruperea pieselor AM şi BM.

Observaţie. Piesele AM şi BM în căderea lor fac *la fiecare moment unghiuri egale cu verticala.*

Astfel la timpul $t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0}$ *ambele piese sunt orizontale;* la timpul $t_2 = \frac{\pi}{\omega_0}$ *ambele piese sunt verticale.*

AL. ST.

PROBLEMA 5604. *Care sunt fracţiile subunitare cu numărătorii sub 1000, care nu-şi schimbă valoarea stergând dela numărător şi de la numitor ultima cifră dela dreapta?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-ra LYDIA M. TUDORAN (elevă cl. VII-a, Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu", Bucureşti).

Termenii fracţiilor căutate sunt numere de trei sau două cifre, căci dacă ar fi de o singură cifră fracţia ar dispare prin ştergerea acelei cifre. Avem de considerat deci trei cazuri:

I. *Fracţia are numărătorul şi numitorul de câte trei cifre.* Avem în acest caz:

$$abc/def = ab/de.$$

Care ne dă:

$$(10a + b)/(10d + e) = c/f, \qquad c < f.$$

Dacă $c = 0$, putem lua $f = 0$, iar pe celelalte cifre aşa ca $(10a + b) < (10d + e)$. Minimul lui $(10a + b)$ este 10 şi maximul lui $(10d + e)$ este 99. Avem deci $89 + 88 + \ldots + 1 = \frac{1}{2}(89 + 1) \times 89 = 4005$ soluţii. Dacă $f = 1, 2, \ldots 9$ atunci trebue luat $(10a + b) = 0$ şi avem fracţii formale de tipul $(000/def)$ în număr de 900. Deci încă 900 de soluţii formale.

Dacă $c = 1$, putem lua $f = 1 - 9$. Pentru $f = 2$, avem $(10a + b)/(10d + e) = c/f = 1/2$. Minimul lui $(10a + b)$ este 10 şi maximul lui $(10d + e)$ este 98. Deci avem 40 de soluţii. In acelaşi mod se examinează cazurile $f = 3, 4, \ldots 9$.

Se trece apoi la cazurile $c = 3, 4, 5, \ldots 8$. Nu putem lua $c = 9$ căci $(c/f) < 1$. Rezultatul cercetărilor acestora sunt trecute în alăturatul tablou:

c	f										Soluţii
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	4 005 900	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4 005 bune 900 formale
1	—	—	40	24	15	10	7	4	3	1	104
2	—	—	—	29	40	15	24	10	15	7	140
3	—	—	—	—	21	16	40	11	9	24	121
4	—	—	—	—	—	17	29	12	40	9	107
5	—	—	—	—	—	—	15	13	11	10	49
6	—	—	—	—	—	—	—	13	21	29	63
7	—	—	—	—	—	—	—	—	11	10	21
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	10
											4620 Total bune

II. *Fracţia are numărătorul de două cifre şi numitorul de trei cifre.*

Avem în acest caz:

$$ab/def = a/de,$$

care se reduce la:

$$a/(10d + e) = b/f, \qquad b < f.$$

Dacă $b = 0$ putem lua $f = 0$ şi atunci a şi $(10d + e)$ pot fi oricare, cu condiţia $a < (10d + e)$, care este *a priori* îndeplinită, din moment ce d nu este nul, căci dacă $d = 0$, cădem în cazul III.

Numitorul $(10d + e)$ poate fi $10, 11, \ldots, 99$ iar $a = 0, 1, \ldots, 9$. Pentru $a = 0$ avem soluţii formale $00/def$ în număr de 90. Altfel avem $90 \times 9 = 810$ soluţii bune. Dacă $f = 1$ avem soluţii formale de tipul $00/de1$ în număr de 90 şi la fel pentru alte valori ale lui f. Deci în acest caz găsim 810 soluţii bune şi 900 soluţii formale.

Pentru $b = 1$ dăm lui f valorile 2, 3, ..., 9.

Procedăm la fel pentru $b = 2, 3, 4$. Pentru $b = 5, 6, 7, 8$ avem $f = 6, 7, 8, 9$ şi fracţia $a/(10d + e)$ nu mai poate avea numărătorul de o cifră şi numitorul de două cifre. Pentru $b = 9$ nu avem soluţie, căci f nu poate fi mai mare ca 9.

Rezultatul cercetărilor sunt trecute în alăturatul tablou:

b	f										Soluţii
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	810 90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	810 bune 900 formale
1	—	—	5	6	7	8	8	8	8	8	58 bune
2	—	—	—	1	5	3	6	3	7	3	28 „
3	—	—	—	—	1	2	5	2	2	6	18 „
4	—	—	—	—	—	1	1	1	5	1	9 „
											923 bune 900 formale

III. *Fracţia are ambii termeni de câte două cifre.*

In acest caz avem:

$$ab/de = a/d,$$

care se reduce la $a/d = b/e$. Dacă $a = 0$ atunci şi $b = 0$ iar d şi e pot fi oricare din numerele 0 — 9. Deci se poate avea valorile 00, 01, 02, , 99 în număr de 100 care dau loc la soluţii formale.

O serie de soluţii se obţine luând fracţii de forma aa/dd cu $a < d$, care sunt în număr de $8 + 7 + 6 + \ldots + 1 = 36$.

In fine alte soluţii se obţin luând a şi b aşa ca să facă o proporţie cu d şi e şi alăturând termenii lor, ca de exemplu $2/3 = 6/9$ de unde soluţia 26/39. Aceste soluţii sunt următoarele:

12/14, 13/26, 14/28, 12/36, 13/39, 12/48, 24/36, 26/39, 24/48, 36/48.

Avem aci 10 soluţii.

Dacă $b = e = 0$ iar a şi d oricare, numerele $(10a + b)$ şi $(10d + e)$ pot fi 10, 20, ... 90 care luate două câte două dau 36 soluţii.

Deci în cazul III avem $36 + 10 + 36 = 82$ soluţii bune, pe lângă cele 100 formale.

Problema admite în total $4\,620 + 923 + 82 = 5\,625$ soluţii bune şi $900 + 900 + 100 = 1\,900$ soluţii formale.

In aceste soluţii sunt cuprinse şi soluţiile problemei 5 557, care sunt mai numeroase decât s'a arătat la pagina 290.

D-l D. M. COTARIU a dat 5 386 soluţii.

EXERCIŢII

16. Să se rezolve ecuaţia

$$2\sin x - \cos 3x + \cos 5x = 0.$$

I. DEAC.

R. Putem scrie: $2\sin x - \cos(4x - x) + \cos(4x + x) = 0$; desvoltând şi făcând reducerile se ajunge la $\sin x(1 - \sin 4x) = 0$. De unde $x = k\pi$ şi $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$.

17. Să se deducă relaţia

$$r_a bc\cos A + r_b ca\cos B + r_c ab\cos C = r[5p^2 - (4R + r)^2].$$

M. VELEA.

R. Ne servim de relaţia $\cos A = \frac{r_b r_c - r r_a}{bc}$ şi analoagele ei deduse din:

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{s^2}{bc}\cdot\frac{r_a}{r_a r_b r_c} = \frac{r r_a}{bc};$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc} = \frac{sp}{bcr_a} = \frac{r_b r_c}{bc}$$

şi analoagele lor. Partea intâia a enunţului devine

$$\Sigma r_a bc\cos A = 3r_a r_b r_c - r\Sigma r_a^2$$

şi ţinând seama că

$$r_a r_b r_c = p^2 r,$$

iar

$$\Sigma r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2,$$

prin înlocuire se ajunge la relaţia din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

2647 [1]). Se dau în plan cercurile O_1 şi O_2. Fie O un cerc care taie pe O_1 după un diametru AB şi este tăiat de O_2 după un diametru CD. Se cere să se găsească locul geometric al centrului O şi înfăşurătoarea diametrului CD.

GH. BASACOV.

5642. Să se înmulţească două numere aşa ca la factori şi la produs să se găsească toate cifrele neperechi, câte o singură dată fiecare în total.

ION IONESCU.

5643. Cu cifrele 1, 4, 6, 8, 9 să se formeze un pătrat de opt cifre de forma *abcdbeba.*

A. GLODEN.

5644. Să se construiască triunghiul ABC căruia i se cunoaşte lungimea bisectoarei AA′ şi a segmentelor BA′, CA′, determinate de această bisectoare pe latura BC.

N. GAIU.

5645. Să se arate că în orice poligon regulat, avem relaţiile

$$\left(\frac{L_n^2}{L_n^1}\right)^2 - \frac{L_n^3}{L_n^1} = 1$$

$$\frac{L_n^3}{L_n^1} - \frac{L_n^4}{L_n^2} = 1.$$

2°. Cu ajutorul acestor relaţii, să se deducă expresiile laturilor L_8^1, L_{12}^1, L_{16}^1, L_{24}^1, cunoscând raza R a cercului circumscris poligonului respectiv.

3°. Ştiind că într'un nonecagon regulat avem relaţia

$$\left(\frac{L_9^2}{L_9^1}\right)^2 = 2 \cdot \frac{L_9^4}{L_9^2} + 3 \cdot \left(\frac{L_9^1}{L_9^3}\right)^2,$$

să se deducă din cele trei relaţii de mai sus expresia lui L_9^1, sub forma ei cea mai simplă.

C. MIHU.

---

1) Problema 2647 propusă la pag. 143, Vol. XXIV, se anulează şi se înlocueşte cu prezenta.

5646. Fie $\overline{AB}$ un diametru fix al cercului (O) şi E un punct mobil pe AB. Se duce tangenta $\overline{AT}$ la cercul descris pe coarda CD, perpendiculară în E pe AB, ca diametru şi se proiectează T în F pe AB. Se cere:

1°. Locul geometric al punctului T.

2°. Maximul suprafeţei trapezului CEFT.

G-L G. BUICLIU.

5647. Se dau punctele fixe A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 care sunt centrele de asemănare ale sferelor variabile S_1, S_2, S_3, S_4 tangente două câte două.

Să se găsească locul geometric al centrelor celor două sfere tangente la sferele S_1, S_2, S_3, S_4 când aceste sfere variază.

V. THÉBAULT.

5648. Să se arate că între elementele unui triunghiu oarecare are loc relaţia:

$$\sum \frac{(a^2+b^2)\operatorname{tg}(A-B)\operatorname{tg}C}{(a^2-b^2)[1+\sec(A-B)\sec C]}=3.$$

EUGEN WEGENER.

5649. Să se calculeze expresia

$$E\equiv\frac{\sqrt[4]{1+a+2\sqrt{a}}-\sqrt[4]{1+a-2\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{1+a+2\sqrt{a}}+\sqrt[4]{1+a-2\sqrt{a}}}.$$

COMANDOR GR. ZAPAN.

5650. Să se studieze seria cu termenul general

$$u_n=\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+\ldots+\frac{a^n}{n}\right).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

5651. Se consideră două triunghiuri $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$, în acelaşi plan. Fie S_a şi S_b suprafeţele acestor triunghiuri. Punem:

$$a^i_{\alpha\beta} = (\overline{A_iB^2_\alpha} - \overline{A_iB^2_\beta} - \overline{A_jB^2_\alpha} + \overline{A_jB^2_\beta})\,(\overline{A_iB^2_\alpha} - \overline{A_iB^2_\beta} - \overline{A_kB^2_\alpha} + \overline{A_kB^2_\beta})$$

$$b^i_{\alpha\beta} = (\overline{B_iA^2_\alpha} - \overline{B_iA^2_\beta} - \overline{B_jA^2_\alpha} + \overline{B_jA^2_\beta})\,(\overline{B_iA^2_\alpha} - \overline{B_iA^2_\beta} - \overline{B_kA^2_\alpha} + \overline{B_kA^2_\beta})$$

$$p = -16S_a^2\ ,\quad q = -16S_b^2. \qquad (i,\ j,\ k,\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$$

Să se arate că avem:

$$\begin{vmatrix} a^1_{2,3} & a^2_{2,3} & a^3_{2,3} & p & 0 & 0 \\ a^1_{3,1} & a^2_{3,1} & a^3_{3,1} & 0 & p & 0 \\ a^1_{1,2} & a^2_{1,2} & a^3_{1,2} & 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 & b^1_{2,3} & b^2_{2,3} & b^3_{2,3} \\ 0 & q & 0 & b^1_{3,1} & b^2_{3,1} & b^3_{3,1} \\ 0 & 0 & q & b^1_{1,2} & b^2_{1,2} & b^3_{1,2} \end{vmatrix} = 0.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

5652. Să se demonstreze că, dacă

$$B'C - BC' = AC^2,$$

ecuaţia lui RICATTI $\quad y' = Ay^2 + By + C$

este integrabilă şi să i se găsească integrala generală.

(Accentul înseamnă derivare).

M. GHERMĂNESCU.

5653. O mărgea, asimilabilă unui punct material de greutate P, lunecă în lungul unui fir inextensibil, de lungime $2l$, de greutate neglijabilă, legat cu capetele sale în punctele A şi B situate pe o orizontală $(\overline{AB} = 2a)$. In poziţie iniţială mărgeaua este lăsată liber în M_0 pe prelungirea lui $\overline{AB}$, iar firul AM_0B este întins. Să se determine:

a) *Iuţeala maximă* a mărgelei în mişcarea sa de-a-lungul firului.

b) *Acceleraţia mărgelei* şi *tensiunea dinamică* în fir, când mărgeaua *trece* prin poziţia sa de echilibru static.

c) *Condiţia* ca *tensiunea dinamică* să fie de două ori mai mare decât *tensiunea statică* pentru poziţia de echilibru static.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. Numărul primei probleme propuse la pag. 445, Vol. XLVI, este 5347 iar *nu* 5437.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andreescu Mihai (5601); *Andrei Gh. Aurel* (5523, 93, 626); *Brighiu Corneliu* (5610); *Cotariu D. M.* (5599); *Damian V. Corneliu* (5626); *Deac C. C.* (5530, 95); *Drăghicescu P. P.* (5276, 92, 491, 92, 523, 77, 93, 94, 95, 618, 19, 24, 26, N, P); *Enăchescu Gr. I.* (5637); *Ganea Nic.* (5626); *Gheorghiu E. Oct.* (5561, 610, 18, 19, 32, 37, 38, 41); *Ghiţă M. V.* (5447); *Gloden A.* (N); *Guţu Const.* (5626); *Iacob E.* (5632, P); *Iliescu C. C.* (5562, 614); *Jurist Gh. Vl.* (5614, 32, 37); *Mihăilescu C. C.* (5593, P); *Pitiş L. N.* (5447); *Păunescu I.* (5593); *Pleşu Lucian* (5626); *Popa N. N.* (5572, 618); *Popescu Gh. A.* (5632); *Popescu I. Ad.* (5587, 602, 26, 38); *Purica I.* (5614); *Roşu Nic.* (5619); *Seni Cl.* (5593, 605, 18); *Staicu C.* (5626); *Teodorescu St. I.* (P); *Thébault V.* (P); *Tilică C. Şt.* (5072); *Trestianu N. S.* (5598, 99); *Turculeţ Tiberiu* (5593, 626); *Vasiliu Gh. D.* (5520, 61, 62, 93, 94, 626); *Voinea P. R.* (N, P); *Wegener E.* (5562, N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*

Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea I-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 80 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

C. 78.950.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1942

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIIU

SUMARUL

1. Asupra curbelor deduse prin proprietatea triunghiurilor în care unghiurile B = 2A. *N. Abramescu.*
2. Asupra triunghiurilor ABC în care B = 2A. *N. Gh. Gaiu.*
3. Asupra unor serii . . . . . *A. Dobrescu.*
4. Raport pentru acordarea premiului „Vasile Cristescu" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 43—46.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 312.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2145, 3733, 3944, 5024, 5081, 5108, 5119, 5307, 5617.
10. Exerciţii: 18—20.
11. Probleme propuse: 5654—5666.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **55**42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **6**00, 01, 02, 03, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

ASUPRA CURBELOR DEDUSE PRIN PROPRIETATEA TRIUNGHIURILOR IN CARE UNGHIURILE B = 2A

Résumé. On trouve géométriquement les courbes attachées à la construction des triangles ABC, pour lesquels les angles B = 2A. Étant données la somme $a + b$ des deux côtés, où le côté AC = b, le sommet B décrit un limaçon de PASCAL, ou une cubique circulaire unicursale [1]).

1. *Curba pe care se află vârful* B *al triunghiurilor* ABC, *când se dau suma a două laturi* a + b *şi unghiul* A. Pentru a construi triunghiul, se descrie cercul cu centrul A (fig. 1) şi raza AD = $a + b$ şi se duce raza AQ, astfel ca unghiul DAO = $\sphericalangle$ A.

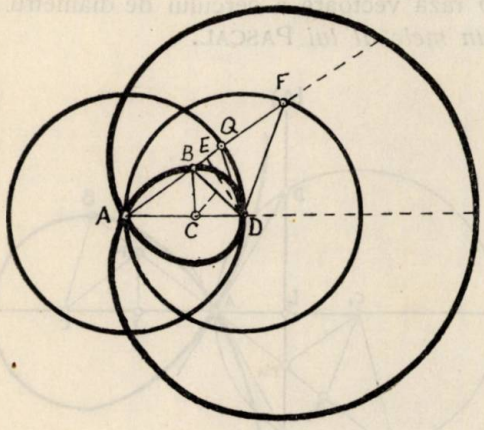


Fig. 1.

Cercul cu centrul D şi raza DQ taie pe AQ în B; perpendiculara pe BD în mijlocul ei taie pe AD în C.

1) *Questione a concorso* (*Supplemento al Periodico di Matematica*, Dicembre 1905); G. LONGCHAMPS, *Exercice de math. élém.* (*Mathesis*, VI, 1906, p. 154); E. N. BARISIEN, *Question d'examen*, 1578 (*Mathesis*, 1912, p. 167); I. BANCIU, *Problema* 1981 (*Gazeta Mat.*, Vol. 19, 1913, p. 113); J. NEUBERG, *Bibliographie des triangles spéciaux* (Mémoires de la Soc. royale des Sc. de Liége, 1924, p. 23); V. THÉBAULT, *Sur le triangle où* $a^2 = b(b + c)$ (*Mathesis*, vol. 44, 1930, p. 391); O. ŢINO, *Problema* 4422 (*Gazeta Mat.*, vol. 41, 1936, p. 538); N. N. MIHĂILEANU, *Problema* 36, cl. VI (*Pozitiva*, 1941).

In triunghiul ABC avem $B = 2A$. In adevăr, unghiurile

$$CBD = CDB = ADQ - BDQ = AQD - 2\left(\frac{\pi}{2} - AQD\right) = 3AQD - \pi$$

$$ABC = \pi - CBD - DBQ = \pi - (3AQD - \pi) - AQD$$

$$ABC = 2\pi - 4AQD = 2\pi - 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = 2A,\ B = 2A.$$

Pentru a găsi curba pe care se află vârful B (fig. 1) se descrie cercul cu centrul D şi raza DA. Insemnând cu F intersecţia acestui cerc cu AQ şi E proiecţia lui D pe AF, se vede că $AD = DF$, $BD = DQ$, $EF = EA$, $EB = EQ$, $FB = AQ = AD = a + b = \text{const.}$ Deci B *descrie* o curbă care se obţine micşorând cu $FB = AD = \text{const.} = a + b$ raza vectoare a cercului de diametru AD, care prin definiţie este *un melc al lui* PASCAL.

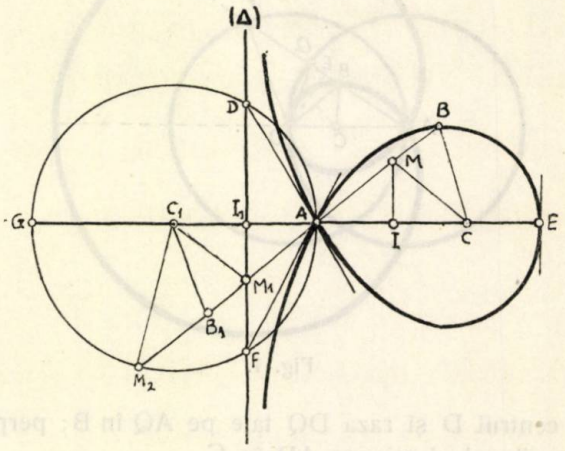


Fig. 2.

2. *Curba pe care se află vârful* B *al triunghiurilor* ABC, *când se dau* $AC = b$, *şi unghiul* A. Se duce perpendiculara pe AC (fig. 2) în mijlocul ei I, pe care se ia punctul M, astfel ca unghiul $MAC = \sphericalangle A$ dat. Se ia pe AM punctul B, astfel $CB = CM$. Din triunghiurile isoscele CMB ($CM = CB$) şi AMC ($AM = MC$) avem egalitatea unghiurilor $B = ABC = CMB = CAM + MCA = 2A$, Triunghiul ABC este astfel că $B = 2A$.

Pentru a găsi curba pe care se află punctul B, observăm că M (fig. 2) descrie perpendiculara pe mijlocul lui AC. Să luăm simetrica figurii în raport cu A şi avem punctele I_1, C_1, B_1, M_1 şi dreapta (Δ) simetrica M_1I_1 a lui MI. Să prelungim AB_1 cu B_1M_2 egal cu AM_1. Avem

$M_2B_1 = M_1A$, $C_1M_1 = C_1B_1$, deci $C_1M_2 = C_1A = AC = b = \text{const.}$

Urmează că B_2 descrie cercul (C_1) cu centrul C_1 şi raza $C_1A = b$. De asemenea, avem $M_2M_1 = B_1A = AB$.

Deci B se obţine astfel. Se dau cercul (C_1) de diametru $GA = 2b$ (fig. 2) şi dreapta (Δ) perpendiculară pe diametrul AG, la distanţa $AI_1 = \frac{b}{2}$, care taie cercul în D şi F. Prin extremitatea A a diametrului AG se duce o dreaptă variabilă, care taie dreapta (Δ) în M_1 şi cercul în M_2. Se ia pe dreapta M_2M_1A punctul B, astfel ca $AB = M_2M_1$. Se ştie[1]) că *locul lui* B *este o cubică circulară unicursală, o strofoidă,* cu punctul dublu A, tangentele în punctul dublu AD şi AF, cu bucla AE, $AE = \frac{3b}{2}$, asimptota DF, dreapta (Δ) şi $AI_1 = \frac{b}{2}$; taie cercul în aceleaşi puncte cu paralela la (Δ) echidistantă de A şi (Δ).

N. ABRAMESCU.

ASUPRA TRIUNGHIURILOR ABC IN CARE B = 2A

1. *Altă demonstrare a relaţiei* $b^2 = a(a + c)$. Să considerăm cercul (A) cu centrul A de rază $AD = AC + CD$, unde $AC = b$, $CD = a$, $b > a$, C fiind pe AD. Din D ca centru cu raza $CD = a$ descriem cercul (C) tangent în D la primul cerc. Prin A ducem raza AQ a cercului (A), care taie cercul (C), în M şi B, iar cercul (A) în Q. Să găsim lungimea BD, astfel ca $BD = QD$. Insemnăm $BD = QD = z$ şi unghiul $AQD = QBD = x$ şi ducem înălţimea AR a triunghiului isoscel AQD.

1) N. ABRAMESCU, *Lecţiuni de Geometrie Analitică* (Edit. Universităţii Cluj), p. 289.

Avem

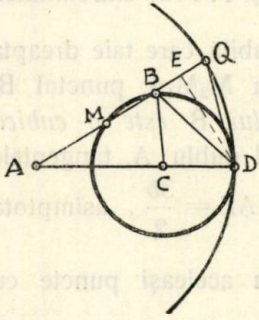
$$QR = \frac{z}{2} = (a+b)\cos x,$$

$$(1) \qquad \cos x = \frac{z}{2(a+b)}.$$

Ducând înălțimea din C a triunghiului BCD, vedem că unghiurile

$$CBD = CDB = ADQ - BDQ = x - 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3x - \pi,\ x < \frac{\pi}{2},$$

și avem



$$(2) \qquad \cos 3x = -\frac{z}{2a}.$$

Inlocuind în relația $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ pe $\cos x$ din (1) și $\cos 3x$ din (2), obținem

$$\overline{DB}^2 = z^2 = \frac{(2a-b)(a+b)^2}{a},\ 2a > b.$$

Scriind puterea lui A față de cercul cu centrul D și raza $z = BD = QD$, avem $AQ = a + b$,

$$AB \cdot AQ = (a+b)^2 - \frac{(a+b)^2(2a-b)}{a} = \frac{(a+b)^2(b-a)}{a},$$

$$(3) \qquad AB = \frac{b^2 - a^2}{a}.$$

Scriind puterea lui A față de cercul (C), obținem

$$AM \cdot AB = b^2 - a^2,\ AM = a.$$

In triunghiul ABC, cu laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, observând (3), avem $b^2 - a^2 = ac$, $b^2 = a(a+c)$, relație cunoscută, unde înlocuind laturile în funcție de unghiurile opuse, obținem $B = 2A$.

2. *Construcția triunghiului* ABC, B = 2A, *ne conduce la următoarele curbe.* Fie A centrul unui cerc de rază AD = $a + b = k$, D un punct fix pe acest cerc și Q un punct variabil. Cercul cu centrul D și raza DQ taie pe AQ în B. Să găsim locul lui B. Notând cu θ unghiul DAQ și r = AB, ducând înălțimea DE a triunghiului isoscel BDQ, avem

$$QD = 2AD \sin\frac{\theta}{2} = 2k \sin\frac{\theta}{2},$$

$$QE = QD \cos EQD = 2k \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} = 2k \sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$r = AB = AQ - BQ = k - 2QE,\ r = k - 4k \sin^2\frac{\theta}{2},\ r = 2k\cos\theta - k.$$

Aceasta este ecuația în coordonate polare a locului descris de B, care este un melc al lui PASCAL.

Se mai pot găsi și următoarele curbe pe care se află B. Pe o dreaptă se dă un punct fix A și se ia punctul C, AC = b. Cercurile (A) și (C) cu centrele A și C și cu aceeași rază a, se taie în M și M'. Dreptele AM și AM' taie cercul (C) în B și B'. Să se afle: 1° curba descrisă de B când b variază și 2° curba descrisă de B când a variază. Luând originea în A și AC ca Ox, ecuațiile cercurilor și dreptelor AM sunt

$$x^2 + y^2 = a^2,\quad (x - b)^2 + y^2 = a^2,\quad y = \pm\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{b}x$$

1°. Eliminând pe b, suprimând factorul $r - a$, ecuația în coordonate polare a curbei descrisă de B este $r = a(2\cos 2A + 1)$, A = $\sphericalangle$ CAB.

2°. Eliminând pe a, suprimând factorul $2x - b$, se obține strofoida

$$y^2(2x + b) = x^2(3b - 2x).$$

Vârful B se află la intersecția acestor curbe.

N. GH. GAIU.

ASUPRA UNOR SERII

In articolul „*Suma unei serii*“, din „G. M.“, XL, pag. 395, se consideră seria întreagă:

$$\alpha^m + (\alpha+1)^m . x + (\alpha+2)^m . x^2 + \ldots + (\alpha+p)^m . x^p + \ldots$$

a cărei sumă $S_m(x)$ se găseşte că este de forma

$$S_m(x) = \frac{P_m(x)}{(1-x)^{m+1}},$$

$P_m(x)$ fiind un polinom de gradul m cel mult.

In cele ce urmează voiu considera seria mai generală

$$a_1^{m_1} . a_2^{m_2} \ldots a_{n-1}^{m_{n-1}} . a_m^{m_n} + (a_1+1)^{m_1} . (a_2+1)^{m_2} \ldots (a_{n-1}+1)^{m_{n-1}} . (a_n+1)^{m_n} . x + \ldots$$
$$\ldots + (a_1+k)^{m_1} . (a_2+k)^{m_2} \ldots (a_{n-1}+k)^{m_{n-1}} . (a_n+k)^{m_n} . x^k + \ldots,$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ fiind numere întregi şi pozitive (sau nule), $a_1, a_2; \ldots, a_n$ fiind numere reale, iar $|x| < 1$, şi voiu demonstra că suma $S_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x)$ a acestei serii este de forma

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x) = \frac{P_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(x)}{(1-x)^{m_1+m_2+\ldots+m_n+1}},$$

$P_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(x)$ fiind un polinom de gradul $m_1+m_2+\ldots+m_n+1$ cel mult.

Fie mai întâi seria

$$(1) \quad S_{m,n} = \alpha^m . \beta^n + (\alpha+1)^m . (\beta+1)^n . x + \ldots + (\alpha+k)^m . (\beta+k)^n . x^k + \ldots$$

Avem:

$$S_{m,0} = \alpha^m + (\alpha+1)^m . x + \ldots + (\alpha+k)^m . x^k + \ldots$$

care e tocmai seria considerată în articolul citat şi deci:

$$S_{m,0} = \frac{P_m(x)}{(1-x)^{m+1}}.$$

De asemenea:

$$S_{m,1} = \alpha^m \beta + (\alpha+1)^m . (\beta+1) . x + \ldots + (\alpha+k)^m . (\beta+k) . x^k + \ldots =$$
$$= \beta [\alpha^m + (\alpha+1)^m . x + \ldots + (\alpha+k)^m x^k + \ldots] +$$
$$+ (\alpha+1)^m . x + \ldots + k(\alpha+k)^m x^k + \ldots$$

de unde se vede că avem relaţia:

$$S_{m,1} = x S'_{m,0} + \beta S_{m,0},$$

din care dacă înlocuim pe $S_{m,0}$ prin valoarea sa, obţinem:

$$S_{m,1} = \frac{x(1-x)P'_m(x) + [(m+1-\beta)x+\beta]P_m(x)}{(1-x)^{m+2}}.$$

Vedem deci că proprietatea enunţată este adevărată pentru seria (1), pentru valorile $n = 0, 1$.

Să presupunem că este adevărată până la $n-1$, adică avem:

$$(2)\quad S_{m,n-1} = \alpha^m.\beta^{n-1} + (\alpha+1)^m.(\beta+1)^{n-1}.x + \ldots$$

$$+(\alpha+k)^m.(\beta+k)^{n-1}.x^k + \ldots = \frac{P_{m+n-1}(x)}{(1-x)^{m+n}}.$$

Se verifică uşor, ţinând seamă de (1) şi (2), relaţia

$$(3)\qquad S_{m,n} = xS'_{m,n-1} + \beta S_{m,n-1},$$

care este fundamentală pentru seriile care fac obiectul acestor rânduri.

Inlocuind în (3) pe $S_{m,n-1}$ cu valoarea sa din (2), obţinem:

$$S_{m,n} = \frac{x(1-x)P'_{m+n-1}(x) + [(m+n-\beta)x+\beta]P_{m+n-1}(x)}{(1-x)^{m+n+1}}.$$

Deoarece $P_{m+n-1}(x)$ este, prin ipoteză, un polinom de gradul $m+n-1$ cel mult, polinomul dela numărătorul lui $S_{m,n}$ este cel mult de gradul $m+n$ şi deci proprietatea este adevărată pentru seria (1), oricare ar fi m şi n întregi şi pozitivi.

Să presupunem că această proprietate are loc pentru o serie cu $n-1$ parametri:

$$S_{m_1,m_2,\ldots m_{n-1}} = a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_{n-1}^{m_{n-1}} + (a_1+1)^{m_1}.(a_2+1)^{m_2}\ldots$$

$$(a_{n-1}+1)^{m_{n-1}}.x\ldots + (a_1+k)^{m_1}.(a_2+k)^{m_2}\ldots(a_{n-1}+k)^{m_{n-1}}.x^k + \ldots$$

adică:

$$(4)\qquad S_{m_1,m_2,\ldots,m_{n-1}} = \frac{P_{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}}(x)}{(1-x)^{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+1}}.$$

Considerăm seria:

$$S_{m_1,m_2,\ldots,m_{n-1},m_n} = a_1^{m_1}.a_2^{m_2}\ldots a_{n-1}^{m_{n-1}}.a_n^{m_n} + (a_1+1)^{m_1}.(a_2+1)^{m_2}\ldots$$

$$\ldots(a_{n-1}+1)^{m_{n-1}}.(a_n+1)^{m_n}x + \ldots + (a_1+k)^{m_1}.(a_2+k)^{m_2}\ldots$$

$$\ldots(a_{n-1}+k)^{m_{n-1}}.(a_n+k)^{m_n}.x^k + \ldots$$

Ca şi mai sus se vede că avem (ţinând seamă de (4)):

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, 0} = S_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}} = \frac{P_{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}}(x)}{(1-x)^{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+1}}$$

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, 0} = xS'_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, 0} + a_n S_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, 0} =$$

$$= \frac{x(1-x)P'_{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}}(x) + [(m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+1-a_n)x+a_n]P_{m_1+\ldots+m_{n-1}}(x)}{(1-x)^{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+2}},$$

de unde rezultă că numărătorul lui $S_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, 1}$ este un polinom de gradul $m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}$ cel mult.

Presupunând proprietatea adevărată până la $m_n - 1$, adică presupunând că avem:

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_n-1, m_n-1} = \frac{P_{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+m_n-1}(x)}{(1-x)^{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}+m_n}}$$

şi înlocuind pe $S_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n-1}$ cu această valoare a sa în relaţia:

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m} = xS'_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n-1} + a_n S_{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n-1}$$

care se stabileşte fără nicio greutate, deducem:

(5)
$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_n-1, m_n} =$$

$$= \frac{x(1-x)P'_{m_1+\ldots+m_{n-1}+m_n-1}(x) + [(m_1+\ldots+m_n-a_n)x+a_n]P_{m_1+\ldots+m_{n-1}+m_n-1}(x)}{(1-x)^{m_1+m_2+\ldots+m_n-1+m_n+1}} =$$

$$= \frac{P_{m_1+m_2+\ldots+m_n}(x)}{(1-x)^{m_1+m_2+\ldots+m_n+1}}.$$

Trecând la calculul coeficienţilor polinomului $P_{m_1+\ldots+m_n}(x)$, găsim, prin identificare, ca şi în articolul citat:

$$A_k = (a_1+k)^{m_1}.(a_2+k)^{m_2}\ldots(a_n+k)^{m_n} - (a_1+k-1)^{m_1}.(a_2+k-1)^{m_2}\ldots$$

$$\ldots(a_n+k-1)^{m_n}.C^1_{m_1+\ldots+m_n+1} + \ldots + (-1)^k a_1^{m_1}.a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}C^k_{m_1+\ldots+m_n+1},$$

A_k fiind coeficientul termenului de gradul k.

Unii din coeficienţii A_k, $(k = 0, 1, 2, \ldots, m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$, pot fi nuli.

Dacă însă $k > m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, toţi coeficienţii A_k sunt nuli. Deducem, în acest caz, identitatea:

$$(a_1+k)^{m_1}.(a_2+k)^{m_2}\ldots(a_n+k)^{m_n} - (a_1+k-1)^{m_1}.(a_2+k-1)^{m_2}\ldots$$

$$\ldots(a_n+k-1)^{m_n}.C^1_{m_1+m_2+\ldots+m_n+1} + \ldots + (-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_n+1}.$$

$$.(a_1+k-m_1-\ldots-m_n-1)^{m_1}\ldots(a_n+k-m_1-\ldots m_n-1)^{m_n}.C^{m_1+\ldots+m_n+1}_{m_1+\ldots+m_n+1} = 0.$$

De asemenea, operând ca D-l GH. TH. GHEORGHIU în articolul citat, obţinem identitatea mai generală:

$$(a_1+m_1+\ldots+m_n+p)^{m_1}\ldots(a_n+m_1+\ldots+m_n+p)^{m_n}-(a_1+m_1+\ldots$$

$$\ldots+m_n+p-1)^{m_1}\ldots(a_n+m_1+\ldots+m_n+p-1)^{m_n}.C^1_{m_1+\ldots+m_n+p}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{m_1+\ldots+m_n+p}.C^{m_1+\ldots+m_n+p}_{m_1+\ldots+m_n+p}.a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}=0$$

sau, punând:

$$u_1=a_1+m_1+\ldots+m_n+p,\ldots,u_n=a_n+m+\ldots+m_n+p,$$

$$u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}-(u_1-1)^{m_1}\ldots(u_n-1)^{m_n}.C^1_{m_1+\ldots+m_n+p}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{m_1+\ldots+m_n+p}.C^{m_1+\ldots+m_n+p}_{m_1+\ldots+m_n+p}.(a_1-m_1-\ldots-m_n-p)^{m_1}\ldots$$

$$\ldots(u_n-m_1-\ldots-m_n-p)^{m_n}=0,$$

p fiind întreg şi pozitiv, ca şi numerele $m_1,\ldots,m_n$.

* * *

Seriile:

(6) $\alpha^m+(\alpha+\beta)^m.x+\ldots+(\alpha+k\beta)^m.x^k+\ldots$

(7) $\alpha^m+(\alpha+\beta+\gamma)^m.x+\ldots+(\alpha+k\beta+k^2\gamma).x^k+\ldots$

şi în general seria al cărei termen general este:

$$u_k=[P_n(k)]^m.x^k,$$

unde:

$$P_n(k)=\alpha_0+a_1k+\ldots+a_nk^n,$$

generalizează în alt sens seria studiată de D-l GH. TH. GHEORGHIU.

Studiez seriile (6) şi (7).

Fie $S_{m;1}(x)$ suma seriei (6), indicele al doilea arătând gradul coeficientului în raport cu k.

Pentru $m=0,1$, avem:

(8) $$S_{0;1}=1+x+\ldots+x^k+\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

$$S_{1;1}=\alpha+(\alpha+\beta)x+\ldots+(\alpha+k\beta)x^k+\ldots=$$

$$=\alpha(1+x+\ldots+x^k+\ldots)+\beta(x+\ldots+kx^k+\ldots).$$

(9) $$\therefore\ S_{1;1}=\alpha S_{0;1}+\beta x S_{0;1}.$$

(10) $$\therefore\ S_{1;1}=\frac{\alpha+(\beta-\alpha)x}{(1-x)^2}.$$

Observând relaţiile (8) şi (10) suntem conduşi să vedem dacă nu cumva avem în general:

$$(11) \qquad S_{m;1} = \frac{P_m(x)}{(1-x)^{m+1}},$$

$P_m(x)$ fiind un polinom de gradul m cel mult.

Să presupunem că este astfel până la $m-1$.

(Pentru $m = 0,1$, proprietatea se verifică).

Urmând calea de mai sus deducem că avem:

$$(12) \qquad S_{m;1} = \alpha S_{m-1;1} + \beta x S'_{m-1;1}$$

$$(13) \qquad S_{m;1} = \frac{x(1-x)P'_{m-1}(x) + [(m-\alpha)x + \alpha]P_{m-1}(x)}{(1-x)^{m+1}}$$

după cum prevăzusem.

Pentru calculul coeficienţilor, scriem relaţia (9) sub forma:

$$A_m x^m + A^{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_k x^k + \ldots + A_0 =$$

$$= [1 - C^1_{m+1}x + \ldots + (-1)^k C^k_{m+1} x^k + \ldots + (-1)^{m+1} . C^{m+1}_{m+1} . x^{m+1}] \times$$

$$[\alpha^m + (\alpha+\beta)^m x + \ldots + (\alpha + k\beta)^m x^k + \ldots].$$

$$\therefore \quad A_k = (\alpha + k\beta)^m - C^1_{m+1}[\alpha + (k-1)\beta]^m + \ldots + (-1)^k . C^k_{m+1} . \alpha^m.$$

Identitatea:

$$(\alpha + k\beta)^m - C^1_{m+1}[\alpha + (k-1)\beta]^m + \ldots$$

$$+ (-1)^{m+1} . C^{m+1}_{m+1}[\alpha + (k-m-1)\beta]^m = 0, \quad (k > m),$$

şi mai în general, identitatea:

$$(14) \quad [\alpha + (m+p)\beta]^m - C^1_{m+p}[\alpha + (m+p-1)\beta)^m + \ldots$$

$$+ (-1)^{m+p} . C^{m+p}_{m+p} . \alpha^m = 0.$$

(p întreg şi > 0),

deduse ca mai sus, generalizează o identitate cunoscută.

Dacă punem $u = \alpha + (m+p)\beta$, (14) se mai scrie:

$$(15) \quad u^m - C^1_{m+p}(u-\beta)^m + \ldots + (-1)^{m+p} C^{m+p}_{m+p}[u - (m+p)\beta] = 0.$$

Trecând la seria (7) şi operând în mod analog ca mai sus, stabilim că relaţia (9) ia forma:

$$(16)\quad S_{m;2} = \alpha S_{m-1;2} + \beta x S'_{m-1;2} + \gamma x (x S'_{m-1;2})'.$$

Apoi din considerarea lui $S_{0;2}$ şi $S_{1;2}$ care au valorile:

$$S_{0;2} = \frac{1}{1-x}, \quad S_{1;2} = \frac{(\alpha - \beta + \gamma) x^2 + (-2\alpha + \beta + \gamma) x + \alpha}{(1-x)^3},$$

suntem conduşi să vedem dacă nu cumva avem în general:

$$(17)\qquad S_{m;2} = \frac{P_{2m}(x)}{(1-x)^{2m+1}},$$

$P_{2m}(x)$ fiind un polinom de gradul $2m$ cel mult.

Presupunând că aceasta are loc până la $m-1$, relaţia (16) se scrie:

$$S_{m;2} = \frac{\{[\alpha - (2m-1)\beta + (2m-1)^2\gamma] x^2 + [-2\alpha + (2m-1)(\beta+\gamma)] x + \alpha\}}{} \\ \frac{P_{2m-2}(x) + x(1-x)\{[-\beta + (4m-3)\gamma] x + \gamma\} P'_{2m-2}(x) + \gamma x^2 (1-x)^2 P''_{2m-2}(x)}{(1-x)^{2m+1}}$$

de unde rezultă că $S_{m;2}$ este de forma (17).

In sfârşit se găseşte valoarea:

$$A_k = (\alpha + k\beta + k^2\gamma)^m - C^1_{2m+1} \cdot [\alpha + (k-1)\beta + (k-1)^2\gamma]^m + \ldots \\ \ldots + (-1)^k \cdot C^k_{2m+1} \alpha^m,$$

pentru coeficientul de gradul k al polinomului $P_{2m}(x)$, precum şi identitatea:

$$[\alpha + (2m+p)\beta + (2m+p)^2\gamma]^m - C^1_{2m+p} [\alpha + (2m+p-1)\beta + \\ (2m+p-1)^2\gamma]^m + \ldots + (-1)^{2m+p} \cdot C^{2m+p}_{2m+p} \alpha^m = 0,$$

p fiind întreg şi pozitiv.

* * *

Este evident că aceste consideraţii se pot extinde, din aproape în aproape, până la seria de termen general:

$$u_k = [P_n(k)]^m \cdot x^k, \text{ unde } P_n(k) = a_0 + a_1 k + \ldots a_n k^n.$$

A. DOBRESCU.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU"

Subsemnaţii, membri ai Comisiunii pentru acordarea premiului „Vasile Cristescu", autorului unei lucrări referitoare la trigonometrie dintre cele publicate în ultimul volum al *Gazetei Matematice*, cercetând activitatea desfăşurată de corespondenţii noştri în acest domeniu, ne-am fixat atenţia asupra Notei Nr. 53 a D-lui VIRGIL METEA, student la Şcoala Politechnică.

In această notă, Domnia-Sa, referindu-se la problema 4423 prin care se cerea rezolvarea triunghiului format de o înălţime, o mediană şi o bisectoare, dusă fiecare din câte un vârf diferit al triunghiului — consideră cazul când cele trei ceviene de mai sus sunt concurente — cercetându-l.

Propunem pentru a fi premiat cu premiul „V. Cristescu" pe D-l VIRGIL METEA, pentru această notă, menţionând că ar fi fost dorinţa noastră să se acorde premiul unei lucrări de mai mare întindere.

Cu această ocazie, observăm cu părere de rău că activitatea corespondenţilor noştri în domeniul trigonometriei este redusă şi de puţină însemnătate.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU"

AL. V. NICULESCU, C. IONESCU-BUJOR, GABRIELA ŢIŢEICA.

Acest raport a fost citit şi aprobat de Adunarea Generală din 26 Februarie a. c., aprobând acordarea unui premiu de 5.000 lei.

NOTE MATEMATICE

43. *Imposibilitatea în numere întregi a ecuației:*

$$x^3 + y^3 = 10^n.$$

(A se vedea *Nota* Nr. 34 dela pag. 358).

Dacă $n = 3n'$ ecuația admite soluția $x = 10x'$, $y = 0$.

Fie d cel mai mare comun divizor al lui x și y. Punem:

$$x = dx' \quad , \quad y = dy'$$

$$\therefore \quad x'^3 + y'^3 = 10^n/d^3.$$

De aci rezultă:

$$d = 2^\alpha . 5^\beta ,$$

iar ecuația devine:

$$x'^3 + y'^3 = (x' + y')(x'^2 - x'y' + y'^2) = 2^{n-3\alpha} . 5^{n-3\beta}.$$

Numerele x' și y' fiind prime între ele, urmează că $(x'+y')$ și $(x'^2 - x'y' + y'^2) = (x' + y')^2 - 3x'y'$ nu pot avea ca divizor comun decât cel mult pe 3. Deci putem avea două cazuri:

$$(1) \begin{cases} x' + y' = 2^{n-3\alpha}, \\ x'^2 - x'y' + y'^2 = 5^{n-3\beta} . \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x' + y' = 5^{n-3\beta}, \\ x'^2 - x'y' + y'^2 = 2^{n-3\alpha}. \end{cases}$$

Cazul (1) ne dă:

$$x', y' = 2^{n-3\alpha-1} \pm \sqrt{(5^{n-3\beta} - 2^{2n-6\alpha-2})/3}.$$

Cum x' și y' sunt întregi, trebue să avem:

$$5^{n-3\beta} - 2^{2n-6\alpha-2} = 3n^2.$$

Puterile perechi ale lui 2 sunt de forma (M3 + 1). Pentru ca partea întâia a egalității să se împartă cu 3 trebue ca și $5^{n-3\beta}$ să fie tot de forma (M3 + 1). Deci $(n - 3\beta) = 2q$, căci numai puterile perechi ale lui 5 sunt (M3 + 1). Trebue dar ca $(n - 3\beta) = 2q$.

Dacă punem $(2n - 6\alpha - 2) = 2p$, ecuația de mai sus devine:

$$5^{2q} - 2^{2p} = 3n^2.$$

Numerele 2 și 5 sunt prime între ele. Deci:

$$\begin{matrix} 5^q - 2^p = 3v^2, \\ 5^q + 2^p = w^2, \end{matrix} \quad \text{sau} \quad \begin{matrix} 5^q - 2^p = v^2, \\ 5^q + 2^p = 3w^2. \end{matrix}$$

Din acestea deducem:

$$2 \cdot 5^q = w^2 + 3v^2, \quad 2^{p+1} = w^2 - 3v^2, \quad \text{sau} \quad 2 \cdot 5^q = v^2 + 3w^2, \quad 2^{p+1} = 3w^2 - v^2.$$

Insă egalităţi de forma $2 \cdot 5^q = r^2 + 3s^2$ nu sunt posibile căci $5^q = (6-1)^q = M3 \pm 1$, de unde ar reieşi $m = M3 \pm 2$, ceea ce nu se poate. Deci problema nu are soluţii în cazul (1).

In cazul (2) găsim, pe aceeaşi cale:

$$x', y' = \tfrac{1}{2}\left[5^{n-\beta} \pm \sqrt{(2^{n-3\alpha+2} - 5^{2n-6\beta})/3}\right].$$

Trebue să avem:

$$2^{n-3\alpha+2} - 5^{2n-6\beta} = 3n^2.$$

Se arată ca şi pentru (1) că nu avem nici aci soluţiuni.

GH. CONSTANTINESCU.

44. *Relaţii metrice în tetraedru şi triunghiu.* Fie tetraedrul SABC unde am notat:

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c, \quad \overline{SA} = \alpha, \quad \overline{SB} = \beta, \quad \overline{SC} = \gamma.$$

Se cunoaşte formula care dă volumul tetraedrului:

(1) $$6V = \alpha\beta\gamma \sin S, \text{ unde:}$$

(2) $$\sin^2 S = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta, \gamma) & \cos(\gamma, \alpha) \\ \cos(\beta, \gamma) & 1 & \cos(\alpha, \beta) \\ \cos(\gamma, \alpha) & \cos(\alpha, \beta) & 1 \end{vmatrix}$$

(β, γ) fiind unghiul format de muchiile SA şi SB.

Calculând pe $\sin^2 S$, găsim:

(3) $$4\alpha^2\beta^2\gamma^2 \sin^2 S = -\Sigma a^2\alpha^4 + \Sigma(-a^2 + b^2 + c^2)\beta^2\gamma^2 + \Sigma a^2(-a^2 + b^2 + c^2)\alpha^2 - a^2b^2c^2 = 144V^2$$

formulă care dă volumul unui tetraedru în funcţie de muchiile sale.

Dacă punctul S e în planul triunghiului ABC, $V = 0$ şi avem relaţia generală care leagă distanţele unui punct din planul unui triunghiu la cele trei vârfuri:

(4) $$-\Sigma a^2\alpha^4 + \Sigma(-a^2 + b^2 + c^2)\beta^2\gamma^2 + \Sigma a^2(-a^2 + b^2 + c^2)\alpha^2 - a^2b^2c^2 = 0.$$

Făcând cuvenitele schimbări de notaţiuni, putem scrie relaţia care leagă laturile şi diagonalele *unui patrulater oarecare:*

$$(5)\quad e^2f^2(a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2)+e^2(b^2-c^2)(d^2-a^2)$$

$$+f^2(c^2-d^2)(a^2-b^2)-(a^2-b^2+c^2-d^2)(a^2c^2-b^2d^2)=0$$

[diagonala e uneşte vârful (a, d) cu (b, c)].

Relaţiile (4) şi (5), deduse pe o altă cale formează, împreună cu o serie de aplicaţiuni, obiectul unui articol trimes acum câtva timp redacţiei G. M.

ION C. VASILIU.

45. *Consideraţiuni asupra problemei 3456.* 1°. Fie p_1, p_2, $p_3, \ldots p_r$ toate numerele prime absolute conţinute în primele $n+1$ numere. Numărul

$$(1)\qquad N_i = k \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_r + i$$

în care i are una din valorile 2, 3, 4, ... n, $(n+1)$ nu poate fi prim căci se divide cu factorii primi ai lui i. Prin urmare *există o infinitate de* n *numere* N_i *consecutive care nu conţin niciun număr prin absolut.*

Aceasta constitue soluţia exactă a problemei 3456 (G. M., Vol. XLV, pag. 536) al cărei enunţ este: *„care este cel mai mic număr de numere prime absolute, într'un şir de numere consecutive?"*

Nimic nu ne îndreptăţeşte să afirmăm că numerele de forma (1) sunt singurele care se bucură de această proprietate, de altfel aceasta nici nu este adevărat în general, după cum ne putem convinge uşor examinând o tablă de numere prime.

2°. Şirul natural al numerelor întregi pozitive poate fi considerat ca un caz particular al unei progresii aritmetice, cu termenii întregi şi aşa că 2 termeni consecutivi să nu aibă niciun divizor comun.

DIRICHLET a demonstrat că o astfel de progresie are un număr infinit de numere prime absolute.

Teorema demonstrată la începutul acestei note poate fi extinsă şi la aceste progresii.

Fie $q_1, q_2, \ldots q_s$ *toți* factorii primi ai numerelor

$$\div (a+b) \,.\, (2a+b) \,.\, (3a+b) \ldots (na+b)$$

unde a și b sunt prime între ele. Numerele

$$(2) \qquad M_i = kq_1 q_2 \ldots q_s\, a + ia + b \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

se divid, pentru $i \leqslant n$, cu factorii primi ai lui $ia+b$, deci *în o progresie aritmetică de tip* DIRICHLET *există o infinitate de grupe de câte* n *termeni consecutivi care nu conțin niciun număr prim.*

3°. Fie acum $ra+b$ un număr prim cu $r \geqslant n$. Un astfel de număr există, după teorema lui DIRICHLET, dacă a este prim cu b, oricât de mare ar fi numărul dat n, deoarece în caz contrar ar urma ca numerele prime conținute în șirul

$$ia + b \qquad (i = 1, 2, \ldots n, \ldots)$$

este finit, ceea ce nu este adevărat. Fie încă $h_1, h_2, \ldots h_t$ totalitatea factorilor primi care divid numerele

$$[(r-n+1)\,a+b],\ [(r-n+2)\,a+b], \ldots\ [(r-1)\,a+b].$$

Observăm că în grupa de n termeni

$$(3) \qquad P_i = kh_1 h_2 \ldots h_t\, a + ia + b$$

$$(i = r-n+1,\ r-n+2, \ldots r-1,\ 2)$$

numerele corespunzătoare valorilor lui i, cuprinse între $r-n+1$ și $r-1$ nu pot fi prime, deoarece se divid cu factorii primi ai lui $ia+b$, însă numărul

$$kh_1 h_2 \ldots h_t\, a + ra + b$$

devine prim pentru o infinitate de valori a lui k fiindcă $ra+b$ fiind prim, nu se divide nici cu a nici cu factorii primi cari divid numerele $ia+b$ pentru $i < r$.

Prin urmare există o infinitate de valori ale lui k astfel încât grupa de n numere (3) să conțină un număr prim și numai unul. De aici:

Intr'o progresie aritmetică de tip DIRICHLET, *există o infinitate de grupe de câte* n *termeni consecutivi, astfel încât un singur termen din grupă să fie număr prim.*

Propoziția echivalentă pentru șirul natural de numere se demonstrează și mai ușor dacă observăm că în grupa (1) de n numere consecutive singurul număr care poate fi prim este cel corespunzător lui $i = 1$, și acesta devine prim pentru o infinitate de valori ale lui k.

4°. Teorema generală are enunțul următor:

Fiind dată o progresie aritmetică de tip DIRICHLET, *unui număr* n *putem face să-i corespundă un alt număr* m *astfel încât în progresia dată, numărul grupelor de câte* n *termeni consecutivi în care* $m' \leqslant m$ *termeni și numai* m' *sunt prime absolute, este infinit.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme generale este nevoie de cunoștințe de teoria numerelor, care depășesc cadrul elementar al considerațiunilor ce ne-am propus a face asupra problemei 3456.

I. B. FLORESCU.

46. *Asupra unei identități.* In *t. I, pag. 36,* culegerea *„Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis“* de G. POLYA, L. G. SZEGÖ, se cere sub numărul 5: *Să se demonstreze identitatea*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Dăm în cele ce urmează o soluție distinctă de aceea dată acolo. Arătăm în primul rând că dacă identitatea

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}=\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i+2}+\ldots+\frac{1}{2i}$$

este adevărată pentru $i = n-1$, ea este asemenea adevărată pentru $i = n$. Având

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-2},$$

adăugăm la ambele părți $\frac{1}{2n-1}$ și observăm că

$$\frac{1}{n}=\frac{2}{2n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n},$$

așa că egalitatea devine succesiv:

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$$

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}.$$

De aci rezultă că, deoarece identitatea este evidentă pentru

$$n=1, \qquad 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

ea este adevărată pentru n întreg oarecare.

N. GAIU.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara Anul XXI. Nr. 12, Februarie 1942. Timişoara. Un nou sistem de coordonate: „Coordonate rombice", de V. ALACI (urmare). Proprietăţi de geometrie având origina în aplicaţiile „coordonatelor rombice", de O. ŢINO.

Idem. Anul XXII. Nr. 2, 1942. Timişoara. Un nou sistem de coordonate: „Coordonate rombice" (urmare), de V. ALACI. O problemă de aplicaţii geometrice ale analizei matematice, de P. SERGESCU.

Idem. Anul XXII. Nr. 3. Mai 1942. Un nou sistem de coordonate: „Coordonate rombice" (urmare), de V. ALACI.

AL. PANTAZI. Elemente de *Geometrie diferenţială proiectivă a curbelor şi a suprafeţelor.* Academia română. Monografii ştiinţifice V. Bucureşti 1942.

P. SERGESCU. Sur l'identité des auteurs de quelques articles mathématiques insérés dans „*Le Journal des savants*" 1684—1703. Extras din Analele Academiei Române, Memoriile Secţiunii ştiinţifice. Seria III. Tomul XVII. Mem. 9. Bucureşti 1942.

N. VASILESCU KARPEN. Viaţa şi opera lui GALILEO GALILEI. Extras din Analele Academiei Române, Memoriile Secţiunii ştiinţifice. Seria III. Tomul XVII. Mem. 8. Bucureşti 1942.

CERERI

312. Sunt tratate de matematici elementare şi de exerciţii ale lor având ca autor pe F. G.-M. Care este semnificarea acestor iniţiale?

MARCEL D. COTARIU
(Brăila).

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

C. ALASIA. Algunas observaciones sobre formulas de las superficies. Zaragoza 1903.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Di alcuni teoremi di LE PAIGE et DERUITS. Madrid 1899.
Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2145. *Se dă un cerc* O *de diametru* AB *şi un punct variabil* D *pe el. Se ia pe* AB *un punct* C *astfel ca* AC = BD *şi în* C *se ridică o perpendiculară pe* AB *care taie pe* AD *în* M; *apoi pe* AD *un punct* N *astfel ca* AN = MC. *Din* O *ducem o paralelă la* DE *ce taie pe* AD *în* P, E *fiind mijlocul arcului* BD. *Luăm apoi pe* DA, DQ = MN *şi pe* BA, BF = AD *iar în* F *ridicăm o perpendiculară pe* AB *ce taie pe* AD *în* R. *In fine ducem din* C *o paralelă la* BD *ce taie pe* AD *în* S.

Se cere locul punctelor M, N, P, Q, R *şi* S.

GR. ZAMFIRESCU şi FL. VASILESCU.

1°. *Locul lui* M. Luăm pe A ca origină şi pe AB ca axă polară. Dacă notăm

$$AB = a \quad , \quad AM = \rho \quad , \quad \sphericalangle DAB = \theta$$

atunci avem

$$AC = BD = a \sin\theta \quad , \quad \rho = AM = \frac{AC}{\cos\theta}$$

$$\therefore \qquad \rho = a \operatorname{tg}\theta \qquad (1)$$

ecuaţia polară a locului lui M. Curba (1) trece prin A unde este tangentă la AB, şi are ramuri la infinit asimptote la perpendicularele în B şi B′ pe AB.

Trecând dela coordonate polare la coordonate carteziene cu origina în A şi cu AB ca axă de x, locul lui M are ecuaţia

$$y^2 = \frac{x^4}{a^2 - x^2} \cdot \qquad (2)$$

Ecuaţia (2) se găseşte şi direct în felul următor. Fie

$$y = \lambda x \qquad (3)$$

dreapta AD şi

$$\vartheta = \pm \frac{a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

distanţa de la B$(a, 0)$ la AD. Conform enunţului abscisa lui C este

$$x = \pm \frac{a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \qquad (4)$$

Eliminând pe λ între (3) şi (4) se găseşte (2).

Pentru construcţia curbei (2) se observă că ea are puncte reale dacă

$$-a < x < a$$

apoi $$y' = \pm \frac{(2a^2 - x^2)\,x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dacă se consideră numai ramura

$$y_1 = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

se stabileşte imediat din valoarea lui y' următorul tabel:

x	$-a$			0			a
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y_1	$+\infty$	scade		0	creşte		$+\infty$

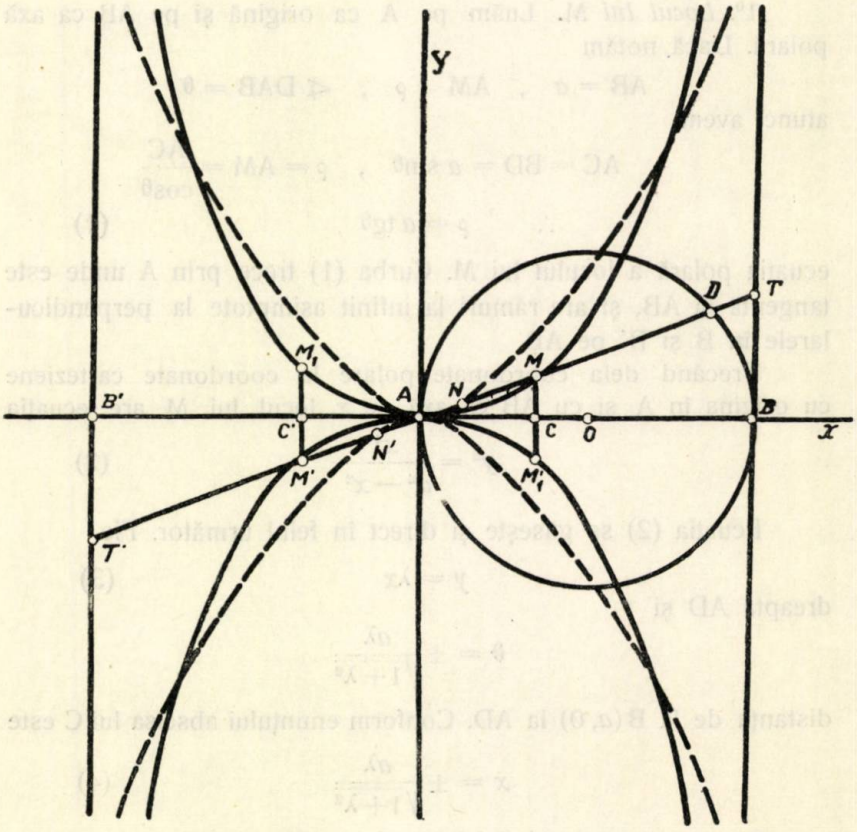


Fig. 1.

Curba este tangentă în origină la AB şi are asimptote dreptele

$$y \pm a = 0.$$

Ramura

$$y_2 = -\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

este simetrica precedentei faţă de axele de coordonate. Curba geometrică, loc al lui M este cea arătată cu linii pline în figura 1.

Din ecuaţia (2), punând

$$y = tx$$

se găseşte şi forma parametrică

$$x = \pm \frac{at}{\sqrt{1 + t^2}} \quad , \quad y = \pm \frac{at^2}{\sqrt{1 + t^2}}$$

a locului lui M.

2°. *Locul lui* N. Fie în fig. 1, T intersecţia lui AD cu tangenta în B la cercul O. Triunghiurile dreptunghice BDT şi ACM sunt egale căci au

$$\overline{AC} = \overline{BD} \quad , \quad \sphericalangle MAC = \sphericalangle TBD$$

prin construcţie. Deci

$$\overline{MC} = \overline{DT} \quad \therefore \quad \overline{AN} = \overline{DT}$$

Această construcţie a lui N arată că N descrie cisoida lui DIOCLES cu punctul de întoarcere în A şi cu asimptota BT. Dacă se ia N' simetricul lui N faţă de A, N' va descrie cisoida simetrică precedentei faţă de A. Deci N descrie o cisoidă dublă marcată punctat pe fig. 1.

Ecuaţia locului lui N se găseşte imediat observând că

$$\rho = AN = MC = AM \sin\theta.$$

Dar

$$AM = \frac{AC}{\cos\theta} = \frac{BD}{\cos\theta} = \frac{a \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore \quad \rho_1 = a \sin\theta \operatorname{tg}\theta \quad \text{pentru N}$$

şi

$$\rho_2 = -a \sin\theta \operatorname{tg}\theta \quad \text{„ N'.}$$

In coordonate normale cele 2 locuri au ecuaţiile

$$y^2 = \frac{x^3}{\pm a - x}.$$

3°. *Locul lui* P. Dreapta OE este paralelă cu AD căci uneşte mijlocul lui AB cu al lui DB. Figura OPDE este paralelogram, având laturile opuse paralele şi egale, deci

$$\overline{PD} = \overline{OE} = \overline{OB} = \frac{a}{2}.$$

Rezultă că locul lui P este partea trasată în plin pe fig. 2,

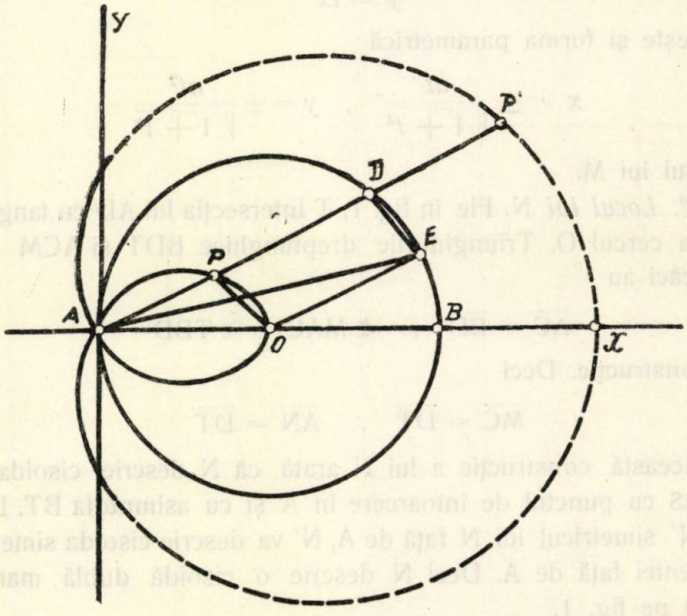


Fig. 2.

din concoida cercului O faţă de polul A. Ecuaţia polară a locului lui P este

$$\rho = a\cos\theta - \frac{a}{2}.$$

4°. *Locul lui* Q. Pe fig. 3 avem

$$\rho = AQ = AD \mp DQ$$

după cum Q este luat în Q pe DA sau în Q_1 pe AD. Apoi

$$DQ = MN = AM - AN = AM - MC$$

sau ţinând seama de cele stabilite la 1°:

$$DQ = a\,\mathrm{tg}\theta - a\sin\theta\,\mathrm{tg}\theta \quad \text{şi} \quad \overline{AD} = a\cos\theta$$

aşa că ecuaţia polară a locului lui Q este

$$\rho = a\cos\theta \pm a\,\mathrm{tg}\theta\,(1 - \sin\theta).$$

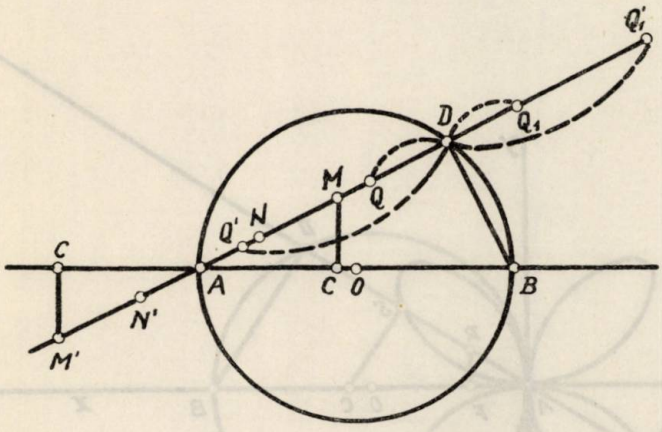


Fig. 3.

Dacă $\overline{MN} = \overline{MC}$ este luat în N′ pe prelungirea lui DA atunci avem punctele Q′ şi Q_1' ale căror locuri au ecuaţii analoage.

5°. *Locul lui* R. Pe figura 4 avem

$$AF = AB \pm AD$$

după cum F este luat de o parte sau de alta a lui B.

Inlocuind pe AB şi AD în funcţie de a şi θ găsim

$$AF = a \pm a\cos\theta$$

iar din triunghiul AFR se scoate

$$\rho = AR = \frac{AF}{\cos\theta}$$

aşa că locul lui R şi R′ sunt curbele

$$\rho = a\,.\,\frac{1 \pm \cos\theta}{\cos\theta}\,.$$

6°. *Locul lui* S. Se vede pe figura 4 că

$$\rho = AS = AC\cos\theta.$$

Dar

$$AC = BD = a\sin\theta.$$

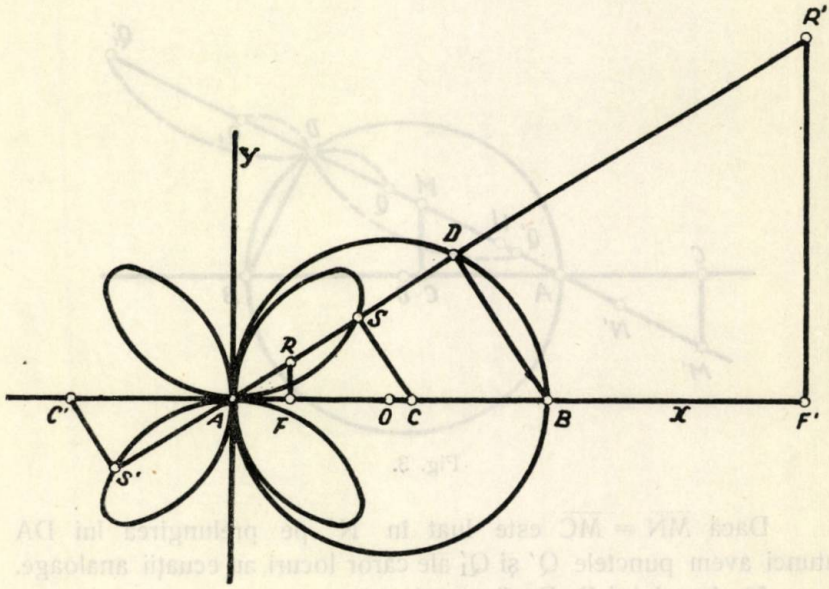


Fig. 4.

Deci locul lui S este

$$\rho = a\sin\theta\cos\theta = \frac{a}{2}\sin 2\theta$$

adică un caz particular al *rozaceei*

$$\rho = k\sin n\theta.$$

Forma curbei este ca în figura 4, unde s'a considerat şi cazul când se ia C în C' pe prelungirea lui BA.

Sunt anunţaţi ca rezolvitori ai acestei probleme:

In Vol. XX—1914/5 D-nii: A. ABASON, T. ALIMĂNESCU, I. ANDRIESCU, I. APRIHĂNEANU, D. BĂRCĂLESCU, G. BĂRGĂOANU, R. BELIAN, GH. BOTEZ, C. BURGHELE, A. CHEMALE, I. DĂSCĂLESCU, G. I. DUMITRESCU, C. A.

GEORGESCU, S. GHIOLU, I. HAMBURGER, A. HRISTESCU, C. ISTRATI, D. LITEANU, N. MARINESCU, O. MAYER, P. MELAS, G. NICULESCU, A. PANTAZI, G. PĂUN, D. PERIEȚEANU, A. SCHWARTZ, C. VIȘOIANU. ST. VORONCA, GH. ZAPAN, GR. ZAPAN și M. ZAPAN.

In Vol. XXI—1915/6 D-nii: S. KAUFMANN, N. NEGRU, N. TAILER, M. VASILIU și D. VOGEL.

In Vol. XXXVI—1930/1 D-l I. C. VASILIU.

GL. G. B.

PROBLEMA 3733. *Să se arate că suma patratelor numerelor prime cu* N *și mai mici cu el este*

$$\tfrac{1}{6}\,N\,[2N\varphi(N)+(-1)^n\varphi(p\,.\,q\,.\,r\ldots)],$$

iar suma cuburilor aceloraşi numere este

$$\tfrac{1}{4}\,N^2\,[N\varphi(N)+(-1)^n\varphi(p\,.\,q\,.\,r\ldots)]$$

$\varphi(N)$ *fiind indicatorul lui* N, *iar* $p, q, r, \ldots$ *cei* n *factori primi ai lui* N.

I. B. FLORESCU.

Soluție, dată de D-l O. ENULESCU.

Fie

$$s_\alpha = 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + N^\alpha$$

și S_α suma puterilor α ale numerelor prime cu N. Se vede că S_α se obține scăzând din s_α toate numerele care au divizori comuni cu N, adică

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S_\alpha = {} & \sum_1^N i^\alpha - \left[p^\alpha \sum_1^{\frac{N}{p}} i^\alpha + q^\alpha \sum_1^{\frac{N}{q}} i^\alpha + \ldots\right] \\ & + \left[p^\alpha q^\alpha \sum_1^{\frac{N}{pq}} i^\alpha + \ldots\right] - \left[\ldots\right] \end{aligned}\right.$$

Se știe că

$$\sum_1^r i^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} = \frac{1}{6}(2r^3+3r^2+r)$$

deci, făcând $\alpha = 2$ în (1), avem:

$$6S_2 = 2N^3 + 3N^2 + N - \left[p^2\left(2\frac{N^3}{p^3} + 3\frac{N^2}{p^2} + \frac{N}{p}\right) + q^2\left(2\frac{N^3}{q^3} + \ldots\right) + \ldots\right]$$

$$+ \left[p^2q^2\left(2\frac{N^3}{p^3q^3} + 3\frac{N^2}{p^2q^2} + \frac{N}{pq}\right) + \ldots\right] - \left[p^2q^2r^2\left(\frac{2N^3}{p^2q^2r^2} + \ldots\right)\right] + \ldots$$

$$\therefore \quad 6S_2 = 2N^3\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \ldots + \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \ldots - \frac{1}{pqr}\ldots\right)$$

$$+ 3N^2(1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n) + N(1 - p - q - r - \ldots$$
$$+ pq + pr + \ldots - pqr - \ldots).$$

Dar coeficientul lui $3N^2$ este zero, fiind desvoltarea lui $(1-1)^n$, deci

$$(2) \quad 6S_2 = 2N^3\frac{(p-1)(q-1)(r-1)\ldots}{pqr\ldots} + N(1-p)(1-q)(1-r)\ldots$$

Ori

$$N\frac{p-1}{p}\cdot\frac{q-1}{q}\cdot\frac{r-1}{r}\ldots = \varphi(N)$$

şi $$(1-p)(1-q)(1-r)\ldots = (-1)^n\varphi(p.q.r\ldots)$$

aşa că (2) devine

$$6S_2 = N[2N\varphi(N) + (-1)^n\varphi(p.q.r\ldots)]$$

ceea ce demonstrează prima parte a problemei.

Pentru calculul sumei a doua se pleacă dela

$$\sum_1^r r^3 = \frac{r^2(r+1)^2}{4} = \frac{r^4 + 2r^3 + r^2}{4}$$

şi făcând $\alpha = 3$ în (1) se găseşte ca pentru S_2:

$$4S_3 = N^4 + 2N^3 + N^2 - \left[p^3\left(\frac{N^4}{p^4} + 2\frac{N^3}{p^3} + \frac{N^2}{p^2}\right) + q^3\left(\frac{N^4}{p^4} + \ldots\right) + \ldots\right]$$

$$+ \left[p^3q^3\left(\frac{N^4}{p^4q^4} + 2\frac{N^3}{p^3q^3} + \frac{N^2}{p^2q^2}\right) + \ldots\right] - \ldots$$

$$4S_3 = N^4\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \ldots + \frac{1}{pq} + \ldots\right)$$

$$+ 2N^3(1 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n) + N^2(1 - p \ldots + pq + \ldots)$$

$$4S_3 = N^3\varphi(N) + (-1)^n N^2\varphi(p.q.r\ldots).$$

Notă. Procedând la fel, propunătorul problemei, D-l I. B. FLORESCU, a găsit şi formula:

$$S_4 = \frac{N}{30}\,[6N^3\varphi(N) + (-1)^n N^2 \varphi(p\,.\,q\,.\,r\ldots)$$
$$-(-1)^n (p^2+p+1)(q^2+q+1)\ldots\varphi(p\,.\,q\ldots]$$

G-L GH. B.

PROBLEMA 3944. *Să se arate că există un punct din care cercurile* BCD, CDA, DAB, ABC *determinate de patru puncte* A, B, C, D *din plan luate câte trei, se văd sub acelaşi unghiu.*

D. BARBILIAN.

1°. *Soluţie geometrică.* Transformăm figura printr'o inversiune I de pol D. Fie 0, 1, 2 ceea ce devin punctele A, B, C. Indepărtând cazul banal în care A, B, C, D sunt aşezate pe acelaşi cerc, e clar că 0, 1, 2 formează sigur un veritabil triunghiu.

Să însemnăm provizoriu cu 3 punctul D şi cu 4 inversul său isogonal faţă de triunghiul 012.

Avem în unghiuri vectore modulo π, relaţiunile[1]) uşor de verificat

$$\overline{312} \equiv \overline{014},$$
$$\overline{321} \equiv \overline{024}.$$

Ele se mai scriu

$$\overline{312} \equiv \overline{012} + \overline{214},$$
$$\overline{321} \equiv \overline{021} + \overline{124}.$$

Scăzând şi ţinând seamă de ciclele de trei puncte care intervin, obţinem

$$\overline{132} \equiv \overline{102} + \overline{241}.$$

Avem, în definitiv, următoarea relaţie împreună cu analoagele ei, deduse prin permutarea punctelor 0, 1, 2:

$$(1)\qquad \begin{cases} \overline{132} + \overline{142} \equiv \overline{102} \\ \overline{230} + \overline{240} \equiv \overline{210} \\ \overline{031} + \overline{041} \equiv \overline{021} \end{cases}$$

1) Calculul cu astfel de unghiuri e stăpânit de următoarele identităţi:

$$\overline{ijk} + \overline{kji} \equiv 0 \quad , \quad \overline{ijk} + \overline{jki} + \overline{kij} \equiv 0.$$

Să introducem punctul lui MÖBIUS dela infinit, a cărui notaţie e ∞, şi să ne ridicăm la o interpretare circulară a figurii, considerând dreptele, veritabile cercuri ale „planului analagmatic“ care trec prin ∞.

Formăm următoarele tablouri de perechi de cercuri analagmatice

$$(I)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix}\infty 01\\ \infty 02\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\infty 12\\ \infty 10\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\infty 20\\ \infty 21\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}12\infty\\ 120\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}20\infty\\ 201\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}01\infty\\ 012\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(II)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix}\infty 03\\ \infty 04\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\infty 13\\ \infty 14\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\infty 23\\ \infty 24\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}123\\ 124\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}203\\ 204\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}013\\ 014\end{pmatrix} \end{cases}$$

Ne încredinţăm imediat că perechile care ocupă acelaşi loc în tablou sunt în fascicol şi isogonale: cele din primele linii, în virtutea construcţiei bine cunoscute a punctelor isogonale 3, 4; cele din ultimele linii însă, în virtutea relaţiilor (1), convenabil interpretate.

Să revenim prin aceeaşi inversiune I la figura iniţială. Fie E inversul punctului nou introdus 4. Tablourile (I) şi (II) se transformă în alte tablouri de perechi de cercuri analagmatice respectiv în fascicol şi isogonale. E inutil să reproducem noile tablouri, e de ajuns să dăm lista substituirii de puncte

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \infty & 3 & 4 \\ A & B & C & D & \infty & E \end{matrix}$$

Cum tablourile au acum o constituţie omogenă e de ajuns să ne oprim şi să raţionăm asupra primelor perechi corespunzătoare

$$\begin{pmatrix}DAB\\ DAC\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}DA\infty\\ DAE\end{pmatrix}.$$

Proprietatea de isogonalitate a acestor perechi în fascicol înfăţişează cercul DAE ca isogonalul coardei comune DA faţă de cercurile de bază DAB şi DAC. Această proprietate e caracteristică, după cum se ştie cercului de similitudine al cercurilor de bază.

Insemnând, pentru prescurtare cu Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3 cercurile ABC, DBC, DCA, DAB, conchidem că cercurile de similitudine ale celor şase perechi Γ_i, Γ_j trec prin punctul E.

Dacă E e exterior unuia din cercurile Γ_i, e exterior tuturor patru, în virtutea proprietăţii sale de centru de asemănare pentru fiecare din perechile Γ_i, Γ_j. In acest caz nu mai putem vorbi de un unghiu *real* sub care cercurile Γ_i se văd din E.

2⁰. *Condiţia de realitate a unghiului.* E mai la îndemână să cercetăm întâiu condiţia de imaginalitate a aceluiaşi unghiu. Această din urmă împrejurare e echivalentă cu aflarea punctului E în interiorul unuia din cercurile Γ_i (de exemplu Γ_3) sau, în termeni analagmatici, cu aflarea punctelor E şi ∞ de părţi diferite ale cercului Γ_3.

Această condiţie să o transpunem figurii obţinute prin aplicarea inversiunii I. Punctul 3 e obligat să se găsească împreună cu inversul său isogonal 4 de părţi diferite ale cercului 012.

Dar punctele 0, 1, 2, ∞ împart planul analagmatic prin cercurile determinate de câte trei din ele în patru domenii triunghiulare şi şase domenii biunghiulare. Se vede uşor că situaţia care ne interesează apare atunci şi numai atunci când 3 cade într'un biunghiu al împărţirii (0 1 2 ∞). Revenind la prima figură, conchidem că ∞ trebue să cadă într'un biunghiu al împărţirii (ABCD).

Pentru a preciza să presupunem că domeniul împărţirii (ABCD) în care cade ∞ e biunghiul (exterior) al cercurilor ACB şi ADB. Aceasta obligă punctele C şi D să se găsească pe arcele interioare ale celor două cercuri secante. Prin urmare patrulaterul elementar ale cărui vârfuri în ordine circulară sunt ABCD e neapărat convex.

Reciproc, dacă punctele A, B, C, D se lasă ordonate după vârfurile unui patrulater convex, punctul ∞ cade într'un biunghiu al împărţirii (ABCD).

Intr'adevăr, fie ABCD acea ordine. Avem pentru unghiurile interioare ale acestui patrulater convex neinscriptibil

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 2\pi$$

$$\hat{A} + \hat{B} \neq \pi \quad , \quad \hat{C} + \hat{D} \neq \pi.$$

Aşa dar una din sumele $\hat{A}+\hat{B}$, $\hat{C}+\hat{D}$ e sigur mai mare ca π. Fie, pentru a preciza, $\hat{C}+\hat{D}$ acea sumă. Avem:

$$\hat{C} > \pi - \hat{D} \quad , \quad \hat{D} > \pi - \hat{C}.$$

Cum C şi D sunt, prin ipoteză de o parte şi de alta a diagonalei AB, neegalităţile de mai sus arată că C şi D se află pe arcele interioare ale cercurilor secante ACB, ADB. Se vede uşor că punctul ∞ cade într'adevăr în biunghiul exterior al celor două cercuri, în împărţirea (ABCD).

Incât putem afirma în toată rigoarea:

Condiţia necesară şi suficientă ca unghiul de egală vedere al cercurilor Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3, *din* E, *să fie real, e ca punctele* A, B, C, D *să nu poată servi ca vârfuri ale unui patrulater elementar convex.*

3°. *Soluţie analitică.* Printr'o proiecţie stereografică, transpunem figura din plan, pe sferă. Imaginele punctelor nesituate pe acelaşi cerc A, B, C, D (pe care continuăm să le arătăm cu aceleaşi litere) formează în spaţiul sferei un tetraedru propriu zis, pe care îl vom lua ca reper al unor coordonate proiective. Ecuaţia sferei e atunci de forma

$$a_{ij} x_i x_j = 0 \quad , \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad |a| \neq 0,$$

cu condiţia expresă

$$\boxed{i \neq j} .$$

Patrupunctul A, B, C, D e real. Cazul în care două din puncte s'ar găsi pe o generatoare a sferei se exclude dela sine. Putem aşa dar presupune

$$\boxed{a_{ij} \neq 0} .$$

Făcând schimbarea de punct-unitate

$$x_i^* = \frac{x_i}{(a_{ij} a_{ik} a_{il})^{\frac{1}{2}}}$$

ecuaţia sferei se aduce la forma canonică

$$(2) \qquad (x\,x) \equiv \sum_{1,2,3} A_1 (x_0 x_1 + x_2 x_3) = 0.$$

Apare pe această ecuație imediat proprietatea sferei de a admite următoarea transformare birațională involutivă, în ea însăși:

$$(3) \qquad x_i^* = \frac{1}{x_i} \quad , \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

După această pregătire să considerăm două puncte x', x'' ale sferei și un punct x (polul unui cerc) în afara sferei:

$$(x'\,x') = 0 \quad , \quad (x''\,x'') = 0 \quad , \quad (x\,x) \neq 0.$$

E clar că formațiunea

$$(4) \qquad \omega = \frac{(x'x'')\,(x\,x)}{(x\,x')\,(x\,x'')},$$

— unde $(x\,x)$ înseamnă forma pătratică (2) iar $(x'\,x'')$, de exemplu, polarizarea ei în raport cu rândurile de variabile x', x'', — e un invariant absolut al grupului de transformări lineare care lasă sfera în repaus: așa dar al grupului transformărilor circulare (sau analagmatice) din plan.

Dar două puncte x', x'' și un cerc x au un sistem complect de invarianți analagmatici redus la un singur individ. Într'adevăr, dând lui x'' funcțiunea de punct ∞, chestiunea revine la sistemul complect de invarianți ai unui cerc x și unui punct x', față de grupul asemănărilor. Se vede imediat că sistemul e compus dintr'un singur număr.

Să ducem acum prin punctele x', x'' cele două cercuri tangente la x. Unghiul lor de tăiere θ e încă un invariant analagmatic al figurii și ca atare avem (întru cât ω e un sistem complect de invarianți):

$$(5) \qquad \theta = f(\omega)$$

unde f e o *anume*[1]) funcțiune de argumentul indicat.

Așa fiind să aplicăm aceste rezultate generale în cazul când x', x'' sunt două puncte corespunzătoare în transformarea (3) iar x polul unuia din cercurile Γ_i (de exemplu Γ_0) față de sfera (2), așa dar polul feței $x_0 = 0$ a tetraedrului de referință.

Avem așa dar pentru x' și x'':

$$(6) \qquad x_i' = \xi_i \quad , \quad x_i'' = \frac{1}{\xi_i} \quad , \quad (\xi\,\xi) = 0.$$

---

1) Un calcul, asupra căruia nu e locul să ne oprim, dă anume

$$\frac{1}{2}\omega = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Polurile feţelor tetraedrului de referinţă sunt evident determinanţii de ordinul al treilea, luaţi pe linii, ai matricei

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} 0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & 0 & A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 & 0 & A_1 \\ A_3 & A_2 & A_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Coordonatele ξ_i^0 $(i = 0, 1, 2, 3)$ ale polului feţei $x_0 = 0$ sunt minorii primei linii. Luând alături de (6)

$$(6') \qquad x = \xi^0$$

formula (4) ne dă

$$(8) \qquad \omega_0 = \frac{A_1 A_2 A_3}{|A|} \sum_{1,2,3} A_1 \left(\frac{\xi_0}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi_0} + \frac{\xi_2}{\xi_3} + \frac{\xi_3}{\xi_2} \right),$$

unde $|A|$ înseamnă determinantul matricei (7).

Schimbând rolul indicilor 0, 1, 2, 3 în formula (8), găsim

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3$$

şi deci, pe temeiul lui (5),

$$(9) \qquad \theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3.$$

Dacă specializăm punctul $x' = \infty$ luând $x'' = E$, relaţiile (9) ne dau proprietatea din enunţ.

4°. *O întărire a teoremei precedente.* Să considerăm una din cele ∞^2 cuadrice Q a căror ecuaţie e cuprinsă în (2) pentru A_1, A_2, A_3 variabili. Ecuaţia tangenţială a uneia din ele este

$$(10) \qquad \begin{aligned} &A_1 A_2 A_3 (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &+ \sum_{1,2,3} A_1 (A_1^2 - A_2^2 - A_3^2)(y_0 y_1 + y_2 y_3) = 0. \end{aligned}$$

Să observăm că transformarea (2) permută proiectiv şi involutiv planele din fascicolul fiecărei muchii a tetraedrului de referinţă. De exemplu între planele $y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0$ ale muchiei $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ induce următoarea involuţie

$$y_2' y_2'' + y_3' y_3'' = 0$$

de elemente duble

$$y_0 = 0 \ , \ y_1 = 0 \ , \ y_2 = 1 \ , \ y_3 = 1$$

$$y_0 = 0 \ , \ y_1 = 0 \ , \ y_2 = 1 \ , \ y_3 = -1.$$

Se citeşte pe ecuaţia (10) că elementele duble sunt conjugate în raport cu Q.

Să luăm pe Q ca absolut al unei metrice cayleyene cu 3 dimensiuni. Observaţia noastră are următoarea consecinţă: isogonalele în această metrică ale planelor duse prin muchiile tetraedrului de referinţă şi punctul ∞ de pe sferă sunt şase plane care concură în punctul E, introdus în 3^0, de asemenea aşezat pe sferă.

Fie Σ urma lui Q pe sferă. Ea trece evident prin A, B, C, D şi prin centrele bisectoare A', B', C', D' de coordonate

$$x_i = \varepsilon_i \quad , \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad , \quad \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1,$$

în care cercurile bisectoare ale perechilor Γ_i, Γ_j concură câte trei. Să însemnăm cu Ω conica de contur aparent a lui Q relativ la punctul ∞ şi să proiectăm întreaga figură din ∞ pe un plan perpendicular pe diametrul acestui punct. Insemnând curbele în proiecţie cu aceeaşi literă ca în spaţiu, se vede uşor din cele spuse că avem următoarea proprietate:

Dacă Σ e una din cele ∞^1 cuartice bicirculare ce trec prin vârfurile patrupunctului ABCD şi patrupunctului său bisector A'B'C'D' considerăm una din conicele Ω cuadruplu tangentă acesteia şi metrica lui CAYLEY plană de absolut Ω. Curba Σ apare punctual-orientată în această metrică.

Fie atunci A^+, B^+, C^+, D^+ orientările pe care Σ le împrumută vârfurilor patrupunctului şi γ_0, γ_1, γ_2, γ_3 ciclele cayleyene determinate de aceste puncte luate câte trei.

Ciclele isogonale ale coardelor comune, în fiecare din fascicolele (γ_i, γ_j) faţă de ciclele γ_i, γ_j (evident, în metrica adoptată) sunt şase cicle care admit un ciclu ortogonal comun E.

Oricare ar fi Σ şi Ω, centrul ciclului cayleyan e e punctul E *introdus în* 3^0.

Notă. — Nu s'a primit nicio soluţie vrednică de luat în seamă la problema de mai sus, cu tot caracterul ei elementar. Aceasta arată că corespondenţii *Gazetei Matematice* rămân legaţi de un anume tip de probleme de geometrie, arătând sfială sau chiar respingere pentru problemele cu un oarecare interes teoretic.

In ceea ce priveşte chestiunea în sine şi legătura ei cu probleme mai generale, trimitem la „*Articol de geometrie*", G. M. XXXVII, 3—5 şi la broşura noastră „*Untersuchungen über die Cliffordschen Ketten*", Bucureşti, F. Göbl 1932.

D. B.

PROBLEMA 5024. *Pe laturile* BA *şi* CA *ale unui triunghiu oarecare* ABC, *se iau lungimile* BA_1 *şi* CA_2 *egale cu o lungime* λ. *Dreptele* A_1C *şi* A_2B *se întâlnesc în* L.

Făcând aceeaşi operaţie pe laturile CB *şi* AB, *precum şi pe* AC *şi* BC, *se obţin punctele* M *şi* N.

Să se arate că atunci când λ *variază, locul punctelor* L, M, N *sunt trei drepte ce se întâlnesc în acelaşi punct.*

N. N. VELICESCU.

Soluţie geometrică dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (clasa VIII-a liceul „T. Maiorescu", Bucureşti), M. AL. VASILESCU-ŞTABU (clasa VII-a liceul „Gh. Lazăr", Bucureşti), PAUL P. DRĂGHICESCU şi AUREL N. POPA (liceul militar, Iaşi).

Să căutăm locul geometric al punctului L, când λ variază. Pentru aceasta facem întâi $\lambda = \overline{CA} = b$ şi $\lambda = \overline{BA} = c$ şi căpătăm punctele A' şi A" aşezate respectiv pe BA şi CA astfel încât $\overline{BA'} = b$, iar $\overline{CA''} = c$. Evident că A' şi A" fac parte din loc.

Să luăm acum o valoare arbitrară a lui λ, să construim punctele A_1 şi A_2, precum şi punctul L, conform enunţului.

Triunghiul ABA_2 tăiat de transversala CA_1 ne dă:

$$\frac{\overline{LA_2}}{\overline{LB}} \times \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A}} \times \frac{\overline{CA}}{\overline{CA_2}} = 1.$$

Insă $\overline{BA_1} = \overline{CA_2} = \lambda$, iar $\overline{A_1A} = c - \lambda$, care introduse mai sus dă:

$$(1) \qquad \frac{\overline{LA_2}}{\overline{LB}} = -\frac{c-\lambda}{b}.$$

Acelaşi triunghiu tăiat de transversala A'A", care întâlneşte pe BA_2 în L', ne dă:

$$\frac{\overline{L'A_2}}{\overline{L'B}} \times \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'A}} \times \frac{\overline{A''A}}{\overline{A''A_2}} = 1.$$

Insă $\overline{AA'} = \overline{A''A} = b - c$, iar $\overline{A_2A''} = c - \lambda$, încât obţinem:

$$(2) \qquad \frac{\overline{L'A_2}}{\overline{L'B}} = -\frac{c-\lambda}{b}.$$

Comparând (1) cu (2) se vede că punctul L′ coincide cu L, adică oricare ar fi λ, punctul L se găseşte pe dreapta A′A″, care este locul geometric căutat.

Să notăm cu αβγ triunghiul anticomplementar al lui ABC. Făcând $\lambda = \infty$, L vine în α, deci α aparţine locului. De altă parte triunghiul AA′A″ este isoscel, aşa încât dreapta A′A″α este perpendiculară pe bisectoarea exterioară a unghiului A deci paralelă cu bisectoarea lui interioară.

Rezultă că dreapta-loc geometric a punctului L este bisectoarea interioară, ce pleacă din vârful α, a triunghiului anticomplementar lui ABC.

Este evident atunci că cele trei drepte-locuri ale punctelor L, M, N se întâlnesc în centrul cercului înscris triunghiului αβγ.

Au dat soluţii analitice D-nii: CERCHEZ MIHU, TEODOR ŞERBAN (student inginer), DUMITRU D. ENESCU şi CONST. PĂNTESCU (liceul militar, Chişinău), PAUL DRĂGHICESCU (liceul militar, Iaşi), iar D-nul GH. BOGDAN (liceul militar, Iaşi) a soluţionat numai prima parte a problemei.

S'au primit şi soluţii eronate.

Observaţiuni. 1°. D-nul M. AL. VASILESCU-ŞTABU arată că prima parte a problemei este demonstrată în Ex. de G. par F. G. M. Nr. 1546 (*c*) pag. 648 unde se precizează că locul găsit este bisectoarea interioară a triunghiului anticomplementar, aşa încât partea a doua rezultă.

2°. *Altă soluţie geometrică.* Deoarece $\overline{BA_1} = \overline{CA_2}$, punctele A_1 şi A_2 descriu diviziuni omografice asemenea pe dreptele BA şi CA. Atunci razele BA_2 şi CA_1 fac parte din două fascicole omografice care au raza comună BC. Se ştie că în acest caz locul geometric al intersecţiei L a razelor omoloage este o dreaptă. Particularizând pe λ găsim punctele A′, A″, α. Restul ca la prima soluţie.

G. D. S.

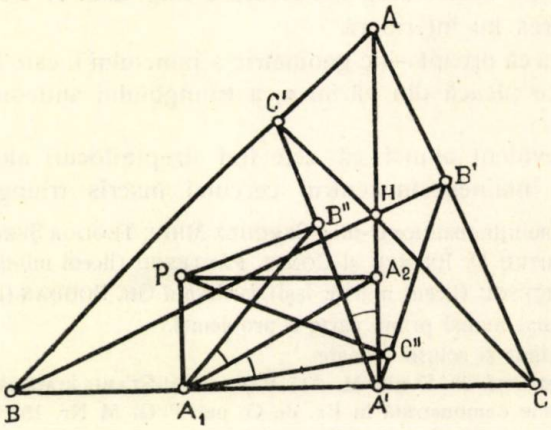
PROBLEMA 5081. *Un punct* P *din planul triunghiului* ABC *se proiectează în* A_1, B_1, C_1 *pe laturile* BC, CA, AB *şi în* A_2, B_2, C_2 *pe înălţimile* AA′, BB′, CC′. *Să se demonstreze că dreptele* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *concură în centrul cercului circumscris triunghiului* A′B′C′.

V. THÉBAULT.

Soluţie dată de D-nii: M. AL. VASILESCU-ŞTABU, M. I. TREFILOV şi OCT. E. GHEORGHIU.

Fie A″, B″, C″ proiecţiile lui P pe laturile triunghiului A′B′C′. Cercul de diametru PA′ trece prin punctele A_1, A_2, B″, C″ pentrucă unghiurile PA_1A', PA_2A', PB″A′, PC″A′ sunt drepte prin construcţie. Din patrulaterele inscriptibile $B''A_1A'A_2$ şi $A_2A_1A'C''$ rezultă

$$\sphericalangle B''A_1A_2 = \sphericalangle B''A'A_2$$
$$\sphericalangle A_2A_1C'' = \sphericalangle A_2A'C''.$$



Dar unghiurile din membrii doi ai egalităţilor precedente sunt egale căci înălţimea AA′ este bisectoarea unghiului C′A′B′. Deci

$$\sphericalangle B''AA_2 = \sphericalangle C''A_1A_2.$$

Rezultă că triunghiurile dreptunghice $A_1B''A_2$, $A_1C''A_2$, care au unghiurile din A_1 egale şi ipotenuza A_1A_2 comună sunt egale şi deci

$$A_1B'' = A_1C'' \quad , \quad A_2B'' = A_2C'',$$

iar A_1A_2 care este bisectoarea unghiului $B''A_1C''$, este perpendiculară pe mijlocul lui B″C″.

La fel se arată că B_1B_2, C_1C_2 sunt perpendiculare pe mijloacele laturilor C″A″, A″B″. Rezultă că A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt mediatoare în triunghiul A″B″C″ şi deci concură în centrul cercului circumscris acestui triunghiu.

Notă. 1°. D-l D. Ripianu a trimis o bună soluţie analitică.

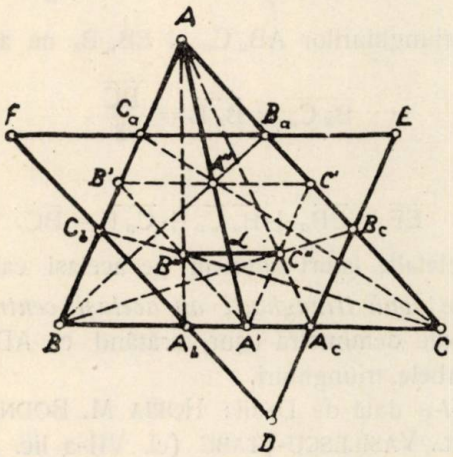
2°. Problema 5081 este un caz particular al problemei 2916 rezolvată în *Mathesis* L. — 230, unde punctul P este un triunghiu QRS cu laturile perpendiculare pe laturile triunghiului ABC.

G-l Gh. B.

PROBLEMA 5108. *Intr'un triunghiu oarecare* ABC, *fie* A″, B″, C″ *mijloacele laturilor triunghiului său median. Dreptele* AB″ *şi* AC″ *taie dreapta* BC *în* A_b *şi* A_c. *Analog se găsesc punctele* B_a, B_c, C_a, C_b. *Să se arate că triunghiul format de dreptele* $B_a C_a$, $A_b C_b$, $A_c B_c$, *are laturile paralele cu laturile triunghiului* ABC *şi este egal cu el.*

ERNEST GH. BEIU-PALADI.

Soluţia I-a dată de D-nii: MIREL D. STOENESCU (Şc. ofiţeri de aviaţie), ALDEA V. MINEA (Buzău), IULIAN PETRESCU (lic. Lazăr, Bucureşti), MIRCEA D. POPA, CONST. I. PASCARU, IOAN V. JAREGHIE, PAUL P. DRĂGHICESCU (lic. mil. Iaşi), EUGEN GH. VIJELIE (lic. mil. „N. Filipescu"), D. D. BOIANGIU (bacalaureat, T.-Severin), EMIL S. MODÂLCĂ (lic. T.-Severin), OCT. E. GHEORGHIU.



Să notăm cu A′, B′, C′ mijloacele laturilor BC, CA, AB. Se ştie că punctul A″ aparţine medianei AA′. In patrulaterul complet $AB_a A''C_a BC$ diagonala BC e tăiată de celelalte două diagonale în puncte conjugate armonic faţă de B şi C. Cum diagonala AA″ trece prin mijlocul A′ al laturii $\overline{BC}$, diagonala $B_a C_a$ va întâlni la infinit dreapta BC, deci $B_a C_a$ e paralelă cu BC. La fel se arată că $C_b A_b$ şi $A_c B_c$ sunt paralele respectiv cu AC şi AB. S'a demonstrat astfel că triunghiul DEF format de dreptele $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$, are laturile paralele cu laturile triunghiului ABC.

Fie α intersecţia laturii $B''C''$ cu AA'. Figura $A'B''A''C''$ fiind paralelogram, α se găseşte la mijlocul lui $B''C''$ şi de asemeni la mijlocul lui $A'A''$. E uşor de văzut că A' e mijlocul segmentului $A_b A_c$, aşa încât $\overline{BA_b} = \overline{CA_c}$. Din cele de mai sus deducem:

$$\frac{\overline{A\alpha}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{A_bA_c}} \quad \therefore \quad \overline{A_bA_c} = \overline{B''C''}\,\frac{\overline{AA'}}{A\alpha} = \frac{1}{4}\,\overline{BC} \times \frac{4}{3} = \frac{\overline{BC}}{3}.$$

Rezultă că $\overline{BA_b} = \overline{CA_c} = \dfrac{\overline{BC}}{3} = \overline{A_b A_c}$. Analog pentru celelalte laturi. De aci se desprinde imediat egalitatea triunghiurilor $CA_c B_c$ şi $EB_a B_c$ precum şi a triunghiurilor $BA_b C_b$ şi $FC_a C_b$ ceea ce ne dă:

$$\overline{EB_a} = \overline{CA_c} = \overline{BA_b} = \overline{FC_a} = \frac{\overline{BC}}{3},$$

iar egalitatea triunghiurilor $AB_a C_a$ şi $EB_a B_c$ ne arată că

$$\overline{B_a C_a} = \overline{B_a E} = \frac{\overline{BC}}{3}.$$

Conchidem:

$$\overline{EF} = \overline{EB_a} + \overline{B_a C_a} + \overline{C_a F} = \overline{BC}.$$

Pentru celelalte laturi obţinem pe aceiaşi cale $\overline{FD} = \overline{CA}$ şi $\overline{DE} = \overline{AB}$. *Cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate,* lucru ce se poate demonstra uşor, arătând că AD, BE, CF sunt mediane în ambele triunghiuri.

Soluţia II-a dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU (bacalaureat), M. AL. VASILESCU-ŞTABU (cl. VII-a lic. „Lazăr", Buc.), MIHAIL I. TREFILOV (cl. VIII-a lic. „N. Bălcescu", Brăila), PAUL P. DRĂGHICESCU (cl. VII-a lic. mil. Iaşi), GH. D. SBÂRNEA (clasa VIII-a lic. Tecuci).

Triunghiul $AA'B$ tăiat de transversala $CA''C_a$ ne dă:

$$\frac{\overline{C_a A}}{\overline{C_a B}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{A''A'}}{\overline{A''A}} = 1 \quad \therefore \quad \frac{\overline{AC_a}}{\overline{C_a B}} = \frac{1}{2}$$

căci

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} = 2 \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{A''A'}}{\overline{A''A}} = -1.$$

Analog găsim că

$$\frac{\overline{AB_a}}{\overline{B_a C}} = \frac{1}{2} \quad \text{deci} \quad \frac{\overline{AC_a}}{\overline{C_a B}} = \frac{\overline{AB_a}}{\overline{B_a C}}$$

adică dreapta $B_a C_a$ este paralelă cu BC. Tot din rapoartele de mai sus, adunând numărătorii la numitori, obţinem: $\frac{\overline{AC_a}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$. Acesta fiind raportul de asemănare al triunghiurilor $AB_a C_a$, ACB deducem:

$$\overline{AC_a} = \frac{\overline{AB}}{3} \; ; \; \overline{B_a C_a} = \frac{\overline{BC}}{3} \; ; \; \overline{AB_a} = \frac{\overline{AC}}{3} .$$

Procedeu analog pentru triunghiurile $BC_b A_b$ şi $CA_c B_c$. Restul ca la prima soluţie.

D-nii T. MIROSLAV şi C. I. CRISTEA (lic. mil. Chişinău) pornesc dela proprietatea că „dreptele ce unesc un vârf al unui paralelogram cu mijloacele laturilor neadiacente împart diagonala ce nu conţine acel vârf, în 3 părţi egale". Astfel în paralelogramul AB'A'C' diagonala B'C e împărţită în 3 părţi egale ceea ce arată că $\overline{BA_b} = \overline{A_b A_c} = \overline{A_c C} = \frac{BC}{3}$. Restul ca la prima soluţie.

G. D. S.

PROBLEMA 5119. *Se face o înmulţire de două numere întregi şi se observă că la factori, la produsele parţiale şi la produsul total nu se află aceeaşi cifră de două ori. Care sunt factorii?*

(Urmare dela pag. 87). I. IONESCU.

6. $cba \times n = srqp$. Calea de urmat este aceeaşi ca la Nr. 5, luând însă pentru *cba* limitele date sau valori superioare lor, nedepăşind numerele de trei cifre. Se găsesc următoarele 144 de soluţii:

$2\times534=1\,068$, $2\times538=1\,076$, $2\times539=1\,078$, $2\times543=1\,086$,
$2\times548=1\,096$, $2\times654=1\,308$, $2\times679=1\,358$, $2\times685=1\,370$,
$2\times769=1\,538$, $2\times793=1\,586$, $2\times835=1\,670$, $2\times845=1\,690$,
$2\times853=1\,706$, $2\times865=1\,730$, $2\times935=1\,870$, $3\times568=1\,704$,
$3\times582=1\,746$, $3\times594=1\,782$, $3\times609=1\,827$, $3\times658=1\,976$,
$3\times819=2\,457$, $3\times906=2\,718$, $3\times916=2\,748$, $3\times918=2\,754$,

$3\times954=2\,862$, $4\times259=1\,036$, $4\times392=1\,568$, $4\times517=2\,068$,
$4\times519=2\,076$, $4\times579=2\,316$, $4\times695=2\,780$, $4\times709=2\,836$,
$4\times715=2\,860$, $4\times789=3\,156$, $4\times792=3\,168$, $4\times795=3\,180$,
$4\times815=3\,260$, $4\times819=3\,276$, $4\times879=3\,516$, $4\times907=3\,628$,
$4\times918=3\,672$, $5\times268=1\,340$, $5\times276=1\,380$, $5\times278=1\,390$,
$5\times286=1\,430$, $5\times296=1\,480$, $5\times328=1\,640$, $5\times364=1\,820$,
$5\times372=1\,860$, $5\times384=1\,920$, $5\times436=2\,180$, $5\times438=2\,190$,
$5\times476=2\,380$, $5\times478=2\,390$, $5\times628=3\,140$, $5\times682=3\,410$,
$5\times728=3\,640$, $5\times762=3\,810$, $5\times764=3\,820$, $5\times782=3\,910$,
$5\times784=3\,920$, $5\times826=4\,130$, $5\times832=4\,160$, $5\times862=4\,310$,
$5\times872=4\,360$, $5\times962=4\,810$, $5\times972=4\,860$, $6\times289=1\,754$,
$6\times293=1\,758$, $6\times307=1\,872$, $6\times309=1\,854$, $6\times453=2\,718$,
$6\times485=2\,910$, $6\times529=3\,174$, $6\times703=4\,218$, $6\times715=4\,290$,
$6\times817=4\,902$, $6\times903=5\,418$, $6\times913=5\,478$, $7\times208=1\,456$,
$7\times209=1\,463$, $7\times308=2\,156$, $7\times409=2\,863$, $7\times456=3\,192$,
$7\times458=3\,206$, $7\times586=4\,102$, $7\times589=4\,123$, $7\times693=4\,851$,
$7\times802=5\,614$, $7\times803=5\,621$, $7\times843=5\,901$, $7\times859=6\,013$,
$7\times893=6\,251$, $7\times902=6\,314$, $7\times904=6\,328$, $7\times912=6\,384$,
$8\times245=1\,960$, $8\times307=2\,456$, $8\times345=2\,760$, $8\times407=3\,256$,
$8\times459=3\,672$, $8\times465=3\,720$, $8\times469=3\,752$, $8\times512=4\,096$,
$8\times537=4\,296$, $8\times579=4\,632$, $8\times592=4\,736$, $8\times615=4\,920$,
$8\times634=5\,072$, $8\times674=5\,392$, $8\times679=5\,432$, $8\times703=5\,624$,
$8\times704=5\,632$, $8\times742=5\,936$, $8\times753=6\,024$, $8\times754=6\,032$,
$8\times794=6\,352$, $8\times915=7\,320$, $8\times932=7\,456$, $8\times942=7\,536$,
$8\times953=7\,624$, $8\times954=7\,632$, $9\times204=1\,836$, $9\times206=1\,854$,
$9\times207=1\,863$, $9\times306=2\,754$, $9\times402=3\,618$, $9\times403=3\,627$,
$9\times408=3\,672$, $9\times412=3\,708$, $9\times418=3\,762$, $9\times512=4\,608$,
$9\times602=5\,418$, $9\times603=5\,427$, $9\times608=5\,472$, $9\times638=5\,712$,
$9\times647=5\,823$, $9\times702=6\,318$, $9\times712=6\,408$, $9\times804=7\,236$,
$9\times806=7\,254$, $9\times814=7\,326$, $9\times834=7\,506$, $9\times836=7\,524$.

Soluţiuni parţiale de D-l STELIAN CETĂŢIANU.

7. $dcba \times n = srqp$.

Cercetările în acest caz, ca şi în următorul, sunt mai laborioase. Soluţiuni izolate se pot găsi uşor. Astfel se pot alătura două soluţii dela Nr. 3 care să aibă, la deînmulţite şi la produse, cifrele diferite. Astfel din soluţiile $2\times15=30$ şi $2\times48=96$ scoatem soluţiile $2\times1548=3096$ şi $2\times4815=9630$. D-l ST. CETĂŢIANU a găsit soluţii adăogând la începutul sau finele unei soluţii dela

Nr. 5 cifre neîntrebuinţate care să facă o soluţie pentru cazul (7). D-sa a găsit astfel 15 soluţii, în loc de 27 câte comportă cazul (7) şi 5 soluţii din 11 pentru cazul următor. Toate soluţiile nu se pot avea decât cercetând cifrele din aproape în aproape. Pentru un n dat se alege a aşa ca p să difere de n şi a. Se ia apoi b aşa ca q să difere de n, a, b, p. Se procede tot aşa mai departe alegând pe c şi pe d. Se găsesc următoarele 27 soluţii:

$2\times1\,548=3\,096$, $2\times1\,845=3\,690$, $2\times3\,079=6\,158$, $2\times3\,485=6\,970$,
$2\times3\,543=7\,096$, $2\times3\,845=7\,690$, $2\times4\,518=9\,036$, $2\times4\,538=9\,076$,
$2\times4\,685=9\,370$, $2\times4\,815=9\,630$, $2\times4\,835=9\,670$, $2\times4\,853=9\,706$,
$2\times4\,865=9\,730$, $3\times1\,609=4\,827$, $3\times1\,694=5\,082$, $3\times1\,809=5\,427$,
$3\times1\,908=5\,724$, $3\times2\,058=6\,174$, $4\times1\,738=6\,952$, $4\times1\,809=7\,236$,
$4\times2\,079=8\,316$, $5\times1\,278=6\,390$, $5\times1\,394=6\,920$, $5\times1\,846=9\,230$,
$5\times1\,864=9\,320$, $6\times1\,309=7\,854$, $7\times1\,209=8\,463$.

8. $dcba \times n = tsrqp$.

Se urmează aceeaşi cale ca şi la Nr. precedent şi se găsesc următoarele 11 soluţii:

$3\times5\,694=17\,082$, $3\times6\,819=20\,457$, $3\times6\,918=20\,754$, $3\times8\,169=24\,507$,
$3\times9\,168=27\,504$, $4\times3\,907=15\,628$, $4\times9\,127=36\,508$, $6\times5\,817=34\,902$,
$7\times4\,093=28\,651$, $7\times9\,304=65\,128$, $7\times9\,403=65\,821$.

*

Rezumând, găsim că problema 5119 are

$$(2+20+31+76+50+144+27+11)=361$$

soluţii. Cele mai interesante sunt ultimele, care întrebuinţează toate cifrele câte o singură dată fiecare.

I. I.

PROBLEMA 5307. *Se dă un triunghiu* ABC *şi două puncte fixe* P, Q *aşezate respectiv pe dreptele* AB *şi* AC. *Punctul* M *fiind variabil în planul triunghiului, paralelele duse prin* P *şi* Q *la dreapta* AM, *întâlnesc dreptele* BM *şi* CM *respectiv în* H *şi* K. *Să se arate că dreapta* HK *trece printr'un punct fix.*

GH. D. SIMIONESCU.

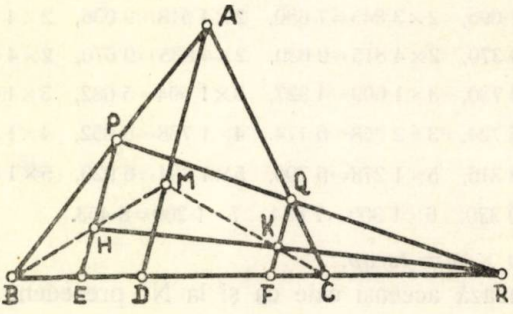
Soluția I-a dată de D-l EUG. GH. VIJELIE (cl. 8-a lic. mil. „N. Filipescu", Predeal)

Fie

$D \equiv (AM, BC)$; $E \equiv (PH, BC)$; $F \equiv (QK, BC)$.

In triunghiul ABD paralela PE la AD ne dă:

$$(1) \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{HE}}.$$



In triunghiul ACD paralela QF la AD dă:

$$(2) \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{KF}}.$$

Comparând (1) cu (2) rezultă:

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{QK}}{\overline{KF}}.$$

Dreptele PE și QF fiind paralele, relația aceasta spune că PQ, HK și BC sunt concurente, deci HK trece prin intersecția dreptelor BC și PQ.

Soluția II-a dată de D-nii: HORIA M. BODNĂRESCU și MIHAIL I. TREFILOV (elevi ingineri, Buc.), IULIAN PETRESCU (lic. „Lazăr", Buc.), PAUL P. DRĂGHICESCU, Z. C. IVAN, CONST. PANTELIMON, MIRCEA D. POPA (elevi lic. mil. Iași).

Notăm cu R intersecția (HK, BC). Triunghiul MBC tăiat de transversala HK ne dă:

$$(1) \qquad \frac{\overline{RB}}{\overline{RC}} \times \frac{\overline{KC}}{\overline{KM}} \times \frac{\overline{HM}}{\overline{HB}} = 1.$$

Insă

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{HM}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$$

care înlocuite în (1) dă

$$\frac{\overline{RB}}{\overline{RC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Conform reciprocei teoremei lui MENELAUS, această relaţie arată că punctele P, Q, R sunt colineare, cu alte cuvinte HK trece prin intersecţia dreptelor PQ şi BC.

Soluţia III-a dată de D-l MIRCEA STĂNCULESCU (elev-inginer Bucureşti).

Să considerăm un plan oarecare trecând prin BC, iar M, H, K proiecţiile, după aceeaşi direcţie, a punctelor A, P, Q.

Dreapta HK fiind intersecţia planelor MBC şi PHKQ va întâlni atât dreapta BC cât şi PQ. De asemeni dreptele PQ şi BC sunt în acelaşi plan, deci se vor întâlni (la distanţă finită sau infinită). Insă dreapta BC nu poate întâlni planul PHKQ decât într'un singur punct, prin care va trece deci HK şi PQ.

Proiectând această figură din spaţiu pe un plan se obţine problema propusă.

D-l C. D. EFTIMIE a dat o soluţie geometrică bună însă fără a observa că punctul R se află pe latura BC.

D-nii IOAN PINTILIE şi GH. BROŞTEANU (elevi cl. 8-a lic. mil. Iaşi) au dat soluţii analitice. S'a mai primit o soluţie analitică în care punctele P şi Q au fost luate în poziţii particulare.

PROBLEMA 5617. *Se cere un cub de patru cifre, la care ştergând o cifră să ne rămână un pătrat de trei cifre.*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l P. V. CAZANACLI (Profesor, Chişinău). Cuburile numerelor de patru cifre sunt:

$10^3 = 1\,000$, $11^3 = 1\,331$, $12^3 = 1\,728$, $13^3 = 2\,197$,

$14^3 = 2\,744$, $15^3 = 3\,375$, $16^3 = 4\,096$, $17^3 = 4\,903$,

$18^3 = 5\,832$, $19^3 = 6\,859$, $20^3 = 8\,000$, $21^3 = 9\,261$.

Un pătrat nu se termină cu 2, 3, 7 sau 8. Cele terminate cu 0 au tot 0 la zeci; cele derminate cu 1, 4, 9 au zecile pereche; cele terminate cu 5 au 2 la zeci şi cele terminate cu 6 au o cifră nepereche la zeci.

Dacă la cuburile de mai sus suprimăm cifra unităţilor, condiţiunile aci arătate nu le îndeplinesc decât numerele 1 000, 4 096, 8 000, dela care suprimând cifra unităţilor ne rămân numerele 100, 409 şi 800. Dintre acestea numai 100 este pătrat. Deci *numărul 1 000 este o soluţie a problemei.*

Dacă la cubul 1 000 suprimăm prima cifră dela stânga ne rămâne 000 care se poate considera ca o *soluţie formală* a problemei. Dacă se suprimă a doua sau a treia cifră despre stânga, găsim numărul 100, soluţie găsită deja mai înainte. Deci cubul 1 000 constitue o soluţie *triplă* a problemei.

Prin suprimarea lui 8 dela cubul 8 000 ne rămâne soluţia 000, pe care am găsit-o şi mai sus ca *soluţie formală.* Dacă aceluiaşi cub îi suprimăm cifra sutelor sau a zecilor ne rămâne 800, care nu este pătrat.

Dacă menţinem cifra unităţilor, cubul 1 331 nu poate da soluţie căci unităţile 1 nu pot fi precedate de o cifră pereche. Cifra unităţilor nu poate fi menţinută la cuburile 1 728, 2 197, 3 375, 4 903, 5 832. Dela cubul 2 744 am putea obţine numerele de trei cifre 274 şi 244 care nu sunt pătrate. Dela cubul 4 096 am putea obţine pe 496 şi formal pe 096 care nu sunt pătrate. Cubul 6 859 nu ne-ar da decât pe 689, care nu e pătrat. Cubul 9 261 ne-ar da pe 921 şi 961 dintre care al doilea, fiind pătratul lui 31, este o soluţie a problemei.

Problema are dar ca soluţii cuburile 1 000 şi 9 261.

Au dat cele două soluţii D-nii: A. N. POPA, T. TURCULEŢ (Liceul Militar, Iaşi); M. MANOLACHE, O. C. GHEORGHIU (Liceul Internat, Iaşi); P. D. COLUMBEANU (Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal); D. MUSCELEANU (Liceul Caracal).

EXERCIŢII

18. Intr'un triunghiu oarecare avem relaţia

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}r_c+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}r_a+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}r_b=\frac{p^2}{r}-2(4R+r).$$

M. VELEA.

R. Din relaţiile

$$r_a = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad ; \quad r_b = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \text{ etc.}\ldots$$

se deduce

$$\frac{r_c r_a}{r_b} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} r_c \text{ etc.}\ldots$$

Deci

$$\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} r_c = \sum \frac{r_a r_b}{r_c} = \frac{\sum r_a^2 r_b^2}{r_a r_b r_c} =$$

$$\frac{(\sum r_a r_b)^2 - 2r_a r_b r_c \sum r_a}{r_a r_b r_c} = \frac{p^4}{p^2 r} - 2(4R + r) = \frac{p^2}{r} - 2(4R + r).$$

19. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare avem relaţiunea:

$$\sum a^2 \sin A \cos(B - C) = 6S.$$

EUGEN WEGENER.

R. Se deduce din relaţiile cunoscute:

$$\sum \sin^3 A \cos(B - C) = 3 \sin A \sin B \sin C;$$

$$\sin^2 A = \frac{a^2}{4R^2};$$

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2}; \quad \text{şi } pr = S.$$

20. Se consideră un dreptunghiu omogen ABCD, $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. O dreaptă variabilă rotindu-se în jurul punctului B, intersectează pe CD în M, determinând astfel un trapez de speţa 1-a sau a 2-a ABMD. Să se afle locul geometric al centrului de greutate, G, al ariei acestui trapez.

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Alegând axele de coordonate astfel încât $x'x \equiv AB$, $y'y \equiv DA$, obţinem următoarele puncte importante, cu coordonatele lor:

$$M(\alpha,\ b),\ N\left(0,\ \frac{ab}{a - \alpha}\right),\ P\left(\frac{a}{2},\ 0\right),\ Q(\alpha + a,\ b),\ R(-\alpha,\ 0).$$

Locul lui G se obţine eliminând parametrul α între ecuaţiunile:

$$(NP) \equiv 2bx + (a - \alpha)y - ab = 0$$

$$(QR) \equiv bx - (a + 2\alpha)y + b\alpha = 0.$$

Se găseşte astfel iperbola veritabilă

$$3bxy + 3ay^2 - 2b^2 x - 3aby + ab^2 = 0.$$

(Evident că $2y - b \neq 0$ şi finit, căci $y = \frac{b}{2}$ dă $\alpha = \infty$ sau nedeterminat cazuri în cari trapezul nu mai există).

PROBLEME PROPUSE

5654. Pentru plata unei chirii, o persoană împrumută 7000 lei cu $12^0/_0$ la Sf. Gheorghe (23 Aprilie), angajându-se a-i restitui la Sf. Dumitru (26 Octomvrie). Imprumutătorul îi reține dobânda la facerea împrumutului. Care este procentul real al acelui împrumut?

ION IONESCU.

5655. Să se găsească valorile numerelor întregi m, k, p, w pentru care valoarea lui

$$v = \frac{mw(3^p m + k_1)}{3^p mk_1 w - 1}$$

este un număr întreg.

O. N. ȚINO.

5656. Să se elimine u și v între relațiile:

$$\alpha(1-u^2)(1+v^2)+\beta(1+u^2)(1-v^2)+\gamma(1+u^2)(1+v^2)=0$$

$$\alpha u(1+v^2)+\beta v(1+u^2)=0$$

$$a\,\mathrm{arctg}u - b\,\mathrm{arctg}v = 0,$$

unde α, β, γ, a, b sunt constante date.

M. GHERMĂNESCU.

5657. Dacă b, a, c, sunt laturile unui triunghiu automedian, să se stabilească relația:

$$\frac{(a+b)(c-a)}{(a-b)(c+a)} \cdot \frac{k_1(a+b)+k_2(c-a)}{k_1(c+a)+k_2(a-b)} = \frac{k_3(a+b)^3+k_4(c-a)^3}{k_3(c+a)^3+k_4(a-b)^3}$$

k_1, k_2, k_3, k_4 fiind numere oarecare.

IONEL STAMATE.

5658. Să se arate că, dacă a_1, a_2, ..., a_n sunt lungimile laturilor unui poligon de n laturi, avem inegalitățile:

$$2^{m-1} \leqq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^m}{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m} \leqq n^{m-1},$$

unde m este un număr întreg pozitiv.

TIBERIU POPOVICIU.

5659. Să se arate că în orice triunghiu avem relația:

$$\sum \frac{\cos(A-B)\cdot\cos(B-C)}{\sin C \sin A} = 3 + 8\cos A \cos B \cos C.$$

ION S. ANTONIU.

5660. Să se rezolve sistemul:

$$a \sin(-x+y+z) + b \sin(x-y+z) = c$$
$$b \sin(x+y-z) + c \sin(-x+y+z) = b$$
$$c \sin(x-y+z) + a \sin(x+y-z) = a$$

unde a, b, c sunt laturile unui triunghiu oarecare dat.

VIRGIL GHIȚESCU.

5661. Intr'un trapez ABCD, cu laturile paralele AB și CD, se duc paralelele AA' la BC și BB' la AD care întâlnesc pe CD în A' și B'. O paralelă la DC întâlnește pe AA' în N și pe BB' în M. Dreapta CM taie pe AD în M', iar dreapta DN taie pe BC în N'.

Să se demonstreze următoarele proprietăți:

1°. Dreapta M'N' este paralelă cu MN.

2°. Notând cu B și b bazele trapezului, avem:

$$\frac{\overline{M'N'}}{B} = \frac{b+\overline{MN}}{B-b}.$$

3°. Dreptele AM, BN se întâlnesc într'un punct I situat pe dreapta care unește mijloacele bazelor trapezului.

4°. Dacă I este mijlocul lui $\overline{DC}$, atunci dreapta M'N' trece prin intersecția O a dreptelor AA' și BB' și reciproc.

In acest caz, dreapta MN întâlnind pe OD și OC în P și Q, avem $\overline{PQ} = \overline{AB}$.

D. V. IONESCU.

5662. Se dă un cerc (C), un punct A pe el și o dreaptă D. O dreaptă variabilă, ce trece prin A, taie cercul a doua oară în M, iar pe dreapta D în P. Se cere:

1°. Locul geometric al conjugatului armonic, Q, al punctului P față de A și M.

2°. Cum trebue să fie așezată în plan dreapta D, pentru ca acest loc să fie *elipsă*, *iperbolă* sau *parabolă*?

3°. Să se arate că există o construcție simplă a tangentei într'un punct curent al locului lui Q.

GH. D. SIMIONESCU.

5663. Fie în plan, ABC şi A'B'C' două triunghiuri înscrise sau circumscrise unei conice. Triunghiul format de dreptele AA', BB', CC' este omologic cu triunghiul format de intersecţiile (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CA, C'A').

IULIAN PETRESCU.

5664. Punem: $F = \operatorname{arctg}(\alpha x + \beta y + \gamma z)$.

Să se calculeze integralele:

$$A = \iint F\,dy\,dz \quad , \quad B = \iint F\,dz\,dx \quad , \quad C = \iint F\,dx\,dy$$

variabilele x, y şi z fiind pozitive şi verificând relaţia:

$$x + y + z = 1.$$

Caz particular: $\alpha = \beta = \gamma$.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5665. O persoană ţine în mâini un teanc de cărţi egale între ele, de greutate 0,5 kg, de lăţime a cotorului $l = 4$ cm, de înălţime $h = 14$ cm. Cărţile sunt alăturate una lângă alta cu lungimea orizontal şi înălţimea vertical. Presiunea mâinilor e reprezentată prin câte o forţă orizontală de 10 kg, aplicată la 3,5 cm de extremitatea de sus a cărţilor, pe cele două cărţi care sunt la extremităţile teancului. Coeficientul de frecare *maxim* (acelaşi între două cărţi, ca şi între cărţi şi mâini) este 0,3.

Să se determine numărul maxim de cărţi ce poate fi ţinut în mâini în acest mod.

GABRIELA ŢIŢEICA.

5666. Din două puncte A_1 şi A_2, situate pe aceeaşi orizontală, la distanţa l, se asvârl la acelaşi moment, două bile de mase m_1 şi m_2 respectiv cu iuţelile orizontale v_1 şi v_2.

1°. Să se determine locul de întâlnire al bilelor şi timpul după care se întâlnesc.

2°. Să se studieze ciocnirea lor; se va lua în acest caz coeficientul de elasticitate k.

3°. Să se determine condiţiile necesare astfel încât după ciocnire:

a) Bilele să cadă împreună pe verticală.

b) Fiecare bilă să urmeze traiectoria pe care ar fi descris-o cealaltă bilă dacă n'ar fi avut loc ciocnirea.

Bilele vor fi asimilate unor puncte materiale; rezistenţa aerului va fi neglijată.

ALEXANDRU STOENESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andreescu Mihai (5606); *Andrei Aurel* (5536, 606, 44, 49); *Bârzescu Mircea* (5606); *Bosinceanu C.* (5637); *Buzescu M. R.* (5644); *Cazanacli P.* (5639); *Columbeanu D. Petre* (5606, 26); *Cotariu D. Marcel* (4252, 5553, 606); *Cubat Aurel* (5587, 606, 26, 49); *Donţu Gh. G.* (5605, 06, 26, 32, 49); *Drăghicescu P. P.* (3459, 5600, 06, 22, 32, P); *Eftimie D. C.* (5300); *Enăchescu Gr. Ioan* (5606); *Ganea N.* (5648, 49); *Gheorghiu Marius* (5632, 37); *Gheorghiu Octav* (5606); *Iacob St. Eug.* Căpit. (4520, 968, 5447, 547, 610, 26, 49, N); *Iliescu Const.* (5644, 48, 49); *Musceleanu D-tru* (5593, 95, 618, 26); *Negrea A. Mircea* (5404); *Păunescu N. Ion* (5606); *Petrovanu D.* G-ral (N, P); *Popa N. Nicolae* (5632, 44, 48); *Poulet P.* (A); *Purica I. I.* (5644, 49); *Radu P. Voinea* (5606); *Seni Cl.* (5586, 606, 32); *Teodorescu St. I.* (4350); *Tilică Şt.* (5532); *Tudoran M. Lydia* (5606); *Turculeţ Tiberiu* (5644, 48); *Vasiliu Gh. D-tru* (5533, 51, 606, 37); *Volanschi Dan* (5626); *Vulcan Victor* (5626); *Wegener Eugen* (5565, 649).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Folle vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea I-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 80.221.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 11. — IULIE 1942

BIBLIOTECA CENTRALA ... SIBIIU

SUMARUL

1. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Matematicile la Şcolile din Blaj . . . . *Victor Marian.*
3. Raportul comisiunii pentru decernarea premiului de Geometrie elementară „G. Ţiţeica" . . . . . } *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 47—55.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 313—314.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 4103, 4628, 5174, 5501, 5529, 5531, 5613.
9. Exerciţii: 21—22.
10. Probleme propuse: 5667—5678.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice.*

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 5542, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 6000, 01, 02, 03, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 409)

Gradientul unei funcţiuni scalare.

Fie V o funcţie scalară de x, y, z. Creşterea infinitizimală a funcţiei V, exprimată prin dV, denumită şi diferenţialul total al funcţiunei V se reprezintă prin suma creşterilor infinitizimale după x, y, z.

Avem: $$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

Ori se ştie că dV *depinde* de direcţia în care se deplasează punctul P în spaţiu. Pentru a scoate în evidenţă cum dV depinde de direcţia în care se deplasează punctul, introducem elementul

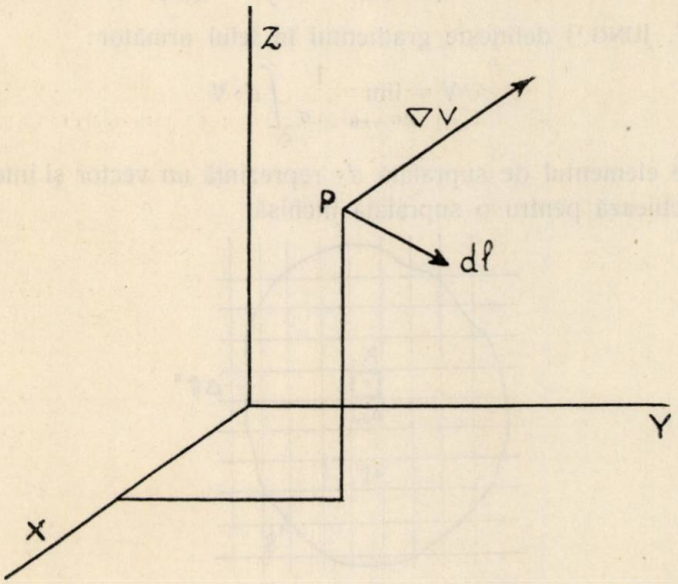


Fig. 44. Gradientul unei funcţiuni scalare: ∇ V.

infinitizimal $d\ell$, astfel că dV va apare ca un produs scalar a doi vectori $dV = (d\ell \nabla V)$ în care:

$$d\ell = dx.i + dy.j + dz.k \quad : \quad \nabla V = i\frac{\partial}{\partial x}V + j\frac{\partial}{\partial y}V + k\frac{\partial}{\partial z}V.$$

(Vezi fig. 44).

Gradientul unei funcţiuni scalare (∇V) reprezintă aşa dar un vector, a cărei valoare numerică ne dă variaţia maximală a funcţiei V în unitatea de lungime, dacă $\overline{\ell}$ cade în direcţia lui ∇V.

$(\overline{\ell}\,\nabla V) = \dfrac{\partial V}{\partial l}$ se confundă cu derivata de direcţie (aceasta numai pentru o funcţie scalară).

Avem: $$(d\ell\,\nabla V) = \frac{\partial V}{dl}\,dl = dV.$$

Valoarea numerică a vectorului ∇V se determină din (∇V^2). Se obţine:

$$|\nabla V| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

F. JUNG [1]) defineşte gradientul în felul următor:

$$\nabla V = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \int_{\sigma} d\sigma\, V$$

în care elementul de suprafată $d\sigma$ reprezintă un vector şi integrala se efectuează pentru o suprafaţă închisă.

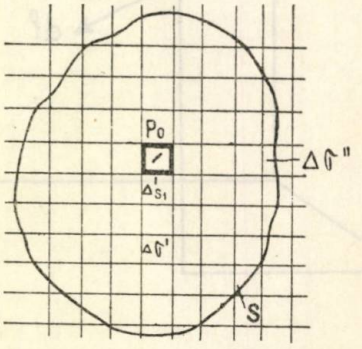


Fig. 45. Volumul $\sigma = \Sigma\Delta\sigma' + \Sigma\Delta\sigma$.

Mai întâi se poate uşor constata că raportul $\dfrac{1}{\Delta\sigma}\int d\sigma\, V$ reprezintă o valoare finită diferită de zero. In acest scop considerăm volumul σ (Vezi fig. 45), descompus într'o sumă de cuburi

1) Vezi J. SPIELREIN Vektorrechnung Zweite Aflage 1926 Varlag Wittwei Stuttgart.

$\Sigma\triangle\sigma'$ şi resturi de cuburi $\Sigma\triangle\sigma''$ şi cubul luat aşa de mic încât suma $\Sigma\triangle\sigma''$ să poată fi neglijabilă faţă de $\Sigma\triangle\sigma'$.

Dacă într'un punct P_0 funcţiunea scalară V admite o valoare finită şi bine determinată, atunci pe suprafaţa cubului respectiv vom avea: $V_0 + \triangle V$ în care: $\triangle V \cong \frac{\partial V}{\partial l}\triangle l$ neglijând aşa dar termenii infinitizimali de un ordin superior din seria lui TAYLOR

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots$$

Ca urmare obţinem:

$$\frac{1\sigma}{\triangle\sigma}\int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{s}\, V = \frac{1}{\triangle\sigma}\left\{\int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{s}\, V_0 + \int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{s}\,\triangle V\right\}.$$

Ţinând seamă că pentru o suprafaţă închisă avem întodeauna $\int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{s} = 0$ ceea ce putem uşor constata, considerând spre exemplu

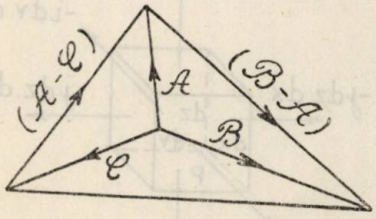


Fig. 46. Suprafeţele tetraedrului sunt considerate ca vectori cu vectorii unitari normali, dirijaţi în exteriorul volumului.

pentru simplificare suprafaţa unui tetraedru. (Vezi figura 46) pentru care:

$$\mathfrak{s} = \frac{1}{2}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}] + \frac{1}{2}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}] + \frac{1}{2}[\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}] + \frac{1}{2}[\mathfrak{A}-\mathfrak{C},\ \mathfrak{B}-\mathfrak{A}] = 0$$

rezultă:

$$\frac{1}{\triangle\sigma}\int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{s}\, V = \frac{1}{\triangle\sigma}\int_{\mathfrak{S}} d\mathfrak{s}\,\triangle V = \frac{1}{\triangle\sigma}\int_{\mathfrak{S}} \triangle l\, d\mathfrak{s}\,\frac{\partial V}{dl}$$

în care vedem că $\triangle l . ds$ e de ordinul lui $\triangle\sigma$. Aşa dar $\frac{1}{\triangle\sigma}\int V\, d\sigma$ poate tinde către o valoare finită.

Pentru cele şease suprafeţe ale unui cub infinitizimal. (Vezi fig. 47) $\Sigma\, d\sigma\, V$ ia forma:

$$\begin{aligned} &V dy dz \quad (-i) + \{V + (dx . i\,\nabla) V\}\, dy . dz . i + \\ &+ V dz dx \quad (-j) + \{V + (dy\, j\,\nabla) V\}\, dz . dx\, j + \\ &+ V dx . dy\, (-k) + \{V + (dz . k\,\nabla) V\}\, dx . dy . k = \\ &= \left\{ i \frac{\partial V}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial z} \right\} dx . dy . dz = \nabla V\, d\sigma \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{d\sigma} \Sigma\, d\sigma\, V = \nabla V.$$

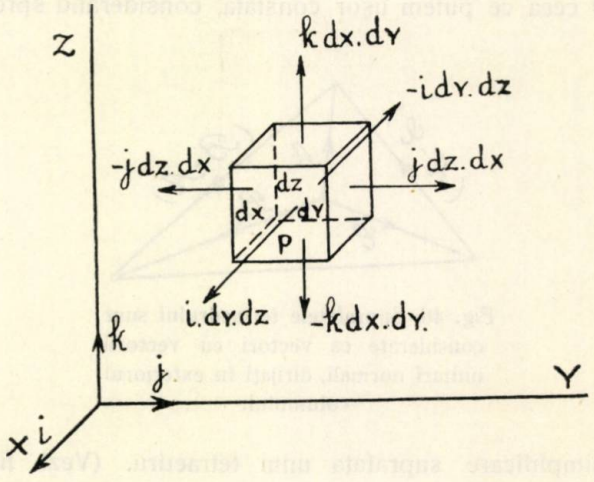


Fig. 47. Determinarea vectorului ∇V după F. JUNG.

Se mai poate proceda şi în felul următor:

Considerăm un cilindru infinitizimal cu axa în direcţia vectorului ∇V. (Vezi fig. 48). Admitem că pentru puncte ca P_1, depe suprafaţa laterală a cilindrului, funcţiunea V îşi menţine aceeaşi valoare ca în P_0. Punctul P_1 se găseşte pe o linie equipotenţială, funcţia V se menţine constantă pe acea linie.

Ca urmare, pentru suprafaţa laterală vom avea: $\int d\sigma\, V = 0$ de oarece $\int d\sigma$ pentru suprafaţa laterală e nulă.

Pentru suprafeţele de bază ale cilindrului obţinem:

$$\left\{V_0 + \left(\frac{1}{2}\triangle h \bar{n}_1 \triangledown V\right)\right\} ds_1 \bar{n}_1 + \left\{V_0 + \left(\frac{1}{2}\triangle h\, \bar{n}_2 \triangledown V\right)\right\} ds_2 \bar{n}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\triangle h\, ds_1 (\bar{n} \triangledown V)\bar{n}_1 + \frac{1}{2}\triangle h\, ds_2 (\bar{n}_2 \triangledown V)\bar{n}_2 = \triangle\sigma \triangledown V$$

în care: $$ds_1 \bar{n}_1 + ds_2 \bar{n}_2 = 0$$

şi $(\bar{n}_1 \triangledown V)\bar{n}_1 = (\bar{n}_2 \triangledown V)\bar{n}_2 = \triangledown V$ când $\bar{n}_1$ resp. $\bar{n}_2$ şi $\triangledown V$ au aceeaşi direcţie.

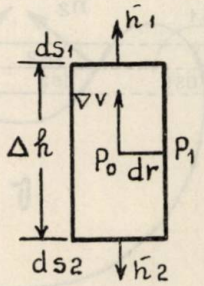


Fig. 48. Determinarea vectorului $\triangledown V$ cu ajutorul integralului de suprafaţă al unui cilindru.

Din cele de mai sus rezultă pentru întreaga suprafaţă a cilindrului:

$$\lim_{\triangle\sigma \to 0} \frac{1}{\triangle\sigma} \int d\sigma\, V = \triangledown V.$$

Gradientul unei funcţiuni scalare se mai numeşte şi gradientul volumetric pentru al deosebi, după cum vom vedea, de gradientul superficial al unei funcţiuni scalare.

In general vom scrie: $\frac{1}{\triangle\sigma}\int d\sigma\, V = \triangledown V + \delta$ în care, la limită când $\triangle\sigma$ tinde către zero, δ tinde de asemeni către zero. Vom

putea zice că, gradientul unei funcţiuni scalare, reprezintă şi integrala de suprafaţă a funcţiei scalare V, pentru o astfel de suprafaţă, al cărui volum e egal cu unitatea.

Ţinând seama de definiţia gradientului unei funcţiuni scalare după F. JUNG ajungem la rezultatul transformării unui integral de suprafaţă într'un integral de volum:

$$\int d\sigma \, V = \int d\sigma \bigtriangledown V.$$

Simbolic transformarea se reprezintă prin $d\sigma \rightarrow d\sigma \bigtriangledown$ care e cunoscută sub denumirea de regula lui GAUSS.

In tot spaţiul în care se efectuează integrala de volum se consideră funcţiunea V ca o funcţie continuă şi cu valori finite,

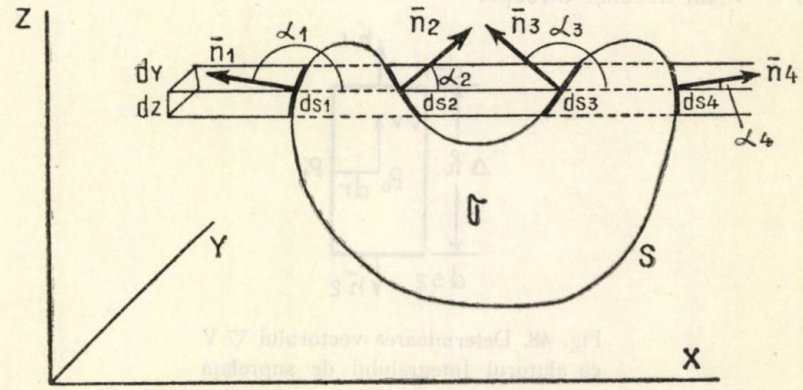


Fig. 49. Transformarea unui integral de suprafaţă într'un integral de volum.

Condiţia de mai sus se justifică prin aceia, că formând transformarea integralului de volum într'un integral de suprafaţă pentru suprafeţele corespunzătoare cuburilor $\triangle\sigma'$ din fig. 45, rezultă că părţile din integralele de suprafaţă cari separă două volumuri vecine, sunt egale şi de sens contrar ţinând seamă că vectorul unitar normal se ia întotdeauna dirijat către exteriorul spaţiului închis de suprafaţă; ca urmare însumând toate integralele de suprafaţă ale tuturor cuburilor $\triangle\sigma'$ ne va da ca rezultat, numai integrala de suprafaţă corespunzătoare suprafeţei S ce cuprinde întregul volum σ.

Dealtfel transformarea unui integral de suprafaţă într'un integral de volum se mai poate demonstra şi în felul următor: Figura 49 ne reprezintă spaţiul σ cuprins de suprafaţa S. Să admitem că funcţiunea V e continuă în acel spaţiu şi admite valori finite. Formând integrale de volum, spre ex. pentru funcţiunea $\frac{\partial V}{\partial x}$ aşa fel, încât spaţiul să fie împărţit şi cuprins în suprafeţe paralelipipedice aşa cum ne arată figura obţinem:

$$\int d\sigma \frac{\partial V}{\partial x} = \iiint dx\, dy\, dz \frac{\partial V}{\partial x} = \iint dy \,.\, dz \,.\, \int \frac{\partial V}{\partial x} dx = \iint dy \,.\, dz \,.\, dV =$$

$$= \iint dy \,.\, dz \,.\, \{ V_2 - V_1 + V_4 - V_3 \} =$$

$$= \int \{ V_1 ds_1 \cos\alpha_1 + V_2 ds_2 \cos\alpha_2 + V_3 ds_3 \cos\alpha_3 + V_4 ds_4 \cos\alpha_4 \} =$$

$$\int V ds \cos\alpha = \int V ds_x$$

în care:

$$dy \,.\, dz = -\, ds_1 \cos\alpha_1 = ds_2 \cos\alpha_2 = -\, ds_3 \cos\alpha_3 = ds_4 \cos\alpha_4 .$$

In mod analog vom obţine:

$$\int d\sigma \frac{\partial V}{\partial y} = \int V ds_y \quad , \quad \int d\sigma \frac{\partial V}{\partial z} = \int V ds_z$$

deci:

$$\int d\sigma \left\{ i \frac{\partial V}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial z} \right\} = \int d\mathfrak{s} \, V$$

în care:

$$i \frac{\partial V}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial V}{dz} = \nabla V$$

şi

$$d\mathfrak{s} = ds_x \, i + ds_y \, j + ds_z \, k.$$

Gradientul unei funcţiuni scalare (∇V) formează un câmp vectorial care va fi deseori întâlnit la cercetarea fenomenelor electrice, magnetice şi electromagnetice. Pentru determinarea acestui câmp vectorial, e suficient să se cunoască o singură funcţie scalară V.

Liniile din spaţiu, ale căror tangente sunt formate din ∇V se numesc linii de forţă. Liniile şi suprafeţele perpendiculare pe liniile de forţă se numesc linii şi suprafeţe ortogonale.

In cazul câmpului vectorial ∇V, liniile şi suprafeţele ortogonale sunt şi equipotenţiale. Aceasta se explică în felul următor:

Formând integrala de linie $\int (d\ell \nabla V)$ între două puncte P_1, P_2 aparţinând a două suprafeţe ortogonale oarecari, (Vezi Fig. 50) indiferent de linia care uneşte acele puncte, se constată că integrala posedă una şi aceeaşi valoare.

In cazul nostru avem: $\int (d\ell \nabla V) = \int dV = V_2 - V_1$.

Deoarece vom vedea, că mai sunt şi cazuri când integrala de linie a vectorului de câmp (care nu se mai reprezintă prin gradientul unei funcţiuni scalare) depinde de linia care uneşte

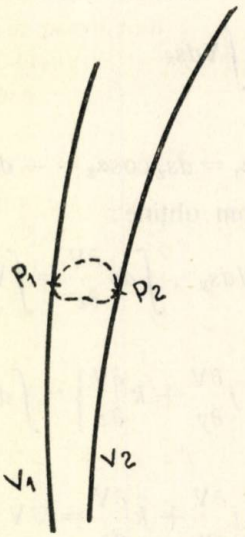


Fig. 50. $\int_{P_1}^{P_2} (\nabla V\, d\ell)$ e independent de linia ce uneşte punctele: (P_1 şi iP_2.

punctele P_1, P_2 vom zice că în cazul întâi, când valoarea integralului rămâne neschimbată, oricare ar fi linia ce uneşte P_1 cu P_2, suprafeţele ortogonale sunt şi suprafeţe equipotenţiale.

Formând integrala de linie $\oint (d\ell \nabla V)$ (pentru o linie închisă cum arată semnul ○ dela integral) se obține: $\oint (d\ell \nabla V) = V - V = 0$.

Totuși se pune o condiție și anume, ca linia închisă să nu străbată suprafețe de discontinuitate pentru însuși funcțiunea V denumită funcția potențială.

Faptul că avem $\oint (d\ell \nabla V) = 0$) zicem că în spațiu are loc un câmp vectorial lipsit de turbioane. Vom avea prilejul în curând să ne familiarizăm cu noțiunea de turbion.

In rezumat vom zice: câmpul vectorial ∇V (gradient de V) admite suprafețe ortogonale și e lipsit de turbioane.

Urmând legile analizei matematice, obținem:

$$\nabla \{U + V\} = \nabla U + \nabla V \quad ; \quad \nabla \{U . V\} = U \nabla V + V \nabla U$$

$$\nabla \{cU\} = c \nabla U$$

în care U, V reprezintă funcțiuni de spațiu și c o constantă.

Pentrucă s'a început să se amintească de linia de forță, e bine ca de pe acum să se arate cum se exprimă ecuația diferențială a unei astfel de linii.

Dacă $\mathfrak{F}$ reprezintă în general vectorul câmpului, tangent la linia de forță, al cărui element se reprezintă prin $d\tau = dl . \bar{t}$ avem: $[\mathfrak{F}\, d\tau] = 0$ sau:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

ceea ce ne arată că fiecare componentă a vectorului $[\mathfrak{F}\, d\tau]$ e nulă

$$F_y\, dz - F_z\, dy = 0 \quad ; \quad F_z\, dx - F_x\, dz = 0 \quad ; \quad F_x\, dy - F_y\, dx = 0$$

de unde:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

reprezintă ecuația diferențială a liniei de forță la care $\mathfrak{F}$ e tangent.

Să admitem cazul că funcțiunea potențială V posedă suprafețe de discontinuite, adică suprafețe unde V variază brusc dela o valoare la o altă valoare.

Fie S_{12} o astfel de suprafaţă de discontinuitate. (Vezi fig. 51).

Formând integralul de linie $\int (d\ell \nabla V)$ pentru o linie care porneşte de pe o parte a suprafeţei S_{12} şi anume de pe partea unde este V_1 şi se termină pe cealaltă parte a acelei suprafeţe unde este V_2, obţinem

$$\int (d\ell \nabla V) = V_2 - V_1$$

deci integrala pentru linia închisă nu mai e nulă.

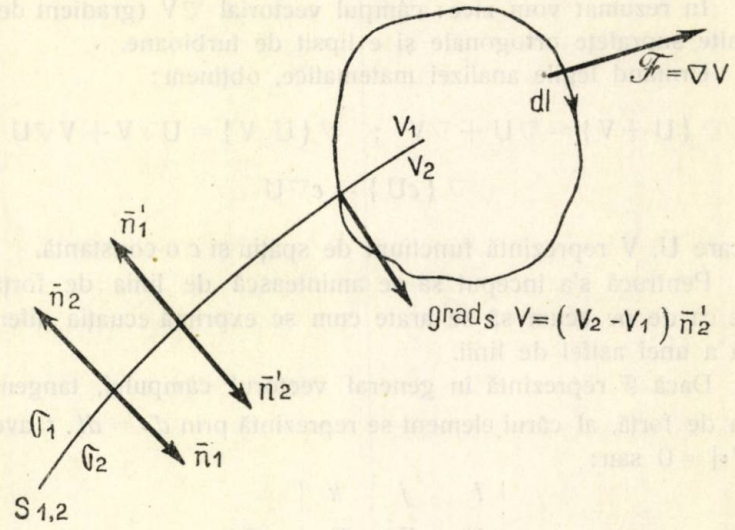


Fig. 51. Gradientul superficial $\text{grad}_s V = (V_2 - V_1)\ \bar{n}'_2$.

După propunerea lui FRITZ EMDE, în cazul discontinuităţii funcţiunei potenţiale V, vom introduce noţiunea de gradient superficial:

Fie $\text{grad}_s V = \{V_2 - V_1\}\ \bar{n}'_2$ în care $\bar{n}'_2$ e dirijat către spaţiul σ_2. O suprafaţă care întotdeauna împarte spaţiul în două părţi, posedă doi vectori unitari normali $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ dirijaţi către exteriorul spaţiului respectiv sau $\bar{n}'_1$, $\bar{n}'_2$ dirijaţi către spaţiul respectiv. (Vezi fig. 52).

In studiul nostru vom întâlni însă un câmp potenţial $\mathfrak{E}$, care e dirijat în sensul în care funcţia potenţială V descreşte. Ca urmare

vom avea: $\mathcal{E} = -\nabla V$ şi dacă funcţia potenţială V admite suprafeţe de discontinuitate, gradientul superficial va lua forma: $\text{grad}_s V = (V_1 - V_2)\,\bar{n}_1'$ ţinând seamă că $\bar{n}_1'$ e dirijat în sensul vectorului de câmp, în cazul nostru unde V e mai mare. Vezi fig. 52.

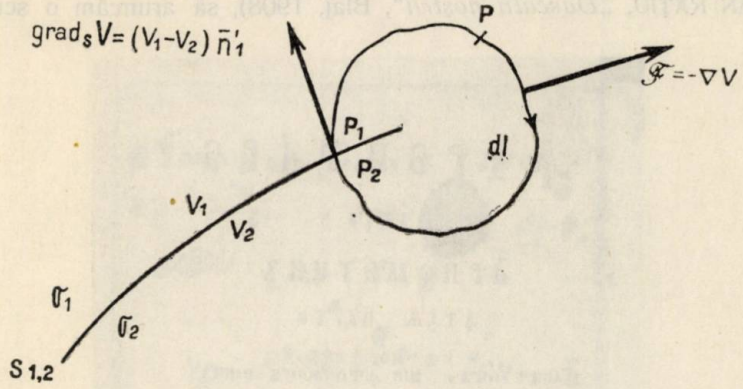


Fig. 52. Gradientul superficial $\text{grad}_s V = (V_1 - V_2)\,\bar{n}_1'$.

E bine să se remarce, că discontinuitatea funcţiunei V nu se reprezintă prin formarea integralului între punctele P_1 şi P_2: $\int_{P_2}^{P_1} (d\ell\,\mathcal{E})$, ci integralul de linie încetează în punctul P_2 şi e reluat din nou în punctul P_1:

Avem:

$$\oint (\mathcal{E}\,d\ell) = \int_{P}^{P_2} (-\nabla V\,d\ell) + \int_{P_1}^{P} (-\nabla V\,d\ell) =$$

$$= (V - V_2) + (V_1 - V) = V_1 - V_2.$$

Vezi fig. 52.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

MATEMATICILE LA ŞCOLILE DIN BLAJ

In anuarul Liceului de băieţi „Sf. VASILE CEL MARE“ din Blaj, D-l NICOLAE COMŞA, profesor la acel liceu, a publicat un interesant studiu biografic despre cei 358 profesori, cari au funcţionat la şcolile *„micei noastre Rome“* dela întemeierea lor, înainte cu aproape 200 de ani, până la 1918. Dat fiind importantul rol

cultural şi naţional pe care l-au avut aceste şcoli în trecutul neamului nostru, un astfel de studiu este nu numai util, ci şi necesar.

Cetind acest studiu mi s'a părut a nu fi lipsit de interes ca, folosind datele D-lui COMŞA şi ale altor cercetători (de ex. Dr. IOAN RAŢIU, *„Dascălii noştrii“*, Blaj, 1908), să aruncăm o scurtă

ѦДРЕПТАРЕ
КЪТРЪ
АРИѲМЕТИКЪ
ѦТѦѦ ПАРТЕ
Алкътуитъ, ши ѧтокмитъ пентрѹ
фолосѹл, ши прокопсѣла тѹтѹрѡр
Школелѡр Нормълещи, а Нѣмолѹи
Рѡмѫнеск
де
ГЕѠРГІЕ ШИНКАИ дин ШИНКА
Апрікторѹл, ши Катехітѹл нѹмителѡр Школле, &c.
ѦБЛАЖ
Кѹ Тѵпарюл Семинарюлѹи.
Аѱпѕ.

privire asupra desvoltării învăţământului matematicilor la liceul din Blaj şi să trecem în revistă profesorii care au predat aceste studii în decursul timpului, împreună cu activitatea lor matematică, după cât o putem cunoaşte din documentele rămase.

Şcolile din Blaj s'au deschis la 21 Octomvrie 1754, de către episcopul PETRU PAUL ARON de Bistra. La început erau două

şcoli: şcoala obştească, în care se învăţa scrierea şi cetirea, adecă şcoala primară, şi gimnaziul, în care, pe lângă cele religioase, se preda limba latină, maghiară „*şi ceva cunoştinţă a ştiinţelor*". Gimnaziul s'a deschis numai cu două clase, la 1757 s'a adăugat a treia, iar mai târziu se completă la 5 clase. Intâia clasă se numea *Principia*, a doua *Gramatica*, a treia *Sintaxis*, a patra *Rethorica* şi a cincea *Poesis*. Primele trei se numeau colectiv clasele *gramaticale*, iar cele din urmă două *humanioare*. In urmă, dar înainte de 1831, se înfiinţă şi un curs de un an de psihologie şi logică.

Despre învăţământul matematicei la gimnaziu în această epocă ştim numai atât că în clasele gramaticale, cât şi în cele humanioare se preda *aritmetica*. La 1831 gimnaziul din Blaj primeşte dreptul de a se completa în liceu, după modelul celui piarist din Cluj. In acest scop se înfiinţează catedrele de *algebră*, *geometrie* şi *istorie*, apoi cele de *fizică* şi *chimie*. Gimnaziul se completă cu cursul de filozofie, cu ştiinţele matematice, care dura doi ani, şi cu cel de drept, tot de doi ani. In primul an de filosofie se propunea *Mathesis*, iar în al doilea *Physica*. Această organizare a liceului a durat până la 1850, când o nouă reformă dădu liceului caracterul modern.

Limba de predare era cea latină, după cum era obiceiul pe atunci. Abia către 1840 se făcură încercări de a se introduce ca limbă de propunere cea românească. De aceea profesorii se foloseau de manualele latineşti în uz pe atunci, sau de note pe care le făceau după diverse cărţi de matematici. Numai la şcoala de obşte se preda în limba română. Dela 1850 încoace limba de predare pentru toate materiilele deveni cea românească.

Intâiul profesor care a predat matematicile la şcolile din Blaj pare a fi fost episcopul de mai târziu GRIGORE MAIOR (1715—1785), care la deschiderea şcolilor a fost numit „*învăţător limbilor şi după putinţă a ştiinţilor*".

Date mai sigure avem asupra lui PETRU PARTENIU IACOB († 1790), care a studiat la Roma şi a lăsat un manuscris cu titlu, „*Elementa Arithmeticae numericae*". Lucrarea e menţionată într'un catalog al manuscriselor Bibliotecii Archidiecezane din Blaj, sub No. 1485, şi s'a păstrat multă vreme. Cu timpul însă s'a pierdut.

SAMUIL MICU CLAIN (1745—1806), unul din cei trei corifei ai şcoalei latiniste, după ce şi-a terminat studiile la Viena, la 1772 s'a întors la Blaj, fiind numit profesor de etică şi matematică. Această funcţiune o deţine însă numai un an, căci pleacă din nou la Viena.

GHEORGHE ŞINCAI (1754—1816) al doilea luceafăr al Blajului, după ce şi-a terminat studiile la Roma, la 1779 se opri pentru un an la Viena, unde a fost elevul lui FELBIGER, la şcoala normală. Intors la Blaj în 1780 funcţionează ca profesor până la 1784, când e numit director al şcolilor româneşti din Ardeal. In această calitate a scos la 1784 o *Aritmetică* tipărită cu litere cirilice, al cărui titlu complet este următorul: „INDREPTARE

---

cătră | ARITMETICA | întâia parte | Alcătuită, şi întocmită pentru | folosul, şi procopseala tuturor | Şcoalelor Normăleşti, a Neamului | Românesc | de | GEORGE ŞINCAI din Şinca | Directorul, şi Catechetul numitelor Şcoale 4c. | In Blaj. | Cu typarul Seminarului (1785)".

Manualul lui ŞINCAI e cea dintâi carte de matematică românească tipărită în Ardeal. Ea este o traducere a manualului oficial al şcolilor primare din Impărăţia Austriei „*Anleitung zur Rechenkunst*" apărut anonim, al cărui autor însă este acelaşi FELBIGER, care i-a fost profesor lui ŞINCAI. Aceeaşi Aritmetică germană o tradusese în româneşte şi a tipărit-o la Viena în 1777, directorul şcoalelor neunite din Banat, TEODOR IANCOVICI. E curios că ŞINCAI nu a avut cunoştinţă de cărticica lui IANCOVICI astfel că traducerea lui e cu totul independentă de a aceluia şi cu mult superioară ca limbă. Un singur exemplu ilustrează de ajuns acest fapt:

IANCOVICI	ŞINCAI
Ounu dentru doo înaintea puse numerile ounulu cu altul atete ori ale adaoge, şi atete ori a le lua, câte ori întru sine celu altu numerulu ounişoarele cuprinde să chiamă aface multiplicaţie.	*A adăoga deatâtea ori oun Numer dintre doi Numeri, carii sau dat, sau ai lua deatâtea ori, câte unimi cuprinde însine celalalt însemnează ai înmulţi.*

Indreptarea către Aritmetică cuprinde cele patru operaţiuni cu *„Numeri întregi de acelaşi fealiu“*, precum şi cu *„Numerii cei cunoscuţi şi numiţi“*, cu *„Desfacerea“* şi *„Reducerea“* acestora şi, însfârşit, cu *„Regula Detri cea Dreaptă“* şi *„Cea Intoarsă“*. După cum se vede din titlu, *Şincai* îşi propusese să scoată şi o a doua parte a acestei Aritmetici, care conform programului de atunci al şcolilor normale, trebuia să cuprindă: operaţiile cu fracţii şi aplicaţiile regulei de trei la calculul dobânzilor, regula de trei compusă, cea a amestecului şi eventual extragerea rădăcinii patrate şi cubice. Din motive de ordin bănesc însă partea a doua nu a mai apărut.

VASILE RAŢIU (1795—1835), în anii 1820—22 a predat limba latină şi matematicile ca profesor la Sintaxă.

NICOLAE MARCU (1803—1867) în intervalul dela 1830 până 1836 a predat la liceu *„matematica şi fizica teoretică şi experimentală“*, iar între 1839—45, fizica.

IOAN CRISTOCEANU (1810—1844) a funcţionat între anii 1833—36 ca profesor la cursul filosofic din liceu.

GEORGE BARIŢIU (1812—1893) cunoscutul ziarist şi istoric, a studiat teologia la Blaj. *„In anul 1835/36 a funcţionat ca profesor de fizică teoretică şi experimentală la al doilea curs de filozofie din liceu“*. A fost Membru al Academiei Române, iar la 1893 preşedinte al ei.

ŞTEFAN MOLDOVAN (1813—1900) a fost profesor de matematică la liceu între 1836—38.

DEMETRIU COROIANU (1814—1891) în anii şcolari 1837/38 şi 1838/39 a propus fizica teoretică şi experimentală la cursul al doilea de filosofie la liceu.

ELIE VLASSA ŢICUDI (1813—1896) funcţionează ca profesor de matematici la liceul din Blaj între 1839—41.

GEORGE DRAGEA (1815—1865) a fost în anul şcolar 1841/42 profesor de matematici la cursul superior de liceu.

IOAN FEKETE NEGRUŢIU (1817—1888) a ajuns profesor la Liceu în 1842. A scris o *Aritmetică* pentru şcoalele primare apărută la 1852 sau 1853.

VASILE LADISLAU POPP (1819—1875), după ce a terminat teologia la Viena, în 1842 a fost numit profesor de matematică şi geometrie la liceul din Blaj, unde a predat geometria practică.

A fost cel dintâi profesor din Blaj, care a predat la liceu matematicile în limba română. Intre 1867—75 a fost preşedinte al „*Astrei*“, iar la 1872 a obţinut titlul de baron.

IOAN ARIEŞAN (1816—1874) în anii 1845—54 a fost profesor de matematică şi fizică la cursul superior al liceului.

ARON PUMNUL (1818 1866) cunoscutul cărturar a studiat teologia la Viena, iar la 1846 e numit profesor de filosofie la Blaj. A tradus din nemţeşte un manual de fizică, al cărui manuscris însă s'a pierdut.

GEORGE STOIAN (1823—71) în anii 1847—48 şi 1851—52 a fost profesor de matematici la liceu.

IOAN COVACI alias FAUR (1837—1893), între anii 1852—60 a fost profesor de matematici şi limba greacă. La 1860 a trecut ca profesor la Craiova.

IACOB LUGOJAN (1817—1895) din Teiuş, a studiat dreptul la Cluj şi teologia la Blaj. Intre 1855—59 a predat fizica la liceu.

ALEXANDRU MICU (1830—1895), între anii 1856—72 a propus la liceu matematica şi fizica, iar între anii 1888—92 matematica.

IOAN MICU MOLDOVANU (1833—1915) din Varfalău, fost preşedinte al „*Astrei*“ şi membru al *Academiei Române*, a predat fizica la liceu. A scris un manual de fizică, din care au rămas câteva fragmente în manuscris.

IOAN STOIAN (1835—1865) a studiat teologia la Viena, ajungând la 1859 profesor la Blaj. In 1864 a scos „*Aritmetica pentru şcolile poporale*“.

ŞTEFAN POP (1845—1890) a studiat pedagogia la Praga. In 1866 a fost numit profesor la şcoala normală nou înfiinţată, în care calitate a predat aproape toate materiile de învăţământ. A publicat o cărticică despre „*Măsurile metrice*“, Blaj, 1875. Trecând în România a ajuns subdirector la şcoala de agricultură şi silvicultură dela Herestrău.

PETRU SOLOMON (1829—1891) a studiat pedagogia la Praga, apoi în 1867 a ajuns profesor la şcoala normală din Blaj. A publicat în colaborare cu

GEORGE MUNTEANU (1840—1915) „*Computul mental şi cu cifre*“.

IOAN MĂRCULEŢ (1844—1895) a studiat teologia la Viena. La 1869 a ajuns profesor la liceu, unde a propus matematica,

germana şi greaca. Mai târziu a fost profesor la Bârlad. A publicat un „*Manual de aritmetică pentru clasele inferioare*“, Blaj, 1877.

GEORGE BUCŞA (1849—1881) a studiat teologia la Viena. A ajuns profesor la liceu în 1870, predând fizica.

ALEXANDRU GRAMA (1850—1896) a studiat filosofia la Viena. In 1872 a predat fizica la liceu. A scris „*Explicarea mecanică modernă a naturii şi credinţa în Dumnezeu*“, publicată în Anuarul Liceului din anii 1879—81.

GEORGE VLASA (născut 1842) a studiat dreptul la Sibiu. In 1872 a ajuns profesor la liceu, unde a predat matematicile şi latina timp de zece ani. In 1877 a scos o *Geometrie* pentru cursul inferior de liceu, prelucrată. A mai tipărit o *Aritmetică*.

ILIE CHIRILĂ (1845—1883), la 1874 a ajuns profesor la şcoala normală, unde a funcţionat până la 1883, predând între altele şi fizica. In acest timp a scris o *Fizică* pentru şcoalele poporale, tipărită în 1883.

IOSIF HOSSU (1850—1936), la 1874 a fost numit profesor de matematică şi fizică la Liceu, ajungând la 1892 directorul Liceului. A scris: 1) *Geometria desemnativă*, Blaj, 1887. 2) *Planimetria constructivă*, Blaj, 1887. 3) *Stereometria desemnativă*, Blaj, 1888; toate trei pentru clasele inferioare de liceu. A tradus, împreună cu E. VICIU, *Fizica* de A. ABT, Blaj, 1891, pentru cl. VII şi VIII de liceu. Tot împreună cu E. VICIU a scos *Geometria*, pentru clasele superioare de liceu, Blaj, 1900.

EMILIU VICIU (1863—1912), a studiat matematica şi fizica la Universitatea din Budapesta, apoi la cea din Cluj, unde în 1888 obţinu diploma de profesor. In acelaşi an fu numit profesor de aceste materii la liceu, unde a funcţionat până la 1910. Inafară de manualele publicate împreună cu I. HOSSU, a mai tipărit: *Aritmetica* de G. VLASSA, ed. II, Blaj, 1889. *Fizica* poporală de I. CHIRILĂ, ed. II, Blaj, 1896. *Algebra* pentru cl. IV-VIII, Blaj, 1896, precum şi câteva articole despre electricitate în Anuarele Liceului, sau în publicaţiile din Blaj.

IULIU KARSAI, a studiat matematica şi fizica la Universitatea din Cluj. In anii 1892—96 a predat aceste studii la liceu şi la şcoala de fete din Blaj, a trecut apoi la Liceul din Gherla, iar după unire a fost profesor la Cluj.

VALERIU SUCIU (1871—1929) a studiat matematica şi fizica la Universitatea din Budapesta, fiind numit în 1896 profesor de aceste studii la liceu, iar dela 1906 la şcoala normală din Blaj, unde a funcţionat până la moarte.

A scris: 1) *(Aritmetică)* pentru cl. II poporală (Blaj, 1914). 2) *Aritmetică* (pentru cl. III şi IV poporală), Blaj, 1914. 3) *Aritmetică şi Geometrie* (pentru cl. V şi VI poporală) Blaj, 1913. 4) *Aritmetică şi Geometrie* pentru cl. III preparandială în colaborare cu NICOLAE F. NEGRUŢIU.

FLAVIU C. DOMŞA (1878—1932) a urmat la Budapesta *„şcoala de arte frumoase obţinând în 1901 diploma de profesor de geometrie şi desen liber"*, materii pe care le-a predat la liceu până la moarte. A scris: *Geometria desemnativă,* Blaj, 1906.

* * *

Din această listă, care nu cuprinde pe profesorii în viaţă, de sigur lipsesc mulţi, despre cari nu ne-au rămas date. Ea va putea fi completată cu timpul, când se vor răscoli actele din archive. Din cele de mai sus ne putem face totuşi un tablou fidel despre cadrul modest în care s'au desvoltat matematicile la cele mai vechi şcoli româneşti şi să cunoaştem pe modeştii cultivatori ai acestora, al căror scop nu era să facă ştiinţă înaltă, ci să trezească dorul de carte şi de viaţă naţională în fiii iobagilor din Ardeal.

VICTOR MARIAN.

RAPORTUL
COMISIUNII PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ „G. ŢIŢEICA"

Comisiunea, cercetând *ultimul volum apărut,* am găsit că niciun corespondent, elev de liceu, nu a publicat *Note* sau *Articole* de Geometrie elementară.

Dacă socotim însă soluţii de probleme, ca fiind lucrări cu obiect dat, atunci se distinge D-l PAUL P. DRĂGHICESCU, care

este întâlnit fie ca singur rezolvitor al unor chestiuni, fie cu soluţii aparte de ceilalţi rezolvitori. D-l PAUL P. DRĂGHICESCU, fiind elev în liceul militar din Iaşi, îndeplineşte condiţiile regulamentului acestui premiu, fiind cu certitudine *român.*

Pentru aceste motive, Comisiunea propune să i se decerne *premiul de Geometrie elementară* „G. Ţiţeica".

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI „G. ŢIŢEICA"

AL. BUNESCU, ING. D. STOICA,
O. N. ŢINO.

Acest raport a fost citit şi aprobat în şedinţa Adunării Generale din 19 Februarie 1942.

NOTE MATEMATICE

47. *Cunoştinţe matematice pentru Ofiţerii de Geniu.* In *Monitorul Oastei* Nr. 44 din 12 Noemvrie 1860, sunt publicate următoarele programe pentru cunoştinţele matematice şi tehnice ce se cereau pe atunci Ofiţerilor de Geniu.

a) *Pentru gradul de Sub-Locotenent:* Algebra superioară. Trigonometria sferică. Geometria analitică. Geometria descriptivă cu aplicaţiuni la perspective, umbre, şarpante şi tăierea pietrelor. Construcţia şoselelor şi podeţelor. Mineralogia. Arta militară. Organizarea Corpului Geniului. Armament şi Tactica.

b) *Pentru gradul de Locotenent:* Calculul diferenţial şi integral. Mecanica raţionată. Geodezia. Rezistenţa materialelor. Hidraulica. Arhitectura. Arta militară. Strategia. Fortificaţiunea pasageră şi permanentă. Atacul şi apărarea cetăţilor.

c) *Pentru gradul de Căpitan:* Construcţia podurilor de piatră şi metalice. Canaluri, râuri şi navigaţiune. Drumuri de fier. Maşine cu aburi. Geologie. Administraţiunea publică. Arta militară. Organizarea armelor.

I. I.

48. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Pentru N_6 începând cu 9 am găsit următoarele 126 soluţii pentru numerele N şi N_6, legate prin relaţia

$$6 \times N_6 = N.$$

N_6	N	N_6	N
904 517 283	5 427 103 698	945 231 708	5 671 390 248
904 517 328	5 427 103 968	945 231 807	5 671 390 842
904 518 273	5 427 109 638	945 307 182	5 671 893 092
904 521 783	5 427 130 698	945 308 172	5 671 849 032
904 523 178	5 427 139 068	945 308 217	5 671 849 302
904 527 183	5 427 163 098	945 317 208	5 671 903 248
904 527 318	5 427 163 908	945 318 072	5 671 908 432
904 528 173	5 427 169 038	945 320 718	5 671 914 308
904 531 728	5 427 190 368	945 321 708	5 671 930 248
904 532 178	5 427 193 068	945 321 807	5 671 930 842
904 532 718	5 427 196 308	945 701 823	5 674 210 938
904 732 851	5 428 397 106	945 702 183	5 674 213 098
904 851 273	5 429 107 638	945 703 218	5 674 219 308
910 473 285	5 462 839 710	945 718 032	5 674 308 192
910 532 847	5 463 197 082	945 718 203	5 674 309 218
912 730 485	5 476 382 910	945 718 302	5 674 309 812
940 152 873	5 640 917 238	945 720 183	5 674 321 098
940 287 315	5 641 723 890	945 720 318	5 674 321 908
941 502 873	5 649 017 238	945 730 182	5 674 381 092
945 170 823	5 671 024 938	945 732 018	5 674 392 108
945 172 083	5 671 032 498	945 801 732	5 674 810 392
945 173 082	5 671 038 492	945 802 317	5 674 813 902
945 180 732	5 671 084 392	945 803 172	5 674 819 032
945 182 073	5 671 092 438	945 803 217	5 674 819 302
945 182 307	5 671 093 842	945 817 023	5 674 902 138
945 183 072	5 671 098 432	945 817 203	5 674 903 218
945 207 183	5 671 243 098	945 817 302	5 674 903 812
945 207 318	5 671 243 908	945 820 173	5 674 921 038
945 208 173	5 671 249 038	945 821 703	5 674 930 218
945 217 083	5 671 302 498	945 830 172	5 674 981 032
945 218 307	5 671 309 842	945 830 217	5 674 981 302
945 230 817	5 671 384 902	948 507 123	5 691 042 738

1) Urmare la Nota dela pag. 410, Vol. XLVII.

N_6	N	N_6	N
948 507 213	5 691 043 278	954 027 318	5 724 163 908
948 507 312	5 691 043 872	954 028 173	5 724 169 038
948 512 073	5 691 072 438	954 031 728	5 724 190 368
948 512 307	5 691 073 842	954 032 178	5 724 193 068
948 513 072	5 691 078 432	954 032 718	5 724 196 308
948 570 123	5 691 420 738	970 532 841	5 823 197 046
948 571 230	5 691 427 380	971 053 284	5 826 319 704
948 572 013	5 691 432 078	978 405 321	5 870 431 926
948 572 130	5 691 432 780	984 052 713	5 904 316 278
948 573 012	5 691 438 072	984 053 127	5 904 318 762
948 573 120	5 691 438 720	984 127 053	5 904 762 318
950 248 731	5 701 492 386	984 130 527	5 904 783 162
951 024 873	5 706 149 238	984 521 073	5 907 126 438
951 728 304	5 710 369 824	984 523 071	5 907 138 426
951 732 804	5 710 396 824	984 531 072	5 907 186 432
951 782 304	5 710 693 824	984 570 231	5 907 421 386
952 178 304	5 713 069 824	984 571 023	5 907 426 138
952 317 804	5 713 906 824	984 572 031	5 907 432 186
952 718 304	5 716 309 824	984 573 021	5 907 438 126
952 731 804	5 716 390 824	984 573 102	5 907 438 612
952 817 304	5 716 903 824	985 041 273	5 910 247 638
953 172 804	5 719 036 824	985 401 273	5 912 407 638
953 217 804	5 719 306 824	985 412 730	5 912 476 380
953 271 804	5 719 630 824	987 245 031	5 923 470 186
954 017 283	5 724 103 698	987 245 103	5 923 470 618
954 017 328	5 724 103 968	987 302 451	5 923 814 706
954 017 823	5 724 106 938	987 310 245	5 923 861 470
954 018 273	5 724 109 638	987 450 231	5 924 701 386
954 021 783	5 724 130 698	987 451 023	5 924 706 138
954 023 178	5 724 139 068	987 452 301	5 924 713 806
954 027 183	5 724 163 098	987 452 310	5 924 713 860

G-L GH. BUICLIU.

49. *Puncte remarcabile în triunghiu şi triunghiuri speciale.* Fie AA′, BB′, CC′ înălţimile triunghiului ABC de laturi a, b, c; (O) cercul circumscris de rază R; G, H, K baricentrul, ortocentrul şi punctul lui LEMOINE; Ω centrul cercului lui BROCARD; S suprafaţa; θ unghiul lui BROCARD; H′ ortocentrul triunghiului ortic A′B′C′; ρ raza celui de-al doilea cerc al lui LEMOINE.

1°. In *Mathesis*[1]) am stabilit formulele

$$OH' = \frac{S}{R}\sqrt{\operatorname{cotg}^2\theta - 3} = p'\sqrt{\operatorname{cotg}^2\theta - 3} \tag{1}$$

$$OH' = 2\,OK = 2R\sqrt{\operatorname{cotg}^2\theta - 3} : \operatorname{cotg}\theta \tag{2}$$

$$OH' = \frac{S}{R}\sqrt{\operatorname{cotg}^2\theta - 3} = (p' - a')\sqrt{\operatorname{cotg}^2\theta - 3} \tag{3}$$

după cum triunghiul ABC are toate unghiurile ascuțite, este dreptunghic sau este obtuz în A; a', b', c' și p' fiind laturile și semiperimetrul triunghiului ortic A'B'C'. Dacă

$$\operatorname{cotg}^2\theta - 3 > 0$$

ceea ce înseamnă că ABC nu este echilateral, rezultă că

$$\frac{OK}{OH'} = \frac{4R^2}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{4}$$

dacă triunghiul fundamental este scalen sau obtuz și

$$\frac{OK}{OH'} = \frac{1}{2}$$

dacă triunghiul fundamental este dreptunghic. De aici se deduce că: *în orice triunghiu raportul* OK/OH' *este pozitiv și punctul* O *este exterior segmentului* H'K, punctele O, K, H' fiind aliniate pe diametrul lui BROCARD.

In plus după cum avem

$a^2 + b^2 + c^2 < 4R^2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$ sau $a^2 + b^2 + c^2 > 4R^2$

punctele O, K, H' *sunt dispuse în ordinea* (O, H', K), (O, K ≡ H'), *sau* (O, K, H').

2°. Relația (4) sugerează triunghiuri speciale obtuze în A, pe care le-am tratat în *Mathesis*, 1932 și care se bucură de proprietățile α), β), γ), δ) notate în cele ce urmează.

α) $$\frac{OK}{OH'} = \frac{2}{3} \quad ; \quad a^2 + b^2 + c^2 = GR^2;$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{3R^2}{S} \quad ; \quad \rho = \frac{2(p' - a')}{3}.$$

1) *Mathesis*, 1934—88; 1935—365; 1936—31.

La aceste relaţiuni sunt de adăugat proprietăţile din problema noastră 3134 (*Mathesis*, 1939—143).

β) $\dfrac{OK}{OH'} = 1$; $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$; $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{R^2}{S}$; $\rho = p' - a'$.

Dreapta HΩ *trece prin baricentrul triunghiului ortic.*

γ) $\dfrac{OK}{OH'} = \dfrac{4}{3}$; $a^2+b^2+c^2=3R^2$; $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{3R^2}{4S}$; $\rho = \dfrac{4(p'-a')}{3}$.

Dreapta GΩ *este paralelă cu dreapta lui* EULER.

δ) $\dfrac{OK}{OH'} = 2$; $a^2 + b^2 + c^2 = 2R^2$; $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{R^2}{2S}$; $\rho = 2(p' - a')$.

Punctele H' *şi* Ω *coincid.*

Dreapta GK *trece prin centrul cercului lui* EULER *al triunghiului ortic.*

Dreapta HK *este paralelă cu dreapta lui* EULER *a triunghiului ortic, iar dreapta care uneşte ortocentrul triunghiului fundamental cu centrul cercului lui* TAYLOR, *trece prin baricentrul triunghiului ortic.*

V. THÉBAULT.

50. *O ecuaţie diofantiană.* In nota publicată sub acest titlu în *Gazeta Matematică*, Vol. XLV, pag. 476, D-l I. I. STAMATE a dat un sistem de soluţii întregi ale ecuaţie

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^3. \qquad (1)$$

Se obţine un alt sistem de soluţii ale acestei ecuaţii cu ajutorul formulelor

$$x = a(pa^2 + qb^2 - 3rc^2) \quad , \quad y = b(pa^2 + qb^2 - 3rc^2)$$

$$z = c(3pa^2 + 3qb^2 - rc^2) \quad , \quad u = pa^2 + qb^2 + rc^2.$$

Aceste formule dau soluţii şi pentru ecuaţia mai generală

$$px^2 + qy^2 + rz^2 = u^3$$

în care p, q, r sunt numere date.

Aplicând formulele precedente pentru (1, 2, 3) şi permutările lor circulare se găsesc soluţiile

$$18^2 + 22^2 + 44^2 = 20^2 + 30^2 + 38^2 = 2^2 + 6^2 + 52^2 = 14^3$$

soluţii, care nu sunt date de formulele D-lui I. I. STAMATE.

Cu acest prilej remarcăm că exemplele (2) şi (3) din nota citată a D-lui I. I. STAMATE dau loc la următoarele egalităţi multigrade

$$(2)\quad \begin{cases} 25 + 108 + 110 = 52 + 54 + 137 = 3^5 \\ 25^2 + 108^2 + 110^2 = 52^2 + 54^2 + 137^2 = 29^3 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} 94 + 240 + 242 = 142 + 144 + 290 = 24^2 \\ 94^2 + 240^2 + 242^2 = 142^2 + 144^2 + 290^2 = 50^3. \end{cases}$$

A. GLODEŢ.

51. *Asupra problemei 5604.* O clasă de probleme din acelea propuse de D-l ION IONESCU, o constitue problemele de aritmetică în care găsirea soluţiilor nu prezintă decât o greutate aparentă, dar determinarea numărului de soluţii cere o analiză migăloasă şi atentă. Din această clasă face parte şi problema 5604 căreia i s'a publicat o soluţie la pag. 434 şi căreia am încercat să-i număr soluţiile utilizând indicatorii numerelor. Am găsit astfel 5647 soluţii bune, adică cu 22 mai multe.

Diferenţa aceasta provine de acolo că s'au dat 4 soluţii de forma $ab\,1/de\,7$ în loc de 5, şi anume: 101/707, 111/777, 121/847, 131/917 şi 141/987, iar de forma $ab\,1/de\,9$ una în loc de două: 101/909 şi 111/999. De asemenea, la pag. 436 au fost omise de o parte soluţiile 86/129 şi 96/128 şi de alta 23/69, 23/46, 34/68 şi 46/69 ca şi pe cele patru ce se deduc din acestea din urmă răsturnând numărătorul şi numitorul. De asemenea s'a omis a se considera şi cele 10 analoage deduse prin răsturnare din cele date la aceeaşi pagină.

Sunt de părere ca numărul soluţiilor formale să fie redus la 991 căci mi se pare că soluţii ca $000/def$ şi $00/def$ nu se pot considera ca diferite. E chestie de interpretare.

Problema se poate generaliza astfel:

Care sunt fracţiile subunitare, scrise în sistemul de numeraţie cu baza B, *cu numitorii* M×B, *care nu-şi schimbă valoarea ştergând dela numărător şi dela numitor ultima cifră dela dreapta?*

Această problemă admite $[(M-1)(B-1)+M]$ soluţii formale şi

$$\frac{1}{2}(M-1)(M-2)+\sum_{a=2}^{B-1} E[(M-1)/a]\,E[(B-1)/a]\,I(a),$$

unde E(A/B), *simbolul lui* LEGENDRE, înseamnă numărul întregilor conținuți în fracția (A/B), iar I arată *Indicatorul.*

I. B. F.

52. *Asupra problemei 4906* (rozolvată la pag. 603, Vol. XLIII). Fie (D_1) și (D_3) dreptele-locuri geometrice respective ale punctelor M_1 și M_3. Aceste drepte se taie în punctul ω și sunt evident perpendiculare una pe alta. Fiind dat punctul M_1, punctul M_3 este unic determinat și reciproc. Rezultă deci că punctele M_1 și M_3 formează fiecare pe baza respectivă, (D_1) și (D_3), câte o diviziune omografică. Fie ω_1, ω_3, intersecțiile lui AB cu (D_1) și (D_3); A', B', proiecțiile lui A, B, pe DC. Se constată lesne că B' este omologul lui ω_1, iar A' omologul lui ω_3. Avem:

$$\frac{\overline{\omega\omega_1}}{\overline{\omega A'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B'} + 2\overline{AA'}} = \text{constant}$$

deci cele două diviziuni omografice considerate sunt asemenea. Pe de o parte și, punctului dela infinit de pe (D_1) îi corespunde punctul dela infinit de pe (D_3).

Se știe că dreapta care unește două puncte omoloage, M_1M_3, înfășură în mișcarea ei, o conică tangentă la (D_1), (D_3). Intru cât cele două diviziuni omografice sunt asemenea, această conică este o parabolă, tangentă la (D_1) și (D_3) în punctele respective ω_1' și ω_3', omoloagele lui ω de pe (D_3) și (D_1), care puncte se pot ușor construi.

OCTAVIAN GH. RĂDULESCU.

53. *Notă asupra ortocentrului.* In manualele de geometrie elementară, concurența înălțimilor unui triunghiu este demonstrată fie pornind dela proprietatea ortocentrului de a fi centrul cercului înscris în triunghiul ortic, fie pornind dela proprietatea că același punct este centrul cercului circumscris triunghiului anticomplimentar.

Voiesc să remarc aci, că pentru a se demonstra aceeași teoremă poate fi utilizată și proprietatea că ortocentrul este centrul de similitudine extern al cercului circumscris și al cercului lui EULER.

Consider pentru aceasta un triunghiu ABC și notez cu A' proiecția lui A pe latura BC, iar cu D punctul unde înălțimea AA' taie a doua oară cercul circumscris. Fie H simetricul lui D în

raport cu A'. Dreptele BH şi CH sunt perpendiculare respectiv pe laturile AC şi AB. Intr'adevăr din triunghiul isoscel BHD rezultă:

$$\sphericalangle BHD = \sphericalangle BDH$$

Punctul D fiind pe cercul ABC, avem:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDH$$

ceea ce demonstrează că dreptele BH şi AC sunt perpendiculare şi în acelaşi timp şi concurenţa înălţimilor.

Proprietatea ortocentrului pe care am utilizat-o prezintă avantajul de a păstra un sens, în anumite cazuri limită, când celelalte două proprietăţi numai au niciunul.

Astfel, presupun că vârful A rămâne fix, iar C se confundă cu vârful B deplasându-se pe dreapta BC. La limită, ortocentrul H devine intersecţia perpendicularelor din A pe BC şi din B pe AB. Cercul circumscris triunghiului ABC se reduce la cercul tangent în B dreptei BC şi trecând prin A. D fiind intersecţia perpendicularei AA'H cu acest cerc avem evident:

$$\sphericalangle BAA' = \sphericalangle DBA' = \sphericalangle HBA'.$$

Deci:

$$A'D = A'H.$$

Punctul H astfel definit, păstrează, în raport cu triunghiul limită ABB proprietăţile obişnuite ale ortocentrului. In această ordine de idei mă mărginesc a cita două:

Se ştie că ortocentrul este centrul cercului conjugat triunghiul. In cazul limită ce ne interesează, triunghiul ABB este conjugat cercului cu centrul în H şi de rază BH fiindcă polara lui A este dreapta BC, iar AB fiind tangentă cercului, polarele celor doua vârfuri confundate în B coincid cu această tangentă.

De asemeni, se ştie că hiperbolele echilatere circumscrise unui triunghiu trec prin ortocentrul triunghiului. In cazul nostru, hiperbolele echilatere tangente în B dreptei BC şi trecând prin A trec şi prin punctul H. Intr'adevăr, pentru aceste hiperbole punctul lui FRÉGIER relativ lui B este punctul dela infinit al normalei în B, la tangenta BC. Cu alte cuvinte, perpendiculara în B, dusă pe BA întâlneşte din nou aceste hiberbole într'un punct astfel ca dreapta ce-l uneşte cu A să fie paralelă cu aceea normală adică în H.

ŞERBAN GHEORGHIU.

54. *O problemă de Analiză nedeterminată.*

Imi propun să demonstrez că înafară de soluţiile banale în care unul din numerele x *sau* y *este zero, nu există alte valori întregi pentru* x *şi* y *care să verifice ecuaţia*

$$(1) \qquad x^n + y^n = 10^t, \qquad n \geqslant 3.$$

Această chestiune este o extindere la puteri mai mari decât cuburile a problemei 3811: *Se cer pătratele mai mici ca 10.000 ale căror complimente aritmetice sunt tot patrate. Există cuburi în aceste condiţiuni?* (Soluţia în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXV, pag. 274 şi *Nota* Nr. 46 din Vol. XLII, pag. 581).

Pentrucă numărul n este presupus mai mare decât 2, el conţine fie factorul 4, fie un factor prim impar p. Dacă n conţine factorul 4, putem pune $n = 4m$ şi ecuaţia (1) devine:

$$(1') \qquad (x^m)^4 + (y^m)^4 = 10^t,$$

iar dacă n conţine factorul prim impar p, putem scrie $pm = n$, şi deci:

$$(1'') \qquad (x^m)^p + (y^m)^p = 10^t.$$

In consecinţă, pentru a demonstra imposibilitatea ecuaţiei (1) este suficient de a arăta că nu există numere întregi x şi y, diferite de zero, care să verifice ecuaţia, pentru $n = 4$ şi pentru $n = p$, p fiind un număr prim impar

$$(2) \qquad \begin{matrix} \text{I)} & n = 4 \\ & x^4 + y^4 = 10^t \end{matrix}$$

x şi y, trebue să fie, sau primi amândoi cu 5, sau divizibil cu 5 în acelaşi timp. Dacă x şi y sunt primi cu 5, atunci conform teoremei lui FERMAT:

$$x^{p-1} = \text{Mult. } p + 1 \qquad (p \text{ prim})$$

membrul I al ecuaţiei (2) este prim cu 5, deci x şi y trebuesc să se dividă cu 5.

Fie

$$x = 5^k x_1 \quad \text{şi} \quad y = 5^k y_1,$$

unde x_1 şi y_1 sunt numere prime cu 5; (2) devine:

$$(2') \qquad x_1^4 + y_1^4 = 2^t 5^{t-4k}.$$

Membrul I din (2) după aceleaşi considerente ca mai sus, este prim cu 5, deci nici membrul al doilea nu trebue să conţină pe 5, prin urmare:

$$t - 4k = 0,$$

şi ecuaţia (2) devine:

$$(2'') \qquad x_1^4 + y_1^4 = 2^{4k}.$$

Această ecuaţie este un caz particular al ultimei probleme a lui FERMAT, pentru $n = 4$,

$$x^4 + y^4 = z^4$$

care după cum a arătat EULER, pentru acest caz, este imposibilă în numere întregi. Pentru (2″) se poate da însă şi următoarea demonstraţie simplă:

Dacă x_1 şi y_1 sunt impari, cum puterile a 4ª a numerelor impare sunt (Mult. $16 + 1$) urmează că membrul I al ecuaţiei (2″) este divizibil cu 2 dar nu cu o altă putere a lui 2 şi deci pentru ca (2″) să fie posibilă trebue că şi x_1 şi y_1 să se dividă cu 2.

Fie

$$x_1 = 2^l x_2 \quad \text{şi} \quad y_1 = 2^l y_2$$

unde x_2 şi y_2 sunt numere impare. Introducând aceste valori în (2″) se găseşte:

$$(2''') \qquad x_2^4 + y_2^4 = 2^{4(k-l)}.$$

Dacă $k - l = 0$, avem soluţiile $x_2 = 1$, $y_2 = 0$ şi $x_2 = 0, y_2 = 1$ care conduc la cazurile banale, excluse prin enunţ; iar dacă $k > l$, după cum am văzut mai sus, membrul I al relaţiei (2‴) nu se divide cu 4 pe când membrul al II-lea se divide, deci:

Nu există numere întregi x *şi* y, *diferite de zero, pentru care să avem:*

$$x^4 + y^4 = 10^t.$$

(Va urma) IOAN B. FLORESCU.

55. *Raţionalizarea unei funcţii.* Dacă notăm

$$\sqrt[3]{P} = a \quad , \quad \sqrt[3]{Q} = b \quad , \quad \sqrt[3]{R} = c$$

şi ţinem seama de identitatea

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

fracţia

$$F = \frac{A}{\sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q} + \sqrt[3]{R}},$$

în care P, Q, R *sunt numere sau funcţiuni raţionale,* se poate scrie

$$F = \frac{A\left(\sqrt[3]{P^2} + \sqrt[3]{Q^2} + \sqrt[3]{R^2} - \sqrt[3]{PQ} - \sqrt[3]{QR} - \sqrt[3]{RP}\right)}{P + Q + R - 3\sqrt[3]{PQR}},$$

fracţie care este de forma

$$F = \frac{B}{\alpha - \sqrt[3]{\beta}}.$$

Multiplicând termenii acestei fracţii cu $\alpha^2 + \alpha\sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}$, obţinem

$$F = \frac{B\left(\alpha^2 + \alpha\sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha^3 - \beta}$$

şi astfel am reuşit să raţionalizăm fracţia dată.

IONEL I. STAMATE.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXII. Nr. 4, lunie 1942. Un nou sistem de coordonate; coordonate rombice, de V. ALACI.

CONSTANTIN G. ILIOVICI. *Greşeli în studiul formelor nedeterminate.* Ploeşti 1942.

CERERI

313. In bibliografiile cărţilor apărute în Ardeal este citată cartea: MÜLLER GEORG, *Compendium Arithmeticae vulgaris. Coronae, 1681, 8°, 48 p.* Se mai găseşte vreun exemplar din această carte braşoveană ?

VICTOR MARIAN.

314. Este obiceiul ca moartea unui creştin să se indice scriind o cruce (+) înaintea numelui lui sau al anului morţii. Astfel NEWTON (+ 1727) înseamnă că NEWTON a murit în anul 1727. Un corespondent al *Gazetei Matematice* a explicat în un număr al Suplimentului acestei Reviste că această întrebuinţare a semnului aritmetic + (plus) se datoreşte faptului că *moartea adună necontenit!*

Sunt scriitori cari întrebuinţează semnul × (crucea Sfântului Andreiu, sau semnul înmulţirii) pentru a arăta naşterea cuiva. Astfel NEWTON (× 1642) înseamnă că NEWTON s'a născut la 1642. Cum se justifică întrebuinţarea acestui semn pentru naşteri ?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

C. ALASIA. A proposito d'una construzione geometrica dell'equazione cubica. Cita di Castello, 1901.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Uno svilluppo del seno e coseno d'un arco qualunque. Pavia. 1910.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

SPIRU HARET. Cursul de mecanică în două volume — Statica şi Dinamica — predat în anul 1899—1900 la Universitatea din Bucureşti. Note de curs luate de Locot. CĂTĂNESCU.

Donată de D-l Prof. N. CIORĂNESCU.

..... Aritmetică românească în cirilice publicată înainte de anul 1860.

Donată de D-l Prof. N. CIORĂNESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4103 [1]). *Dacă u_i este al* i-*lea termen din şirul lui* FIBONACCI, *să se găsească fracţiile ireductibile egale cu*

$$\frac{u_{2n}-1}{u_{2n+1}} \; ; \; \frac{u_{2n}+1}{u_{2n+1}} \; ; \; \frac{u_{2n}-1}{u_{2n-1}} \; ; \; \frac{u_{2n}+1}{u_{2n-1}} .$$

I. B. FLORESCU.

Soluţia propunătorului. Notez cu

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 5, \ldots$$

termenii şirului lui FIBONACCI. Mă voi servi de relaţiile cunoscute şi uşor de demonstrat

$$u_{n+m} = u_n u_m + u_{n-1} u_{m-1}$$

$$u_n^2 - (-1)^n = u_{n+1} u_{n-1}$$

deosebind două cazuri, după paritatea lui n.

Cazul I, n par. Avem succesiv

$$\frac{u_{2n}-1}{u_{2n+1}} = \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - 1}{u_n (u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_{n+1} u_{n-1} + u_{n-1}^2}{u_n (u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$$\frac{u_{2n}+1}{u_{2n+1}} = \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 + 1}{u_n (u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_n u_{n-2} + u_n^2}{u_n (u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n+1} + u_{n-1}} .$$

Cazul II, n impar.

$$\frac{u_{2n}-1}{u_{2n+1}} = \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 - 1}{u_n (u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_n^2 + u_n u_{n-2}}{u_n (u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n+1} + u_{n-1}}$$

$$\frac{u_{2n}+1}{u_{2n+1}} = \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 + 1}{u_{2n+1}} = \frac{u_{n-1}^2 + u_{n+1} u_{n-1}}{u_n (u_{n+1} + u_{n-1})} = \frac{u_{n-1}}{u_n} .$$

Fracţia $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ este evident ireductibilă, deoarece doi termeni consecutivi ai şirului sunt primi între ei iar dacă considerăm şirul

$$w_2 = 3 \; ; \; w_3 = 4 \; ; \; w_4 = 7 \; ; \ldots w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$$

definit de recurenţa

$$w_n = u_n + u_{n-2}$$

---

1) Enunţul dela pag. 239, Vol. XXXVII a fost îndreptat în erata dela pag. 120, Vol. XXXVIII.

observăm că doi termeni consecutivi ai acestui şir sunt de asemeni primi între ei, deci şi fracţiile

$$\frac{u_n + u_{n-2}}{u_{n+1} + u_{n-1}}$$

sunt ireductibile.

Pentru ultimele două fracţii din enunţ, observăm că

$$\frac{u_{2n}-1}{u_{2n-1}} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}+1} \quad \text{şi} \quad \frac{u_{2n}+1}{u_{2n-1}} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}-1}$$

deci fracţiile ireductibile cu ele se deduc din inversele primelor două fracţii.

Notă. 1°. D-l I. B. FLORESCU a enunţat în problema D-sale, că 2 termeni consecutivi ai şirului

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{sau} \quad w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$$

sunt primi între ei. Iată o soluţie a acestei proprietăţi: Se vede că în şirul

$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_4 = 5,\ u_5 = 7$$

proprietatea este adevărată. Vom presupune-o adevărată pentru numerele u_{n-1}, u_n şi vom arăta că ea este adevărată şi pentru u_n, u_{n+1}. In adevăr din

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

se vede că dacă u_{n+1}, u_n nu ar fi primi între ei, divizorul lor comun ar divide şi pe u_{n-1} şi atunci u_n, u_{n-1} nu ar mai fi primi între ei, ceea ce este contrar ipotezei. Deci u_n, u_{n+1} sunt primi între ei. La fel se arată că w_n. w_{n+1} sunt primi între ei.

2°. S'a primit o soluţie bună de la D-l D. ŞERBAN-ULMENI.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4628. *Să se găsească patratele perfecte de cinci cifre* abcde, *astfel ca produsul dintre numărul* ab *format cu primele cifre şi numărul* de *format cu ultimele cifre, divizat cu cifra din mijloc* c *să dea un cub perfect.*

O. ORĂNESCU.

Soluţie. Relaţiunile de condiţie sunt:

$$abcde = A^2 \quad , \quad ab \times de/c = B^3 \quad ; \quad c \neq 0.$$

Nu vom considera eventualele soluţii banale şi prin urmare $de \neq 00$ şi $ab \geqslant 10$. Se constată uşor că $2 \leqslant B \leqslant 21$.

B nu poate avea factori primi mai mari ca 10, căci c fiind de o cifră, unul din numerele ab sau de, va trebui să conţină aceşti factori cel puţin la puterea doua şi deci nu ar mai fi de două cifre.

Prin urmare B nu poate fi decât:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21

deci poate lua 16 valori.

Se mai observă că c fiind de o cifră, nici numerele de cari termină un patrat perfect, nu poate conţine factori primi mai mari ca 10, adică nu pot fi decât:

01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 36, 49, 56, 64, 81, 84, 96.

Vom da lui B succesiv valorile specificate mai sus.

1. $\mathbf{B = 2}$; $ab \times de = 2^3 . c = 8c . \leqslant 72$ deci $de \leqslant 7$.

$$de = 01 \quad \therefore \quad ab = 8c$$

adică

$$c = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

şi respectiv

$$ab = 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72.$$

Se obţin numerele:

16201, 24301, 32401, 40501, 48601, 56701, 64801, 72901

cari însă nu sunt patrate perfecte.

$$de = 04 \; ; \quad ab = 2c \; , \quad \text{deci } c = 5, 6, 7, 8, 9$$

respectiv

$$ab = 10, 12, 14, 16, 18.$$

Numerele

10504, 12604, 14707, 16804 şi 18904,

cari nu sunt patrate perfecte.

2. $\mathbf{B = 3}$; $ab \times de = 3^3 . c = 27\, c . \leqslant 243$; $de \leqslant 24$.

$$de = 01 \quad \therefore \quad ab = 27c \quad \therefore \quad c = 1, 2, 3$$

şi respectiv

$$ab = 27, 54, 81.$$

Numerele

27101, 54201, 81301,

cari nu sunt patrate perfecte.

$de = 04$ $\therefore$ $ab = 27c/4$ $\therefore$ $c = 4, 8$ şi $ab = 27, 54$.

Numerele 27404 şi 54804, cari nu sunt patrate.

$de = 09$ $\therefore$ $ab = 27c/9 = 3c$ $\therefore$ $c = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ şi $ab = 12, 15, 18, 21, 24, 27$.

Numerele 12409, 15509, 18609, 21709, 24809, 27909, cari nu sunt patrate.

$de = 16$ $\therefore$ $ab = 27c/16$, inadmisibil.

$de = 21$ $\therefore$ $ab = 27c/21 = 9c/7$ idem căci $c \leqslant 9$.

$de = 24$ $\therefore$ $ab = 27c/24 = 9c/8$ idem.

3. $\mathbf{B = 4}$ $\therefore$ $ab \times de = 4^3 . c = 64c . \leqslant 576$ $\therefore$ $de \leqslant 57$.

$de = 01$ $\therefore$ $ab = 64c$ $\therefore$ $c = 1$ şi $ab = 64$.

Numărul 64101, care nu este patrat.

$de = 04$ $\therefore$ $ab = 64c/4 = 16c$, deci $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ şi $ab = 16, 32, 48, 64, 80, 96$.

Numerele 16104, 32204, 48304, 64404, 80504, 96604, cari nu convin.

$de = 09$ $\therefore$ $ab = 64c/9$ $\therefore$ $c = 9$, $ab = 64$.

Numărul 64909, care nu convine.

$de = 16$ $\therefore$ $ab = 64c/16 = 4c$ $\therefore$ $c = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ şi $ab = 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36$.

Numerele 12316, 16416, 20516, 24616, 28716, 32816, 36916, cari nu convin.

$de = 21$ $\therefore$ $ab = 64c/21$, imposibilitate.

$de = 24$ $\therefore$ $ab = 64c/24 = 8c/3$ $\therefore$ $c = 6, 9$ şi $ab = 16, 24$.

Numerele 16624 şi 24924, cari nu convin.

$de = 25$ $\therefore$ $ab = 64c/25$, imposibilitate.

$de = 36$ $\therefore$ $ab = 64c/36 = 16c/9$ $\therefore$ $c = 9$, $ab = 16$.

Numărul 16936, care nu e patrat.

$de = 49$ $\therefore$ $ab = 64c/49$, imposibilitate.

$de = 56$ $\therefore$ $ab = 64c/56 = 8c/7$, idem.

4. $\mathbf{B = 5}$ $\therefore$ $ab \times de = 5^3c = 125 . c$; de trebue să aibă factorul 5, deci nu poate fi decât 25.

$de = 25$ $\therefore$ $ab = 125c/25 = 5c$ $\therefore$ $c = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ şi $ab = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$.

Numerele 10225, 15325, 20425, 25525, *30625*, 35725, 40825, 45925.

Numărul 30625 este singurul care convine, căci $30 \times 25/6 = 125 = 5^3$.

5. $\mathbf{B = 6}$ $\therefore$ $ab = de = 6^3c = 216c$; *de* va trebui să conţină factorul 2 sau 3 şi să fie mai mare ca 1.

$de = 04$ $\therefore$ $ab = 216c/4 = 54c$. deci $c = 1$, $ab = 54$.

Numărul 54104, care nu e patrat perfect.

$de = 09$ $\therefore$ $ab = 216c/9 = 24c$ $\therefore$ $c = 1, 2, 3, 4$ şi $ab =$ 24, 48, 72, 96.

Numerele 24109, 48209, 72309, 96409, cari nu sunt patrate.

$de = 16$ $\therefore$ $ab = 216c/16 = 27c/2$ $\therefore$ $c = 2, 4, 6$ şi $ab = 27,$ 54, 81.

Numerele 27216, 54416, 81616, cari nu convin.

$de = 21$ $\therefore$ $ab = 216c/21 = 72c/7$ $\therefore$ $c = 7$, $ab = 72$.

Numărul 72721, care nu convine.

$de = 24$ $\therefore$ $ab = 216c/24 = 9c$ $\therefore$ $c = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ 9 şi $ab = 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81$.

Numerele 18224, 27324, 36424, 45524, 54624, 63724, 81924 cari nu convin.

$de = 36$ $\therefore$ $ab = 216c/36 = 6c$ $\therefore$ $c = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ 9 şi $ab = 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54$.

Numerele 12236, 18336, 24436, 30536, 36636, 42736, 48836, 54936, cari nu convin.

$de = 56$ $\therefore$ $ab = 216c/56 = 27c/6$ deci $c = 7$, $ab = 27$.

Numărul 27756 care nu e patrat.

$de = 64$ $\therefore$ $ab = 216c/64 = 27c/8$ $\therefore$ $c = 8$, $ab = 27$.

Numărul 27864, care nu convine.

$de = 81$ $\therefore$ $ab = 216c/81 = 8c/3$ $\therefore$ $c = 6, 9$ şi $ab = 16, 24$.

Numerele 16681 şi 24981, cari nu convin.

$de = 84$ $\therefore$ $ab = 216c/84 = 18c/7$ $\therefore$ $c = 7$, $ab = 18$.

Numărul 18784, care nu e patrat.

$de = 96$ $\therefore$ $ab = 216c/96 = 9c/4$ $\therefore$ $c = 8$, $ab = 18$.

Numărul 18896, care nu convine.

6. $\mathbf{B = 7}$; $ab \times de = 7^3c = 343c$; *de* trebue să conţină pe 7 şi deci nu poate fi decât 21, 49, 56, 84.

$de = 21$ $\therefore$ $ab = 343c/21 = 49c/3$ $\therefore$ $c = 3, 6$ şi $ab = 49, 98$.

Numerele 49321, 98621, cari nu convin.

$de = 49$ $\therefore$ $ab = 343c/49 = 7c$ $\therefore$ $c = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ 9 şi $ab = 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63$.

Numerele 14249, 21349, 28449, 35549, 42649, 49749, 56849, 63949.

$de = 56$ ∴ $ab = 343c/56 = 49c/8$ ∴ $c = 8$, $ab = 49$.

Numărul 49856, care nu e patrat.

$de = 84$ ∴ $ab = 343c/84 = 49c/12$, imposibilitate.

7. $\mathbf{B = 8}$; $ab \times de = 8^3c = 512c$; de trebue să conţină factorul 8 şi deci nu poate fi decât 16, 24, 56, 64, 96.

$de = 16$ ∴ $ab = 512c/16 = 32c$ ∴ $c = 1, 2, 3$ şi $ab = 32, 64, 96$.

Numerele 32116, 64216, 96316, cari nu sunt patrate.

$de = 24$ ∴ $ab = 512c/24 = 64c/3$ ∴ $c = 3$, $ab = 64$.

Numărul 64324, care nu convine.

$de = 56$ ∴ $ab = 512c/56 = 64c/7$ ∴ $c = 7$, $ab = 64$.

Numărul 64756, care nu e patrat.

$de = 64$ ∴ $ab = 512c/64 = 8c$ ∴ $c = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ şi $ab = 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72$.

Numerele 16264, 24364, 32464, 40564, 48664, 56764, 64864, 72964, cari nu convin.

$de = 96$ ∴ $ab = 512c/96 = 16c/3$ ∴ $c = 3, 6, 9$ şi $ab = 16, 32, 48$.

Numerele 16396, 32696, 48996, nu convin.

8. $\mathbf{B = 9}$ ∴ $ab \times de = 9^3c = 729c$; de trebue să aibă factorul 9 şi deci nu poate fi decât 09, 36, 81.

$de = 09$ ∴ $ab = 729c/9 = 81c$ ∴ $c = 1$, $ab = 81$.

Numărul 81109, care nu e patrat.

$de = 36$ ∴ $ab = 729c/36 = 81c/4$ ∴ $c = 4$, $ab = 81$.

Numărul 81436, care nu e patrat.

$de = 81$ ∴ $ab = 729c/81 = 9c$ ∴ $c = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ şi $ab = 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81$.

Numerele 18281, 27381, *36481*, 45581, 54681, 63781, 72881, 81981.

Numai numărul 36481 este patrat perfect şi deci constitue încă o soluţie a problemei: $36 \times 81/4 = 9^3$.

9. $\mathbf{B = 10}$ ∴ $ab \times de = 10^3c = 1000c$; de trebue să conţină pe 5 deci nu poate fi decât 25 şi deci $ab = 1000c/25 = 40c$ ∴ $c = 1, 2$ şi $ab = 40, 80$.

Numerele 40125, 80225, cari nu convin.

10. $\mathbf{B = 12}$ ∴ $ab \times de = 12^3c = 1728c$; $de \geqslant 18$.

$de = 21$ ∴ $ab = 1728c/21 = 576c/7$, imposibilitate.

$de = 24$ ∴ $ab = 1728c/24 = 72c$ ∴ $c = 1$, $ab = 72$.

Numărul 72124, care nu e patrat.

Numerele 25, 49, cari nu conţin factorii 2 sau 3 nu convin.

$de = 36$ $\therefore$ $ab = 1728c/36 = 48c$ $\therefore$ $c = 1, 2$ şi $ab = 48, 96$.

Numerele 48136, 96236, cari nu convin.

$de = 56$ $\therefore$ $ab = 1728c/56 = 216c/7$, imposibilitate.

$de = 64$ $\therefore$ $ab = 1728c/64 = 27c$ $\therefore$ $c = 1, 2, 3$ şi $ab = 27, 54, 81$.

Numerele 27164, 54264, 81364, cari nu convin.

$de = 81$ $\therefore$ $ab = 1728c/81 = 64c/3$ $\therefore$ $c = 3$, $ab = 64$.

Numărul 64381, care nu e patrat.

$de = 84$ $\therefore$ $ab = 1728c/84 = 144c/7$, imposibilitate.

$de = 96$ $\therefore$ $ab = 1728c/96 = 18c$ $\therefore$ $c = 1, 2, 3, 4, 5$ şi $ab = 18, 36, 54, 72, 90$.

Numerele 18196, 36296, 54396, 72496, 90596, cari nu sunt patrate.

11. $\mathbf{B = 14}$ $\therefore$ $ab \times de = 14^3c = 2744c$; de trebue să aibă factorul 7 deci poate fi: 21, 49, 56, 84 şi mai mare ca 27 deci:

$de = 49$ $\therefore$ $ab = 2744c/49 = 56c$ $\therefore$ $c = 1$, $ab = 56$.

Numărul 56149, care nu e patrat.

$de = 56$ $\therefore$ $ab = 2744c/56 = 49c$ $\therefore$ $c = 1, 2$, $ab = 49, 98$.

Numerele 49156, 98256, cari nu convin.

$de = 84$ $\therefore$ $ab = 2744c/84 = 98c/3$ $\therefore$ $c = 3$, $ab = 93$.

Numărul 93384 care nu e patrat.

12. $\mathbf{B = 15}$ $\therefore$ $ab \times de = 15^3c = 3375c$; de trebue să conţină factorul 5, deci $de = 25$; însă trebuind să fie mai mare ca 33 nu convine.

13. $\mathbf{B = 16}$ $\therefore$ $ab \times de = 16^3c = 4096c$ $\therefore$ $de > 40$ şi va trebui să conţină pe 64. Deci $de = 64$ $\because$ $ab = 4096c/64 = 64c$ $\therefore$ $c = 1$, $ab = 64$.

Numărul 64164 care nu e patrat.

14. $\mathbf{B = 18}$ $\therefore$ $ab \times de = 18^3c = 5832c$ $\therefore$ $de > 58$ şi va trebui să aibă factorul 9 şi prin urmare $de = 81$ $\therefore$ $ab = 5832c/81 = 72c$ $\therefore$ $c = 1$, $ab = 72$.

Numărul 72181, care nu e patrat.

15. $\mathbf{B = 20}$ $\therefore$ $ab \times de = 20^3c = 8000c$ $\therefore$ $de > 80$ şi va trebui să conţină şi factorul 5, ceea ce nu se poate.

16. $\mathbf{B = 21}$ $\therefore$ $ab \times de = 21^3c = 9261c$ $\therefore$ $de > 92$ şi să aibă şi factorul 7 ceea ce nu se poate.

Soluţiile problemei sunt deci numerele 30625 şi 36481. Problema comportă 138 încercări.

Observaţie. Au găsit ambele soluţii pe căi incomplecte şi neriguroase d-nii: SUBLOCOT. M. GRUMĂZESCU, MATEI D. DUMITRU şi M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

O. OR.

PROBLEMA 5174. *Să se simplifice expresia*

$$E = \frac{a^{12} + b^{12} + c^{12} - 3a^4b^4c^4}{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2} - \frac{a^{15} + b^{15} + c^{15} - 3a^5b^5c^5}{a^9 + b^9 + c^9 - 3a^3b^3c^3},$$

ştiind că $a + b + c = 0$.

MIRCEA ADAM.

Soluţie dată de D-nii: DRĂGHICESCU P., PANTELIMON C., POPA AUREL, POPA MIRCEA, ROHR A., TURCU SANDU şi WEGENER N.

Fie

$$x^3 + px + q = 0$$

ecuaţia cu rădăcinile a, b, c. Calculăm sumele puterilor asemenea S_n şi găsim

$$S_6 = 3q^2 - 2p^3\ ,\ S_9 = 9p^3q - 3q^3,$$

$$S_{12} = 2p^6 + 3q^4 - 24p^3q^2\ ,\ S_{15} = 50p^3q^3 - 3q^5 - 15p^6q,$$

precum şi $abc = -q$. Cu acestea, găsim uşor

$$E = \frac{58q^2 + 6p^3}{9}.$$

Notă. 1°. Calculele se pot simplifica puţin dacă folosim identitatea

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wv).$$

2°. D-l VIJELIE EUGEN a folosit identitatea de mai sus sub forma

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)^3 - 3(u + v + w)(uv + vw + wu),$$

dar a obţinut un rezultat greşit.

M. G.

PROBLEMA 5501. *Să se stabilească relația:*

$$C_{(n-j)(p+1)}^{n-j} + (-1)\, C_n^1\, C_{(n-j-1)(p+1)}^{n-j} + (-1)^2\, C_n^2\, C_{(n-j-2)(p+1)}^{n-j} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-j-1}\, C_n^{n-j-1}\, C_{p+1}^{n-j} = C_n^{j-1}\, C_{n+p-j}^{n-j} +$$

$$+ (-1)\, C_n^{j-2}\, C_{n+p-j+(p+1)}^{n-j} + (-1)^2\, C_n^{j-3}\, C_{n+p-j+2)(p+1)}^{n-j} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{j-1}\, C_n^o\, C_{n+p-j+(j-1)(p+1)}^{n-j}$$

Să se arate că avem, în particular:

$$C_{n+p-1}^{n-1} = C_{(n-1)(p+1)}^{n-1} + (-1)\, C_n^1\, C_{(n-2)(p+1)}^{n-1} +$$

$$+ (-1)^2\, C_n^2\, C_{(n-3)(p+1)}^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-2}\, C_n^{n-2}\, C_{p+1}^{n-1}.$$

P. SERGESCU.

Soluție dată de D-ra F. BRĂTILĂ (profesoară de matematici).

Să considerăm *prima relație.* In membrul întâi observăm că: $C_{(n-j)(p+1)}^{n-j}$ e coeficientul lui x^{n-j} în $(1+x)^{(p+1)(n-j)} = y^{n-j}$ unde am pus, pentru simplificarea scrisului

$$(1+x)^{p+1} = y.$$

$C_{(n-j-1)(p+1)}^{n-j}$ e coeficientul lui x^{n-j} în desvoltarea lui y^{n-j-1}

. . . . . .

C_{p+1}^{n-j} e coeficientul lui x^{n-j} în desvoltarea lui y.

Ca atare primul membru reprezintă coeficientul lui x^{n-j} în desvoltarea lui

$$y^{n-j} - C_n^1\, y^{n-j-1} + C_n^2\, y^{n-j-2} + \ldots + (-1)^{n-j-1}\, C_n^{n-j-1}\, y =$$

$$= \frac{1}{y^j}\left[(y-1^n) - \left[(-1)^{n-j} C_n^{n-j}\, y^j + (-1)^{n-j+1}\, C_n^{n-j+1}\, y^{j-1} + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + (-1)^n\, C_n^n\right]\right].$$

Dar:

$$y - 1 = (1+x)^{p+1} - 1 = x\left[(1+x)^p + (1+x)^{p-1} + \ldots + 1\right]$$

așa încât $(y-1)^n$ are pe x^n ca factor și deci nu conține termeni în x^{n-j}. Deci putem suprima termenul $(y-1)^n$. De asemeni, termenul $(-1)^{n-j}\dfrac{C_n^{n-j}\, y^j}{y^j}$ e o constantă și nu conține pe x^{n-j}.

Rezultă că singurii termeni cari conţin x^{n-j} sunt:

$$(-1)^{n-j} C_n^{n-j+1} y^{-1} + (-1)^{n-j+1} C_n^{n-j+2} y^{-2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} C_n^n y^{-j}.$$

Dar avem desvoltarea în serie:

$$y^{-s} = (1+x)^{-(p+1)s} = 1 - \frac{ps+s}{1} x + \frac{(ps+s)(ps+s+1)}{1.2} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-j} \frac{(ps+s)(ps+s+1)\ldots(ps+s+n-j-1)}{(n-j)!} x^{n-j} + \ldots$$

aşa că, în y^{-s}, coeficientul lui x^{n-j} este:

$$(-1)^{n-j} C_{n-j-1+s(p+1)}^{n-j}.$$

Prin urmare, coeficientul lui x^{n-j} în expresia de mai sus este:

$$C^{n-j+1} C_{n+p-j}^{n-j} - C_n^{n-j+2} C_{n+p-j+(p+1)}^{n-j} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{j-1} C_n^n C_{n+p-j+(j-1)(p+1)}^{n-j}.$$

Ţinând seama de faptul că $C_n^{n-j+s} = C_n^{j-s}$, expresia precedentă devine tocmai membrul al doilea al primei relaţii ce avem de stabilit. Prin urmare, relaţia întâia e stabilită.

In particular, pentru *relaţia a doua* vom face $j = 1$ în prima relaţie. Membrul al doilea se reduce la primul termen, căci pentru $s > 1$ avem $C_n^{1-s} = 0$. Prin urmare:

$$C_{n+p-1}^{n-1} = C_{(n-1)(p+1)}^{n-1} + (-1) C_n^1 C_{(n-2)(p+1)}^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2} C_n^{n-2} C_{p+1}^{n-1}.$$

Această relaţie se poate stabili şi pe altă cale, considerând *combinările generalizate* $C_{(a_1, a_2, \ldots a_n)}^p$, adică grupele deosebite de câte p elemente ce se pot forma cu cele n litere $A_1, A_2, \ldots A_n$ în care A, poate fi repetat până la a_1 ori...., A_n până la a_n ori. Enunţul problemei a fost inspirat de calculul în două moduri deosebite a lui $C_{(p, p, p, \ldots p)}^p$. Acesta e, pe de o parte, în mod evident $K_n^p = C_{n+p-1}^{n-1}$, iar, pe de altă parte, aplicând formula generală care dă combinările generalizate, se obţine membrul al doilea al relaţiei precedente.

Pentru combinările generalizate, se poate vedea nota D-lui P. SERGESCU în *Bulletin dela Section Scientifique de l'Académie Roumaine*, XXIII (1941) p. 485—491 sau articolul D-rei F. BRĂTILĂ şi D-lui P. SERGESCU în *Revista Matematică din Timişoara*, An. XXI, pag. 13—19.

PROBLEMA 5529. *Peste câţi ani dela apariţia* „Gazetei Matematice", *numărul format de anul respectiv scris după anul de apariţie se va împărţi exact cu numărul anilor de apariţie?*

COMANDOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: Ş. STOIANOVICI (C. N. N. F. Predeal), T. TURCULEŢ, A. VASILIU, D. VASILIU Lc. Militar-Iaşi) şi R. VOINEA (bacalaureat Craiova).

Fie A anul respectiv şi cum *1895* este anul de apariţie, atunci după enunţ avem:

$$18950000 + A = M(A - 1895).$$

Dar cum avem:

$$\frac{18950000 + A}{A - 1895} = 1 + \frac{18951895}{A - 1895}$$

unde fracţiunile trebuesc să se reducă la numere întregi, atunci trebue ca numărul:

$$18951895 = 1895 \times 10001 = 5 \cdot 73 \cdot 137 \cdot 379$$

să se împartă cu $(A - 1895)$.

Prin urmare numărul $(A - 1895)$ va fi unul din divizorii lui $5 \times 73 \times 137 \times 379$, adică vom avea:

$A - 1895$	A
1	1896
5	1900
73	1968
137	2032
379	2274
$5 \cdot 73 = 365$	2260
$5 \cdot 137 = 685$	2580
. . . . .	. . . .

Problema are atâtea soluţii câţi divizori are $5 \times 73 \times 137 \times 379$, adică 16 soluţii.

Observaţiuni.

1. Soluţiunea dată admite că A este un număr de patru cifre, ceea ce pentru viaţa *Gazetei Matematice* este mulţumitor. Dacă am admite că A este un număr de n cifre, atunci $(A - 1895)$ va fi căutat printre divizorii expresiei:

$$1895 \cdot (10^n + 1).$$

2. Au mai rezolvat parţial problema D-nii D. BOIANGIU şi C. CRUCERU admiţând eronat că *10001* este prim şi luând numai divizorii lui *1895*.

I. L.

PROBLEMA 5531. *Se consideră şirul cu termenul general* u_n, *astfel ca*

$$(1) \qquad u_n = pu_{n-1} + u_{n-2}\ ,\ u_0 = 0\ ,\ u_1 = p,$$

p *fiind un număr dat. Să se demonstreze relaţia*

$$(2) \qquad u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = \frac{1}{p}\, u_n\, u_{n+1}.$$

M. GHERMĂNESCU.

1°. *Soluţie* dată de D-nii: ARDELEANU GH., BOGDAN GH., BOSINCEANU C., CĂRUNTU FL., PUCHIU GH., TILICĂ ST. şi VASILIU D.

Inmulţim relaţia (1) cu u_{n-1} şi adunăm relaţiile obţinute dând lui n valorile 2, 3, 4, ... n, $n+1$,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\, u_{i+1} = p \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} u_i\, u_{i-1},$$

care se reduce la (2).

2° *Soluţie* dată de D-nii: P. DRĂGHICESCU, POPA AUREL şi POPESCU GH. MARIN.

Observăm că

$$u_n\, u_{n+1} = u_n\,(pu_n + u_{n-1}) = pu_n^2 + u_n\, u_{n-1},$$

astfel că relaţia (2) se reduce la

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-1}^2 = \frac{1}{p}\, u_n\, u_{n-1}.$$

Procedând la fel, cu membrul al doilea al acestei relaţii ajungem, din aproape în aproape, la $u_1^2 = \frac{1}{p}\, u_2\, u_1$, care este o identitate.

3°. *Soluţie* dată de D-nii: BAKONYI C., GHEORGHIU OCT. şi MANOLIU V.

Vom întrebuinţa metoda inducţiei complecte. Se vede uşor că relaţia propusă este adevărată pentru $n = 1$, $n = 2$. Să presupunem că este adevărată până la indicele n şi să arătăm că este adevărată şi pentru $n+1$.

Observăm, în acest scop, că avem, conform relației (2) presupusă adevărată

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 + u_{n+1}^2 = \frac{1}{p} u_n u_{n+1} + u_{n+1}^2 =$$

$$= \frac{1}{p} u_{n+1}(u_n + p u_{n+1}) = \frac{1}{p} u_{n+1} u_{n+2},$$

adică o relație din aceeași formă ca și (2), care este astfel generală.

Notă. Problema are în definitiv rostul de a calcula suma pătratelor primilor n termeni ai șirului definit de (1). Ea constitue un caz particular al aceleia corespunzătoare șirului definit de

$$u_n = p u_{n-1} + q u_{n-2},$$

pe care am rezolvat-o mai de mult (R. M. T. 1923, v. III, p. 115—119).

M. G.

PROBLEMA 5613. *In Journal des Savants, an. 1698, pag.* 124, M. ROLLE (*sub pseudonimul* REMI LOCHELL) *a enunțat proprietatea :*

Dacă ecuația

$$x^3 - px - q = 0$$

$(p > 0, q > 0)$ *are o singură rădăcină reală* c, *ea e mai mare ca* $2\sqrt{\frac{p}{3}}$, *dar mai mică de cât cel puțin una din cantitățile* $p + 1$ *sau* $q + 1$. *Să se arate, mai precis, că avem totdeauna*

$$2\sqrt{\frac{p}{3}} < c < q + 1$$

dar că se poate să avem $c > p + 1$.

P. SERGESCU.

Soluție dată de D-l A. TARCZEWSKI (student în matematici, Timișoara).

Insemnând $f(x) = x^3 - px - q$

șirul lui ROLLE pentru ecuația dată e

$$f(-\infty) < 0 \; ; \; f\left(-\sqrt{\frac{p}{3}}\right) = \frac{2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} - q \; ; \; f\left(+\sqrt{\frac{p}{3}}\right) =$$

$$= -\frac{2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} - q \; ; \; f(+\infty) > 0.$$

Pentru ca ecuaţia să aibă o singură rădăcină reală, trebue

$$\frac{2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} - q < 0 \quad \therefore \quad q > \frac{2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}.$$

Dar atunci:

$$f\left(2\sqrt{\frac{p}{3}}\right) = \frac{2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} - q < 0 \quad \therefore \quad c > 2\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Pe de altă parte:

$$f(q+1) = q^3 + 3q^2 + (2-p)q + 1 - p = q(q^2 + 2 - p) + (3q^2 + 1 - p).$$

Ţinând seama de faptul că $q > \frac{2p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$, avem:

$$q^2 + 2 - p > \frac{4p^3}{27} - p + 2 \qquad 3q^2 + 1 - p > \frac{4p^3}{9} - p + 1.$$

Minimul (când $p > 0$), al lui $\frac{4p^3}{27} - p + 2$ are loc pentru $p = \frac{3}{2}$ şi e evident pozitiv. Minimul lui $\frac{4p^3}{9} - p + 1$ (când $p > 0$), are loc pentru $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi e evident pozitiv. Prin urmare $f(q+1) > 0$ şi deci $c < q + 1$.

Pe de altă parte, ecuaţia

$$x^3 - x - 24 = 0$$

are rădăcina reală 3 şi rădăcinile imaginare $\frac{-3 \pm i\sqrt{23}}{2}$. Dar $3 > 1 + 1 = 2$, deci $c > p + 1$.

EXERCIŢII

21. Se cere pătratul de forma *abbcca*.

S-LT. M. A. VASILESCU-STABU.

R. Trebue să avem

$$N^2 = 100001a + 11000b + 110c$$

$$\therefore \quad N^2 = 11\,[9091a + 200b + 2c].$$

Se dă lui *ca* pe rând valorile ultimelor două cifre ale unui pătrat perfect şi se determină apoi *b* aşa încât paranteza să fie divizibilă prin 11. Se găseşte soluţia

$$715^2 = 511225.$$

22. Să se găsească numărul de 4 cifre *abcd* aşa ca suma cifrelor să fie pătratul cifrei *c*, suma cifrelor extreme să fie pătratul lui *b*, iar d^2 să fie egal cu *c*.

CPT. E. ST. IACOB.

R. Ecuaţiile problemei sunt

$$a + b + c + d = c^2 \quad ; \quad (a + d)^2 = b \quad ; \quad d^2 = c$$

în care *c* nu poate fi decât 0, 4 sau 9. Soluţia $c = 0 \quad \therefore \quad d = 0$ se elimină căci conduce la $a + b = 0$.

Dând lui *c* pe rând celelalte valori se găseşte numai soluţia

$$abcd = 1942.$$

PROBLEME PROPUSE

5667. Razele cercurilor exînscrise într'un triunghiu pot fi laturile unui triunghiu?

I. IONESCU.

5668. Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 să se formeze trei numere N, *n*, *r* aşa încât *n* să fie rădăcina cubică a lui N cu aproximaţie mai mică decât o unitate, iar *r* restul corespunzător. Exemplu:

$$N = 19638 \quad , \quad n = 27 \quad , \quad r = 45.$$

V. THÉBAULT.

5669. Să se rezolve ecuaţia:

$$\varphi_x\,[\varphi_y\,(2^\alpha) \cdot \varphi_z\,(3^\beta)] = 1,$$

unde $\varphi_i\,(i)$ reprezintă indicatorul de ordinul *i* al numărului *i*.

COMANDOR I. LINTEŞ.

5670. Să se determine numerele N, pentru care N^2 este de forma: *aaabcccd.*

S-LT. M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

5671. Se consideră şirul cu termenul general u_n, astfel ca

$$u_n = pu_{n-1} + u_{n-2} \quad , \quad u_0 = 0 \quad , \quad u_1 = p,$$

p fiind un număr dat.

Să se demonstreze că transformarea

$$y = \frac{pu_1 x_1 + pu_2 x_2 + \ldots + pu_n x_n - u_n x_{n+1}}{\sqrt{u_n u_{n+2}}},$$

unde $n = 1, 2, 3 \ldots$ este ortogonală.

M. GHERMĂNESCU.

5672. Să se găsească valorile extreme ale lui x, y, z astfel încât să fie satisfăcut sistemul de inegalităţi:

$$| a_i x + b_i y + c_i z | \leqq | M_i | \qquad (i = 1, 2, 3)$$

în care $| M_i |$ este valoarea absolută a lui M_i, iar a_i, b_i, c_i, M_i sunt numere reale oarecare.

Care este interpretarea geometrică a sistemului de inegalităţi considerat?

Să se arate că extremele găsite pentru x, y, z, sunt efectiv atinse.

I. B. FLORESCU.

5673. $a, b, \ldots, l$ fiind reali şi pozitivi, punem:

$$S(\alpha) = a^\alpha + b^\alpha + \ldots + l^\alpha.$$

Se cere: 1°. Să se arate că avem:

$$\begin{vmatrix} S(2\alpha) & S(\alpha+\beta) & S(\alpha+\gamma) \\ S(\beta+\alpha) & S(2\beta) & S(\beta+\gamma) \\ S(\gamma+\alpha) & S(\gamma+\beta) & S(2\gamma) \end{vmatrix} \geqq 0.$$

2°. Să se deducă:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{\alpha+\beta} & \frac{1}{\alpha+\gamma} \\ \frac{1}{\beta+\alpha} & \frac{1}{2\beta} & \frac{1}{\beta+\gamma} \\ \frac{1}{\gamma+\alpha} & \frac{1}{\gamma+\beta} & \frac{1}{2\gamma} \end{vmatrix} \geqq 0,$$

α, β, γ fiind reali şi pozitivi.

3°. Să se verifice direct ultima inegalitate.

4°. Să se generalizeze inegalităţile 1° şi 2°.

ŞERBAN GHEORGHIU.

5674. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = (a - x)\sqrt{x(b - x)}$$

şi să i se construiască curba reprezentativă, a şi b fiind pozitive.

G-L GH. BUICLIU.

5675. Să se demonstreze că

$$\Phi = pR^2 \cdot \frac{p^2 + 2rR + r^2}{(R + 2r_a)(R + 2r_b)(R + 2r_c)}$$

este expresia ariei patrulaterului format de cele patru puncte FEUERBACH ale unui triunghiu în care p este semiperimetrul, R raza cercului circumscris, r şi r_i razele cercurilor tritangente laturilor, înscris şi exînscrise.

ŞT. S. MIHĂESCU.

5676. 1°. Fie P un punct variabil pe cateta OB a triunghiului dreptunghic AOB. Perpendiculara din P pe AB o taie în Q. Locul intersecţiei dreptelor AP şi OQ este o iperbolă echilateră (I) circumscrisă triunghiului OAB, cu centrul în mijlocul lui OA. Să se afle ecuaţia redusă a iperbolei (I) când $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Presupunând că variază lungimea catetei OB, să se afle: 2°. locul polului dreptei OB în raport cu iperbola (I) şi 3°. locul intersecţiei asimptotelor iperbolei (I) cu paralela din B la OA.

N. ABRAMESCU.

5677. Să se calculeze procentul pierderilor din mina unui creion cilindric prin ascuţire cu maşina, ştiind că prin ascuţire se obţine de fiecare dată un vârf în formă de con şi că prin scriere se utilizează mina descoperită până când rămâne o jumătate de sferă.

Lungimea utilizabilă a creionului 150 mm, diametrul 8 mm, diametrul minei 2 mm, lungimea generatoarei conului de ascuţire 19 mm.

A. D. BUNESCU.

5678. Se notează cu (a, b), c.m.m.c.d. şi cu $[a, b]$, c.m.m.c.m. a două numere a şi b. Se cere să se arate că produsul numerelor:

$$([a, b], [c, d]) \; ; \; ([a, c], [d, b]) \; ; \; ([a, d], [b, c]) \; ;$$

$$[(a, b), (c, d)] \; ; \; [(a, c), (d, b)] \; ; \; [(a, d), (b, c)]$$

este totdeauna cub perfect.

TIBERIU POPOVICIU.

ERATA. 1°. In articolul *Despre parabola cubică*, din Nr. 9 al acestui an, formulele (1), (3), (4), (6), (10) se înlocuesc prin:

(1) $\Lambda \equiv i\lambda(\lambda - i)\,x + j\lambda(\lambda - j)\,y + (ij\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda - j) = 0,$

(3) $t(i - j)^2\,xy + \mathrm{I}(it + j)\,x + \mathrm{J}(jt + i)\,y + \mathrm{IJ} = 0.$

(4) $$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{(t+1)^2}{t} : \frac{(s-1)^2}{s},$$

(6) $$\Lambda \equiv \lambda^2 x + \lambda y + 1 + \lambda^3.$$

(10) $$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin\left(u + \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(u - \frac{2\pi}{3}\right)}.$$

2°. La pag. 398, rândul 12, neegalitatea $i \neq j$, trebue scoasă înafara textului şi încorporată formulei (1).

3°. La pag. 400, aliniatul 5°, rândul 5 trebue citit *« cu tangentele concurente »* în loc de *« concurente »*.

4°. La pag. 402, rândul 4 din formula (9) numitorul termenului $-\frac{(t-1)^2}{2}\,egK$ este $2t$.

5°. La pag. 475 la punctul 1° de sub *Observaţiuni* se înlocueşte F. G. M. prin F. J.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andreescu M. (5599); *Andrei A.* (5599); *Ardeleanu Gh.* (5648); *Bârzescu M.* (5136, 609); *Capverde I. V.* (5598); *Cotariu D. M.* (5632, 42, 49); *Cubat I. A.* (5587); *Donţu Gh. G.* (5530, 87, 642); *Drăghicescu P. P.* (4464, 5432, 573, 642, 43, 44, 49, 54, 59, E, N, P); *Gheorghiu C. Oct.* (5337, 493, 632); *Iacob E.* Căp. (5143, 294, 643, 48, P); *Iliescu C. C.* (5632); *Ionescu V. N.* (5632, 49); *Lecat Ad.* (N); *Marinescu I. Viorel* (5550); *Mihăescu S. St.* (4389, 5179); *Pantelimon C.* (5413, 628, 37, 59); *Seni Cl.* (5609, 37, 49, 60); *Staicu S.* (5625, 49, E); *Tănăsescu V.* (5637); *Vasilescu-Stabu Al. M.* Subloc. (P); *Vasiliu Gh. D-tru* (5648, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată,* ***nu vor fi luate în consideraţiune.***

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea I-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 81.125.

1941-1942 Cahiers

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLVII

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1942

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

SUMARUL

1. Calculul vectorial (urmare) . *Dr. Ing. Plautius Andronescu.*
2. Despre poziția relativă a două puncte din planul unui triunghiu . . . . . *P. P. Drăghicescu.*
3. Raport pentru decernarea premiului de mecanică „Spiru Haret" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 56—62.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 315.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3534, 5219, 5402, 5495, 5541, 5544, 5590, 5654.
9. Exerciții: 23—24.
10. Probleme propuse: 5679—5690.
11. Tabla de materii.

ABONAMENTUL 250 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1942

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-ra **Gabriela Ţiţeica**, Inginer şi D-nii: Profesor **Al. Pantazi**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1941 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLVI.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 5542, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 6000, 01, 02, 03, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133. Preţurile sunt cele de mai jos şi se achită anticipat.

	50 extrase	100 extrase	următoarele 100 extrase
4 pagini sau fracţiune .	180	220	80
5— 8 „	300	350	100
9—16 „	500	580	160
Coperta	120	160	80

CALCULUL VECTORIAL

(Urmare dela pag. 499)

Divergenţa funcţiunei vectoriale.

Prin definiţie divergenţa funcţiunei vectoriale care mai e denumită şi divergenţa volumetrică, se exprimă în felul următor:

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \int_{\sigma} (ds\, \mathfrak{F}).$$

In acelaşi fel cum am procedat şi în cazul gradientului volumetric al unei funcţiuni scalare, vom arăta mai întâi că într'adevăr limita raportului de mai sus, reprezintă o valoare finită şi bine determinată.

Formăm expresiile:

$$(\mathfrak{F}\{-idy\,.\,dz\}) \quad , \quad (\{\mathfrak{F} + (idx\ \nabla)\,\mathfrak{F}\}\, idy\,.\,dz)$$

$$(\mathfrak{F}\{-jdz\,.\,dx\}) \quad , \quad (\{\mathfrak{F} + (jdy\ \nabla)\,\mathfrak{F}\}\, jdz\,.\,dx)$$

$$(\mathfrak{F}\{-kdx\,.\,dy\}) \quad , \quad (\{\mathfrak{F} + (kdz\ \nabla)\,\mathfrak{F}\}\, kdx\,.\,dy)$$

cari corespund celor şease suprafeţe ale cubului infinitizimal. (Vezi fig. 47) şi însumându-le, se obţine:

$$\Sigma\,(d\circ\,\mathfrak{F}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{dz} F_z \right\} dx\,.\,dy\,.\,dz$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{d\sigma}\,\Sigma\,(d\circ)\,\mathfrak{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{dz} F_z = (\nabla\,\mathfrak{F})$$

ceea ce ne arată că raportul de mai sus reprezintă o valoare finită pe care o denumim divergenţa volumetrică a funcţiei vectoriale.

Dealtfel e uşor de văzut că şi în cazul acesta se obţine o transformare a unui integral de suprafaţă într'un integral de volum. (Regula lui GAUSS).

Ţinând seamă de suprafeţele mărginaşe ale cuburilor $\Delta\sigma$ din Fig. 45 transformarea integralelor va avea loc, dacă funcţiunea vectorială $\mathfrak{F}$ e continuă şi admite valori finite în spaţiul dat.

Dealtfel repetăm raţionamentul şi dela pag. 495; vom obţine în cazul acesta spre exemplu pentru integralul de volum: $\int d\sigma \frac{\partial F_x}{\partial x}$ următorul rezultat:

$$\int d\sigma \frac{\partial F_x}{\partial x} = \iiint dx \,.\, dy \,.\, dz \frac{\partial F_x}{\partial x} = \iint dy \,.\, dz \,.\, \int dF_x =$$

$$= \iint dy \,.\, dz \,\{ F_{x_2} - F_{x_1} + F_{x_4} - F_{x_3} \} =$$

$$= \int F_{x_1} ds_1 \cos\alpha_1 + F_{x_2} ds_2 \cos\alpha_2 + F_{x_3} ds_3 \cos\alpha_3 + F_{x_4} ds_4 \cos\alpha_4 \} =$$

$$= \int F_x \, ds \cos\alpha_x = \int F_x \, ds_x \,.$$

Analog vom obţine:

$$\int d\sigma \frac{\partial F_y}{\partial y} = \int F_y \,.\, ds_y \quad ; \quad \int d\sigma \frac{\partial F_z}{\partial z} = \int F_z \, ds_z$$

de unde rezultă: $\int d\sigma \,(\nabla \mathfrak{F}) = \int (\mathfrak{F}\, d\circ)$ sau simbolic: $d\sigma \,\nabla \rightarrow d\circ$.

In ce priveşte transformarea integralului de suprafaţă $\int_{\Theta} (d\circ \mathfrak{F})$ într'un integral de volum: $\int_{\sigma} d\sigma \,(\nabla \mathfrak{F})$, trebue să se ţie seamă de condiţia necesară şi suficientă, ca în spaţiul considerat să nu existe suprafeţe de discontinuitate pentru $\mathfrak{F}$. Adică $\mathfrak{F}$ să reprezinte în spaţiul dat o funcţie vectorală continuă, care să admită valori finite şi bine determinate. Numai într'un astfel de caz suma integralelor de suprafaţă efectuate pentru suprafeţele cuburilor (Vezi fig. 45) va reprezenta integrala de suprafaţă a vectorului efectuat pentru suprafaţa S care cuprinde în ea spaţiul dat.

Din cele de mai sus, deducem că divergenţa volumetrică a unei funcţiuni vectoriale mai reprezintă integrala de suprafaţă a vectorului de câmp efectuată pentru o astfel de suprafaţă închisă, în care volumul cuprins e egal cu unitatea. Divergenţa apare aşa dar ca o mărime specifică a câmpului. Pentru determinarea ei se va lua aşa dar suprafaţa închisă cu atât mai mică, cu cât integrala de suprafaţă va varia mai mult. Prin împărţirea valoarei

integralului de suprafață cu valoarea volumului cuprins în suprafața respectivă, se va obține o scalară care va diferi cu atât mai puțin de divergența vectorului, cu cât suprafața închisă va fi mai mică.

Când funcția vectorială, apare ca un vector descompus după vectorii unitari necomplanari de direcție constantă: $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$:

$$\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}m')\,\bar{m} + (\mathfrak{F}n')\,\bar{n} + (\mathfrak{F}p')\,\bar{p}$$

vom utiliza simbolul ∇ în forma

$$\nabla = m'\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial m} + n'\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial n} + p'\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}$$

astfel că divergența volumetrică a lui $\mathfrak{F}$ va lua forma:

$$\operatorname{div}\mathfrak{F} = \frac{\overleftarrow{\partial}(\mathfrak{F}m')}{\partial m} + \frac{\overleftarrow{\partial}(\mathfrak{F}n')}{\partial n} + \frac{\overleftarrow{\partial}(\mathfrak{F}p')}{\partial p} =$$

$$= \frac{\overleftarrow{\partial}F_m}{\partial m} + \frac{\overleftarrow{\partial}F_n}{\partial n} + \frac{\overleftarrow{\partial}F_p}{\partial p}.$$

Dealtfel oridecâte ori funcția vectorială se exprimă prin vectori unitari de direcția constantă, determinarea divergenții se confundă cu determinarea gradientului valoarei numerice a vectorului

Fie spre exemplu:

$$\mathfrak{F}_m = F_m\,\bar{m}$$

deci:

$$\operatorname{div}\mathfrak{F}_m = \lim_{\Delta\sigma \to 0}\frac{1}{\Delta\sigma}\int(F_m\,\bar{m}\,d\sigma) = (\bar{m}\nabla F_m).$$

Analog vom avea pentru:

$F_n = F_n\,\bar{n}$, $\mathfrak{F}_p = F_p\,\bar{p}$; $\operatorname{div}\mathfrak{F}_n = (\bar{n}\nabla F_n)$; $\operatorname{div}\mathfrak{F}_p = (\bar{p}\nabla F_p)$

ori ținând seamă că:

$$(\bar{m}\nabla) = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial m}\ ,\ (\bar{n}\nabla) = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial n}\ ,\ (\bar{p}\nabla) = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}$$

rezultă:

$$\operatorname{div}\{\mathfrak{F}_m + \mathfrak{F}_n + \mathfrak{F}_p\} = \operatorname{div}\mathfrak{F} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial m}F_m + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial n}F_n + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p}F_p.$$

Divergența superficială.

Intr'un câmp vectorial pot exista suprafețe de discontinuitate pentru componenta normală a vectorului de câmp $\mathfrak{F}$. Adică valoarea numerică a componentei normale a vectorului $\mathfrak{F}$ la suprafața de discontinuitate variază brusc când punctul P e considerat mai întâi pe o parte și apoi pe cealaltă parte a suprafeței,

Pentru determinarea divergenței superficiale, formăm integrala de suprafață a vectorului $\mathfrak{F}$ pentru suprafața unui cilindru, a cărui înălțime $\triangle h$ e neglijabilă, față de raza cercului de bază. Vezi Fig. 53.

Obținem:

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} \triangle s . \triangle h = \{ F_{1n_{1s}} + F_{2n_{2s}} \} \triangle s$$

neglijând integralul de suprafață pentru suprafața laterală a cilindrului.

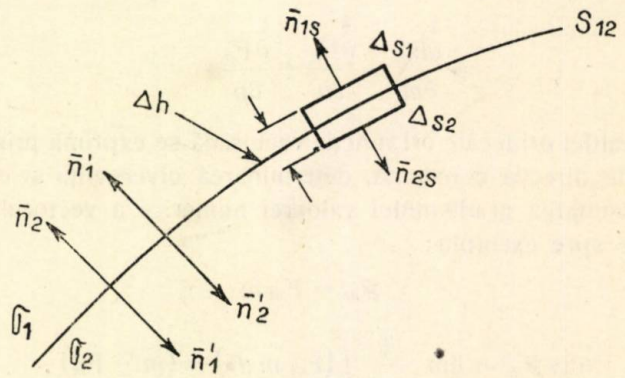


Fig. 53. Determinarea divergenței superficiale.

Când $\triangle h$ tinde către zero, rezultă din: $\operatorname{div} \mathfrak{F} \triangle h = F_{1n_1'} + F_{2n_2'}$ că $\operatorname{div} \mathfrak{F}$ devine infinit de mare, când $F_{1n_1'} + F_{2n_2'}$ posedă o valoare finită diferită de zero. Așa dar pentru orice punct de pe suprafața de discontinuitate pentru componenta normală a vectorului divergența volumetrică e infinit de mare.

Se face remarca că pentru $\triangle h$ foarte mic vectorii unitari normali exteriori spațiului cilindrului $(\bar{n}_{1s}, \bar{n}_{2s})$ se confundă cu vectorii unitari normali dirijați către spațiul respectiv $(\bar{n}_1', \bar{n}_2')$.

Mărimea: $F_{1n_1'} + F_{2n_2'}$ care nu e altceva decât

$$(\mathfrak{F}_1 \bar{n}_1') + (\mathfrak{F}_2 \bar{n}_2') = (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2)\bar{n}_1'$$

se denumeşte divergenţa superficială a funcţiei vectoriale $\mathfrak{F}$.

Vom pune: $\text{div}_s \mathfrak{F} = F_{1n_1'} + F_{2n_2'}$.

E firesc, că atunci când componenta normală a vectorului $\mathfrak{F}$ nu posedă o discontinuitate vom avea: $\text{div}_s \mathfrak{F} = 0$ adică $F_{1n'_1} + F_{2n'_2} = 0$ în care $F_{1n'}$, reprezintă spre exemplu o mărime scalară pozitivă, $F_{2n'_2}$ va avea aceeaşi valoare numerică ca $F_{1n'_1}$, însă va fi negativă.

Figura 54 ne arată cazul când are loc o variaţie bruscă a componentei normale a vectorului $\mathfrak{F}$ la suprafaţa de discontinuitate S_{12}, componenta tangenţială rămânând neschimbată. Linia de forţă trecând prin suprafaţa S_{12} suferă o refacţie.

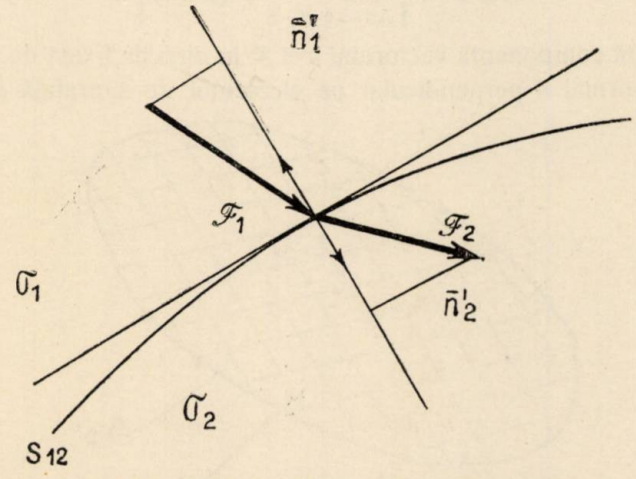


Fig. 54. Variaţia bruscă a componentei normale a vectorului $\mathfrak{F}$.

De pe acum e bine de ştiut că atât divergenţa volumetrică cât şi divergenţa superficială, formează una din condiţiunile de existenţă ale unui câmp vectorial. După cum vedem, ele sunt mărimi scalare; divergenţa volumetrică va reprezenta o mărime scalară repartizată volumetric într'un anumit spaţiu limitat, iar divergenţa superficială va reprezenta aceeaşi mărime, scalară repartizată însă pe anumite suprafeţe.

Datorită existenței acestor mărimi scalare denumite sarcini care posedă în spațiu în cele mai multe cazuri o repartizare limitată, poate să ia naștere un câmp vectorial, adică se va putea determina o funcție vectorială a cărei repartizare poate să aibă loc în tot spațiul. Cum se va determina acest câmp vectorial răspândit în tot spațiul în funcție de sarcinele amintite mai sus. situate într'un spațiul limitat, formează una din problemele fundamentale ale analizei vectoriale, încă așa de puțin cunoscută.

Rotația funcțiunei vectoriale.

Trecem la noua mărime specifică care contribue la determinarea unui câmp vectorial. E rotația volumetrică și rotația superficială a unei funcțiuni vectoriale.

Prin definiție:

$$\mathrm{rot}_n \mathfrak{F} = \left\{ \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint (\mathfrak{F}\, d\ell) \right\} \bar{n}$$

reprezintă componenta vectorului rot $\mathfrak{F}$ în direcția fixată de vectorul unitar normal $\bar{n}$ perpendicular pe elementul de suprafață *ds*.

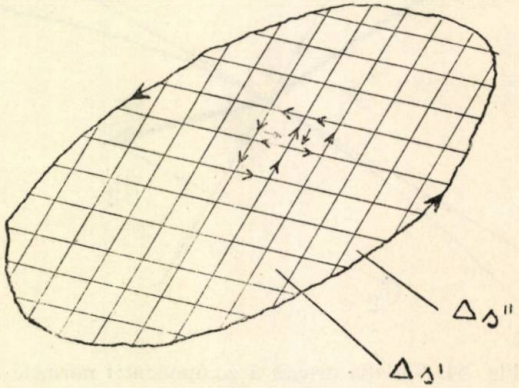


Fig. 55. Suprafață limitată la o linie perferică și descompusă în: $\Sigma \Delta s' + \Sigma \Delta s''$.

Cu acest prilej vedem, că se introduc suprafețe care nu mai sunt închise și anume suprafețe, care posed o linie periferică, Fig. 55 ne arată o astfel de suprafață. In figură ea e descompusă într'o sumă de suprafețe $\Sigma \Delta s'$ în care $\Delta s'$ e limitată la un paralelogram și de $\Sigma \Delta s''$ în care $\Delta s''$ e limitată la părți din paralelogram. Bine înțeles că se poate considera $\Delta s'$ așa de mic, încât $\Sigma \Delta s''$ să fie neglijabilă față de $\Sigma \Delta s'$.

Odată cu introducerea suprafeței $\triangle s'$ se introduce și un sens pozitiv pentru linia perferică. Prin fixarea sensului pozitiv în linia periferică, aplicând regula tirbușonului, se fixează și vectorul unitar normal al suprafeței. (Vezi fig. 56).

Rotația unei funcțiuni vectoriale reprezintă o mărime vectorială, a cărei valoare numerică exprimă integrala de linie, formată pe acea linie închisă a cărei suprafață e egală cu unitatea și

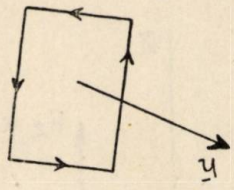


Fig. 55. Un element de suprafață $d\sigma$ cu vectorul unitar n.

astfel așezată încât integrala de linie să fie maximală. Vectorul unitar $\bar{n}$ e perpendicular pe acea suprafață și se fixează cu ajutorul regulei tirbușonului.

In loc de rotație sau rotor se mai spune Curl $\mathfrak{F}$ (se pronunță Körl). In englezește curl înseamnă circulație (în limba germană Kräuslung).

Pentru a arăta că: $\lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\triangle S} \oint (\mathfrak{F}\, d\ell)$ tinde către o valoare finită și bine determinată, să considerăm o linie închisă infinitizimală în planul yz. (Vezi fig. 57). Ținând seamă de definiția mărimei $\mathrm{rot}_n \mathfrak{F}$, vom obține pentru componenta vectorului $\mathrm{rot}\, \mathfrak{F}$, după vectorul unitar următoarea expresie:

Formăm $\Sigma (\mathfrak{F}\, d\ell)$ pentru linia închisă a dreptunghiului dy, dz obținem:

$$\Sigma (\mathfrak{F}\, d\ell) = (\mathfrak{F}\, jdy) + (\{\mathfrak{F} + (dyj \bigtriangledown)\, \mathfrak{F}\}\, kdz) +$$

$$+ (\{\mathfrak{F} + (dzk \bigtriangledown)\, \mathfrak{F}\}\, \{-jdy\}) + (\mathfrak{F}\, \{-kdz\}) =$$

$$= F_y\, dy + \left\{ F_z + \frac{\partial F_z}{\partial y} . dy \right\} dz - \left\{ F_y + \frac{\partial F_y}{\partial} dz \right\} dy - F_z . dz =$$

$$= \left\{ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{dz} \right\} dy . dz.$$

Deci :

$$\text{rot}_i \mathfrak{F} = \frac{\Sigma (\mathfrak{F} d\ell)}{dy \, . \, dz} = \left\{ \frac{\partial F_z}{dy} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right\} i.$$

Analog vom obține pentru liniile închise infinitizimale din planul zx și xy $\text{rot}_j \mathfrak{F}$ și $\text{rot}_k \mathfrak{F}$ în felul următor:

$$\text{rot}_j \mathfrak{F} = \left\{ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right\} j \quad ; \quad \text{rot}_k \mathfrak{F} = \left\{ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\} k.$$

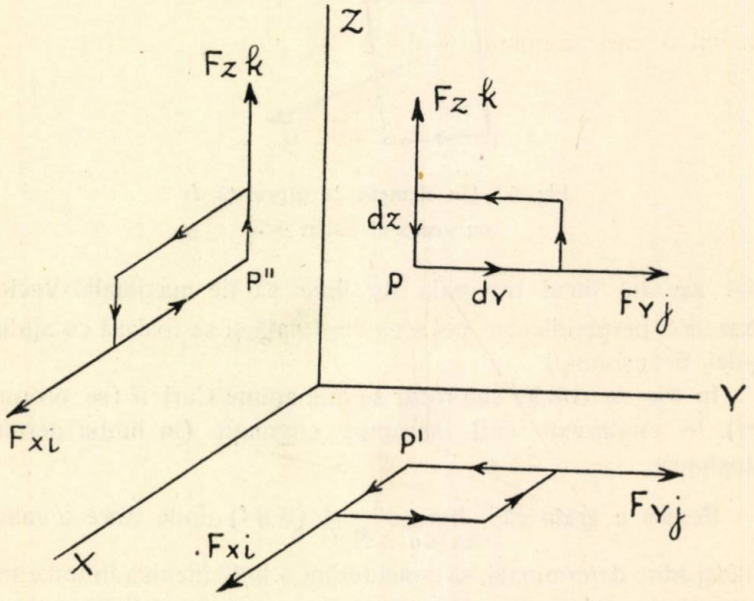


Fig 57. Determinarea vectorilor:
$\text{rot}_i \mathfrak{F}$, $\text{rot}_j \mathfrak{F}$, $\text{rot}_k \mathfrak{F}$.

Se poate acum ușor constata, că cei trei vectori stabiliți mai sus, reprezintă componentele vectorului rot $\mathfrak{F}$ după vectorii unitari: i, j, k.

Adică: $\text{rot}\, \mathfrak{F} = \text{rot}_i \mathfrak{F} + \text{rot}_j \mathfrak{F} + \text{rot}_k \mathfrak{F}$.

In acest scop să considerăm linia închisă formată din elementele: $d\ell_1$, $d\ell_2$, $d\ell_3$ din figura 58 și suprafața limitată la acel triunghi, formată din elementele de suprafață:

$$ds_x = dz \, . \, dy \frac{1}{2} i \quad , \quad ds_y = dx \, . \, dz \frac{1}{2} j \quad , \quad ds_z = dy \, . \, dx \frac{1}{2} k.$$

Integralele de linie ale vectorului $\mathfrak{F}$, formate pentru liniile închise în sensul indicat în figură: $dl_1\,dy\,dx$, $dy\,dl_2\,dz$ şi $dl_3\,dx\,dz$ însumându-le ne va da integrala de linie a vectorului $\mathfrak{F}$ formată pentru linia închisă dl_1, dl_2, dl_3, pentrucă considerăm pe $\mathfrak{F}$ ca o funcţie vectorială continuă, admiţând valori finite pentru orice punct de pe suprafaţa dată, şi după cum se constată din figură, apar o serie de produse scalare de forma:

$$F_y\,dy\,,\{-F_y\,dy\}\,,F_z\,dz\,,\{-F_z\,dz\}$$

ş. a. m. d. cari adunându-le dispar.

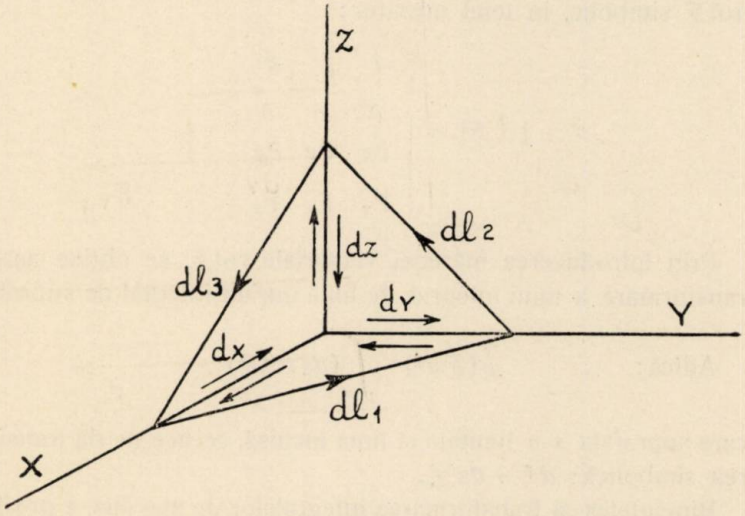


Fig. 58. Determinarea vectorului rot $\mathfrak{F}$.

Aplicând definiţia rotaţiei vectorului $\mathfrak{F}$, obţinem:

$$\sum_{dl_1+dl_2+dl_3}(\mathfrak{F}\,d\ell)=\frac{1}{2}dy\,.\,dz\left\{\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right\}+\frac{1}{2}dz\,.\,dx\left\{\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}dx\,.\,dy\left\{\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right\}.$$

Ţinând seamă de suprafeţele tetraedrului infinitizimal pentru care avem: $ds_n\,\bar{n}-i\,ds_x-j\,ds_y-k\,ds_z=0$ (adică $\Sigma\,d\circ=0$

pentru suprafaţa închisă) se constată că suma termenilor din $\Sigma(\mathfrak{F}\, d\ell)$ reprezintă produsul scalar al vectorilor:

$$ds_n\, \bar{n} = i\, ds_x + j\, ds_y + k\, ds_z$$

$$\text{rot}\,\mathfrak{F} = i\left\{\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right\} + j\left\{\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right\} + k\left\{\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right\}$$

în care:

$$\frac{1}{2}\, dy\,.\,dz = ds_x \qquad \frac{1}{2}\, dz\, dx = ds_y \qquad \frac{1}{2}\, dx\, dy = ds_z$$

ceeace era de arătat. Din cele de mai sus rezultă că putem exprima pe rot $\mathfrak{F}$ simbolic, în felul următor:

$$[\nabla\, \mathfrak{F}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Prin întroducerea mărimei vectoriale rot $\mathfrak{F}$, se obţine aşadar o transformare a unui integral de linie într'un integral de suprafaţă

Adică: $$\oint (\mathfrak{F}\, d\ell) = \int_s (ds\, \text{rot}\,\mathfrak{F})$$

în care suprafaţa s e limitată la linia închisă, ceeace ne dă transformarea simbolică; $d\ell \rightarrow ds\,\nabla$.

Bineînţeles că transformarea integralelor de mai sus, e posibilă când $\oint (\mathfrak{F}\, d\ell)$ pentru orice linie închisă (Vezi Fig. 55) nu prezintă discontinuitate; adică componenta tangenţială la linia închisă, reprezintă o funcţie continuă care admite valori finite.

Tranformarea integralului de linie într'un integral de suprafaţă e cunoscută sub denumirea de regula lui STOCKES.

După F. JUNG rotaţia unei funcţiuni vectoriale e definită în felul următor:

$$\text{rot}\,\mathfrak{F} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \int [d\sigma\, \mathfrak{F}]$$

ceea ce se poate verifica uşor.

Considerăm cubul infinitizimal din fig. 47 şi formăm $\Sigma\,[d\circ\mathfrak{F}]$ pentru cele şease suprafeţe ale sale.

Pentru suprafeţele: $dy\,dz\,(-i)$ şi $dy\,dz\,i$ obţinem:

$$[d\circ\mathfrak{F}]_{y.z}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -dydz & 0 & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k \\ dy\,dz & 0 & 0 \\ F_x+\frac{\partial F_x}{\partial x}dx & F_y+\frac{\partial F_y}{\partial x}dx & F_z+\frac{\partial F_z}{\partial x}dx \end{vmatrix}$$

şi desvoltând determinanţii, rezultă:

$$[d\circ\mathfrak{F}]_{yz}=j\,dy\,.\,dz\,.\,F_z-k\,dy\,dz\,F_y-j\,dy\,dz\left\{F_z+\frac{\partial F_z}{\partial x}dx\right\}+$$

$$+k\,dy\,.\,dz\left\{F_y+\frac{\partial F_y}{\partial x}dx\right\}=\left\{k\frac{\partial F_y}{\partial x}-j\frac{\partial F_z}{\partial x}\right\}dx\,.\,dy\,.\,dz.$$

Analog vom obţine pentru celelalte două grupuri de suprafeţe: $dz\,dx\,\{-j\}$, $dz\,dx\,j$ şi $dx\,dy\,\{-k\}$, $dx\,dy\,k$ relaţiile următoare:

$$[d\circ\mathfrak{F}]_{zx}=\left\{i\frac{\partial F_z}{\partial y}-k\frac{\partial F_x}{\partial y}\right\}dxdy\,.\,dz$$

$$[d\circ\mathfrak{F}]_{xy}=\left\{j\frac{\partial F_x}{\partial z}-i\frac{\partial F_y}{\partial z}\right\}dx\,dy\,.\,dz.$$

Formând: $\dfrac{1}{dx\,dy\,dz}\,\Sigma\,[d\circ\mathfrak{F}]$ obţinem:

$$\text{rot}\,\mathfrak{F}=i\left\{\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right\}+j\left\{\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right\}+k\left\{\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right\}.$$

Din definiţia de mai sus dată de F. JUNG pentru rot $\mathfrak{F}$, mai rezultă următoarea transformare a unui integral de suprafaţă într'un integral de volum: $\int[d\circ\mathfrak{F}]=\int d\sigma\,[\nabla\,\mathfrak{F}]$ ceeace simbolic se reprezintă prin: $\underline{d\circ}\rightarrow d\sigma\,\underline{\nabla}$.

(Va urma)

DR. ING. PLAUTIUS ANDRONESCU
Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

DESPRE POZIȚIA RELATIVĂ A DOUĂ PUNCTE DIN PLANUL UNUI TRIUNGHIU

1°. Fie M și N două puncte pe o dreaptă ce trece prin O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar A′, B′, C′ mijloacele laturilor $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$.

Dacă

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\alpha}{\beta},$$

atunci avem relațiile:

$$\beta\,\overline{MA}^2 - \alpha\,\overline{NA}^2 = \beta\,\overline{MB}^2 - \alpha\,\overline{NB}^2 = \beta\,\overline{MC}^2 - \alpha\,\overline{NC}^2. \qquad (1)$$

Intr'adevăr, dacă M_a, N_a sunt proiecțiile punctelor M, N pe BC, avem relațiile:

$$\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 2\,\overline{BC}\cdot\overline{A'M_a}$$

$$\overline{NB}^2 - \overline{NC}^2 = 2\,\overline{BC}\cdot\overline{A'N_a},$$

care împărțite, dau:

$$\frac{\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2}{\overline{NB}^2 - \overline{NC}^2} = \frac{\overline{A'M_a}}{\overline{A'N_a}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\therefore\ \beta\,\overline{MB}^2 - \alpha\,\overline{NB}^2 = \beta\,\overline{MC}^2 - \alpha\,\overline{NC}^2.$$

Făcând demonstrații analoage pentru laturile CA, AB, găsim și celelalte relații.

2°. *Reciproc:* Dacă două puncte M și N din planul triunghiului ABC satisfac relațiilor (1), atunci O centrul cercului circumscris triunghiului se află pe dreapta MN și împarte segmentul $\overline{MN}$ în raportul (α/β).

Intr'adevăr notând cu O_a, O_b, O_c punctele în care perpendicularele ridicate în A′ pe BC, B′ pe CA, C′ pe AB, taie dreapta MN, avem:

$$\frac{\overline{O_aM}}{\overline{O_aN}} = \frac{\overline{A'M_a}}{\overline{A'N_a}} = \frac{\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2}{\overline{NB}^2 - \overline{NC}^2} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Analog:

$$\frac{\overline{O_bM}}{\overline{O_bN}} = \frac{\overline{O_cM}}{\overline{O_cN}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Deci punctele O_a, O_b, O_c se confundă, adică centrul cercului circumscris triunghiului ABC se găseşte pe dreapta MN şi împarte segmentul $\overline{MN}$ în raportul (α/β).

Deci:

Condiţiunile necesare şi suficiente pentru ca centrul cercului circumscris triunghiului ABC *să se găsească pe dreapta* MN *şi să împartă segmentul* $\overline{MN}$ *în raportul* (α/β), *sunt:*

$$\beta\,\overline{MA}^2 - \alpha\,\overline{NA}^2 = \beta\,\overline{MB}^2 - \alpha\,\overline{NB}^2 = \beta\,\overline{MC}^2 - \alpha\,\overline{NC}^2.$$

Problema se poate extinde în spaţiu:

Condiţiunile necesare şi suficiente pentru ca vârfurile M *şi* N *ale tetraedrelor* MABC, NABC *să se proiecteze în* m *şi* n *pe planul* ABC, *astfel încât centrul cercului* ABC *să se găsească pe dreapta* mn *şi să împartă segmentul* $\overline{mn}$ *în raportul* (α/β). *sunt:*

$$\beta\,\overline{MA}^2 - \alpha\,\overline{NA}^2 = \beta\,\overline{MB}^2 - \alpha\,\overline{NB}^2 = \beta\,\overline{MC}^2 - \alpha\,\overline{NC}^2.$$

Sub o formă puţin schimbată, problema aceasta a fost propusă de NICOLAE BOTEA în revista *Numerus*, sub numărul 6.530.

3°. Fiindcă centrul cercului lui EULER al triunghiului ABC, este centrul cercului circumscris triunghiului său medial A′B′C′, rezultă că:

Condiţiunile necesare şi suficiente pentru ca centrul cercului lui EULER *al unui triunghiu* ABC *să se găsească pe dreapta* MN *şi să împartă segmentul* $\overline{MN}$ *în rapărtul* (α/β), *sunt:*

$$\begin{aligned} 2\beta\,\overline{MA}^2 - 2\alpha\,\overline{NA}^2 - a^2(\alpha-\beta) &= 2\beta\,\overline{MB}^2 - 2\alpha\,\overline{NB}^2 - b^2(\alpha-\beta) \\ &= 2\beta\,\overline{MC}^2 - 2\alpha\,\overline{NC}^2 - c^2(\alpha-\beta). \end{aligned} \tag{2}$$

Intr'adevăr în relaţiile:

$$\beta\,\overline{MA'}^2 - \alpha\,\overline{NA'}^2 = \beta\,\overline{MB'}^2 - \alpha\,\overline{NB'}^2 = \beta\,\overline{MC'}^2 - \alpha\,\overline{NC'}^2$$

făcând înlocuirile:

$$\overline{MA'}^2 = \frac{\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad \overline{NA'}^2 = \frac{\overline{NB}^2 + \overline{NC}^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \text{ etc...}$$

obţinem tocmai relaţiile (2).

4°. *Condiţiunile necesare şi suficiente pentruca centrul cercului înscris în triunghiul* ABC *să se găsească pe dreapta* MN *şi să împartă segmentul* $\overline{MN}$ *în raportul* (α/β), *sunt:*

$$\begin{aligned}\beta\,\overline{MA}^2 - \alpha\,\overline{NA}^2 + bc\,(\alpha-\beta) &= \beta\,\overline{MB}^2 - \alpha\,\overline{NB}^2 + ca\,(\alpha-\beta)\\ &= \beta\,\overline{MC}^2 - \alpha\,\overline{NC}^2 + ab\,(\alpha-\beta).\end{aligned} \tag{3}$$

a) *Condiţiunile sunt necesare.* Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar I_a proiecţia lui BC.

Avem relaţiile:

$$\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 2\,\overline{BC}\;\;\overline{M_aA'} = 2\,\overline{BC}\,(\overline{I_aA'} - \overline{I_aM_a})$$

$$\overline{NC}^2 - \overline{NB}^2 = 2\,\overline{BC}\cdot\overline{N_aA'} = 2\,\overline{BC}\,(\overline{N_aI_a} - \overline{A'I_a}).$$

Deci:

$$\overline{MC}^2 - \overline{MB}^2 + 2\,\overline{BC}\cdot\overline{I_aA'} = 2\,\overline{BC}\cdot\overline{I_aM_a}$$

$$\overline{NC}^2 - \overline{NB}^2 + 2\,\overline{BC}\cdot\overline{I_aA'} = 2\,\overline{BC}\cdot\overline{I_aN_a}.$$

Insă:

$$\overline{I_aA'} = \frac{c-b}{2}.$$

Deci:

$$\frac{\overline{MC}^2 - \overline{MB}^2 + a\,(c-b)}{\overline{NC}^2 - \overline{NB}^2 + a\,(c-b)} = \frac{\overline{I_aM_a}}{\overline{I_aN_a}} = \frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\therefore\;\; \beta\,\overline{MB}^2 - \alpha\,\overline{NB}^2 + ac\,(\alpha-\beta) = \beta\,\overline{MC}^2 - \alpha\,\overline{NC}^2 + ab\,(\alpha-\beta).$$

Făcând demonstraţii analoage pentru laturile CA, AB, obţinem şi celelalte relaţii.

b) *Condiţiunile sunt suficiente.* Ca şi la punctul 2° se arată că perpendicularele ridicate în I_a, I_b, I_c pe BC, CA, AB împart segmentul $\overline{MN}$ în acelaşi raport (α/β).

5°. Fiindcă punctul lui NAGEL al unui triunghiu ABC, este centrul cercului înscris în triunghiul antimedian A″B″C″, rezultă următoarele:

Condiţiunile necesare şi suficiente pentru ca punctul lui NAGEL *al unui triunghiu* ABC *să se găsească pe dreapta* MN *şi să împartă segmentul* $\overline{MN}$ *în raportul* (α/β), *sunt:*

$$\begin{aligned}&\beta\,\overline{MA}^2 - \alpha\,\overline{NA}^2 - (a^2+2bc)\,(\alpha-\beta)\\ &= \beta\,\overline{MB}^2 - \alpha\,\overline{NB}^2 - (b^2+2ca)\,(\alpha-\beta)\\ &= \beta\,\overline{MC}^2 - \alpha\,\overline{NC}^2 - (c^2+2ab)\,(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

Intr'adevăr, fiindcă:

$$\overline{MB''}^2 + \overline{MC''}^2 = 2\overline{MA}^2 + 2a^2,$$

adică:

$$\overline{MA''}^2 = \overline{MA''}^2 + \overline{MB''}^2 + \overline{MC''}^2 - 2\overline{MA}^2 - 2a^2$$

$$\overline{NA''}^2 = \overline{NA''}^2 + \overline{NB''}^2 + \overline{NC''}^2 - 2\overline{NA}^2 - 2a^2$$

$$\overline{A''B''} = 2c,\ \overline{B''C''} = 2a,\ \overline{C''A''} = 2b,$$

relaţiile:

$$\beta\overline{MA''}^2 - \alpha\overline{NA''}^2 + \overline{A''B''}\cdot\overline{A''C''}\,(\alpha-\beta)$$
$$= \beta\overline{MB''}^2 - \alpha\overline{NB''}^2 + \overline{B''C''}\cdot\overline{B''A''}\,(\alpha-\beta)$$
$$= \beta\overline{MC''}^2 - \alpha\overline{NC''}^2 + \overline{C''A''}\cdot\overline{C''B''}\,(\alpha-\beta)$$

devin tocmai relaţiile (4).

6°. Metoda fiind dată, se stabilesc uşor următoarele:

Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca ortocentrul sau centrul de greutate al unui triunghiu ABC *să se găsească pe dreapta* MN *şi să împartă segmentul* $\overline{MN}$ *în raportul* (α/β), *sunt respectiv:*

$$\beta\overline{MA}^2 - \alpha\overline{NA}^2 - a^2(\alpha-\beta) = \beta\overline{MB}^2 - \alpha\overline{NB}^2 - b^2(\alpha-\beta) \quad (5)$$
$$= \beta\overline{MC}^2 - \alpha\overline{NC}^2 - c^2(\alpha-\beta)$$

$$3\beta\overline{MA}^2 - 3\alpha\overline{NA}^2 - a^2(\alpha-\beta) = 3\beta\overline{MB}^2 - 3\alpha\overline{NB}^2 - b^2(\alpha-\beta) \quad (6)$$
$$= 3\beta\overline{MC}^2 - 3\alpha\overline{NC}^2 - c^2(\alpha-\beta).$$

Problema se poate generaliza. Ne mulţumim deocamdată să dăm două aplicaţii a celor spuse.

7°. Fie O, ω, I, H, G, L centrul cercului circumscris, centrul cercului lui EULER, centrul cercului înscris, ortocentrul, centrul de greutate şi punctul lui NAGEL al triunghiului ABC.

Fiindcă O se găseşte pe ωH şi împarte segmentul $\overline{\omega H}$ în raportul 1/2, rezultă că avem relaţiile:

$$2\overline{\omega A}^2 - \overline{HA}^2 = 2\overline{\omega B}^2 - \overline{HB}^2 = 2\overline{\omega C}^2 - \overline{HC}^2,$$

deduse din relaţiile (1).

Analog se mai pot deduce şi următoarele relaţii:

$$3\,\overline{GA}^2 - 2\,\overline{\omega A}^2 = 3\,\overline{GB}^2 - 2\,\overline{\omega B}^2 = 3\,\overline{GC}^2 - 2\,\overline{\omega C}^2.$$

$$3\,\overline{GA}^2 - \overline{HA}^2 = 3\,\overline{GB}^2 - \overline{HB}^2 = 3\,\overline{GC}^2 - \overline{HC}^2.$$

$$3\,\overline{GA}^2 + a^2 = 3\,\overline{GB}^2 + b^2 = 3\,\overline{GC}^2 + c^2.$$

$$2\,\overline{\omega A}^2 + a^2 = 2\,\overline{\omega B}^2 + b^2 = 2\,\overline{\omega C}^2 + c^2.$$

$$4\,\overline{\omega A}^2 - 3\,\overline{GA}^2 + a^2 = 4\,\overline{\omega B}^2 - 3\,\overline{GB}^2 + b^2 = 4\,\overline{\omega C}^2 - 3\,\overline{GC}^2 + c^2.$$

$$3\,\overline{GA}^2 + \overline{HA}^2 + 2a^2 = 3\,\overline{GB}^2 + \overline{HB}^2 + 2b^2 = 3\,\overline{GC}^2 + \overline{HC}^2 + 2c^2.$$

$$\overline{HA}^2 + a^2 = \overline{HB}^2 + b^2 = \overline{HC}^2 + c^2.$$

$$2\,\overline{IA}^2 - 3\,\overline{GA}^2 - a^2 - 2bc = 2\,\overline{IB}^2 - 3\,\overline{GB}^2 - b^2 - 2ca = 2\,\overline{IC}^2 - 3\,\overline{GC}^2 - c^2 - 2ab.$$

$$4\,\overline{\omega A}^2 - \overline{HA}^2 + a^2 = 4\,\overline{\omega B}^2 - \overline{HB}^2 + b^2 = 4\,\overline{\omega C}^2 - \overline{HC}^2 + c^2.$$

$$3\,\overline{GA}^2 - \overline{LA}^2 - 2bc = 3\,\overline{GB}^2 - \overline{LB}^2 - 2ca = 3\,\overline{GC}^2 - \overline{LC}^2 - 2ab.$$

$$2\,\overline{IA}^2 + \overline{LA}^2 + a^2 = 2\,\overline{IB}^2 + \overline{LB}^2 + b^2 = 2\,\overline{IC}^2 + \overline{LC}^2 + c^2.$$

8°. O altă aplicaţie se referă la problema 2536 propusă de D-l D. PERIEŢEANU, rezolvată în G. M., Anul XL, pag. 561. Asupra acestei probleme au scris articole în *Gazeta Matematică*, D-nii: R. GOORMAGHTIGH în Anul XL, pag. 529 şi V. THÉBAULT în Anul XLI, pag. 172.

In cele ce urmează voiu da o generalizare în plan celor spuse în articolul D-lui R. GOORMAGHTIGH, care extindea problema 2536.

Fie x şi X, y şi Y, z şi Z razele a şase cercuri având două câte două centrele în vârfurile A, B, C ale unui triunghiu. Fie de asemenea P centrul radical al cercurilor de raze x, y, z, Q centrul radical al cercurilor de raze X, Y, Z, iar R un punct pe PQ, determinat de raportul $\overline{RP}/\overline{RQ} = \alpha/\beta$.

a) $R \equiv 0$. Conform relaţiilor (1), avem:

$$\beta\,\overline{PA}^2 - \alpha\,\overline{QA}^2 = \beta\,\overline{PB}^2 - \alpha\,\overline{QB}^2 = \beta\,\overline{PC}^2 - \alpha\,\overline{QC}^2.$$

Insă:

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 - x^2 &= \overline{PB}^2 - y^2 = \overline{PC}^2 - z^2 \\ \overline{QA}^2 - X^2 &= \overline{QB}^2 - Y^2 = \overline{QC}^2 - Z^2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Deci:

$$\beta x^2 - \alpha X^2 = \beta y^2 - \alpha Y^2 = \beta z^2 - \alpha Z^2.$$

Dacă P şi Q sunt simetrice faţă de R, adică $\alpha = -\beta$, avem:

$$x^2 + X^2 = y^2 + Y^2 = z^2 + Z^2.$$

b) $R \equiv \omega$. Conform relaţiilor (2), avem:

$$2\beta \overline{PA}^2 - 2\alpha \overline{QA}^2 - a^2(\alpha - \beta) = 2\beta \overline{PB}^2 - 2\alpha \overline{QB}^2 - b^2(\alpha - \beta)$$
$$= 2\beta \overline{PC}^2 - 2\alpha \overline{QC}^2 - c^2(\alpha - \beta)$$

şi ţinând seama de relaţiile (7):

$$2\beta x^2 - 2\alpha X^2 - a^2(\alpha - \beta) = 2\beta y^2 - 2\alpha Y^2 - b^2(\alpha - \beta)$$
$$= 2\beta z^2 - 2\alpha Z^2 - c^2(\alpha - \beta).$$

Dacă $\alpha = -\beta$, obţinem relaţia care face obiectul problemei No. 2536:

$$x^2 + X^2 + a^2 = y^2 + Y^2 + b^2 = z^2 + Z^2 + c^2.$$

c) $R \equiv I$. Analog găsim relaţiile:

$$\beta x^2 - \alpha X^2 + bc(\alpha - \beta) = \beta y^2 - \alpha Y^2 + ca(\alpha - \beta)$$
$$= \beta z^2 - \alpha Z^2 + ab(\alpha - \beta),$$

care pentru $\alpha = -\beta$, devin:

$$x^2 + X^2 - 2bc = y^2 + Y^2 - 2ca = z^2 + Z^2 - 2ab.$$

d) $R \equiv H$

$$\beta x^2 - \alpha X^2 - a^2(\alpha - \beta) = \beta y^2 - \alpha Y^2 - b^2(\alpha - \beta) = \beta z^2 - \alpha Z^2 - c^2(\alpha - \beta)$$

şi pentru $\alpha = -\beta$:

$$x^2 + X^2 + 2a^2 = y^2 + Y^2 + 2b^2 = z^2 + Z^2 + 2c^2.$$

e) $R \equiv G$

$$3\beta x^2 - 3\alpha X^2 - a^2(\alpha - \beta) = 3\beta y^2 - 3\alpha Y^2 - b^2(\alpha - \beta)$$
$$= 3\beta z^2 - 3\alpha Z^2 - c^2(\alpha - \beta).$$

Pentru $\alpha = -\beta$, avem:

$$3x^2 + 3X^2 + 2a^2 = 3y^2 + 3Y^2 + 2b^2 = 3z^2 + 3Z^2 + 2c^2.$$

f) $R \equiv L$

$$\beta x^2 - \alpha X^2 - (a^2 + 2bc)(\alpha - \beta) = \beta y^2 - \alpha Y^2 - (b^2 + 2ca)(\alpha - \beta)$$
$$= \beta z^2 - \alpha Z^2 - (c^2 + 2ab)(\alpha - \beta).$$

Pentru $\alpha = -\beta$:

$$x^2 + X^2 + 2(a^2 + 2bc) = y^2 + Y^2 + 2(b^2 + 2ca) = z^2 + Z^2 + 2(c^2 + 2ab).$$

P. P. DRĂGHICESCU
Elev Liceul Militar, Iaşi.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE MECANICĂ „SPIRU HARET“

Subsemnaţii, membri în Comisiunea pentru premiul « SPIRU HARET », cercetând ultimul volum al *Gazetei Matematice* dela 15 Septemvrie 1940—15 Septemvrie 1941, am constatat următoarele:

1. Domnul EMIL S. MODÂLCĂ (elev-inginer al Politehnicei din Bucureşti) se prezintă cu o bogată şi susţinută activitate în domeniul Mecanicei.

Remărcăm interesanta notă asupra problemei Nr. 5314, precum şi soluţiile precise şi elegante date problemelor 5436, 5314, 5330, 5375, 5239 şi 5331.

2. Domnul C. D. EFTIMIE (elev-inginer al Politehnicei din Bucureşti) se prezintă cu soluţiuni frumoase ale problemelor 5237, 5330, 5102, 5239 şi 5331, dovedind un interes deosebit Mecanicei.

In concluzie, propunem împărţirea premiului pentru Mecanică « SPIRU HARET », în valoare de 15.000 lei, precum urmează:

1. Domnului EMIL S. MODÂLCĂ, suma de 10.000 lei.
2. Domnului C. D. EFTIMIE, suma de 5.000 lei.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI « SPIRU HARET »

G. G. CONSTANTINESCU, C-DOR LINTEŞ, ING. AL. STOENESCU.

Acest raport a fost citit şi Adunarea generală din 26 Februarie a. c., a decis să acorde câte un premiu de câte 5.000 lei D-lor E. MODÂLCĂ şi C. D. EFTIMIE.

NOTE MATEMATICE

56. *Soluţie geometrică a problemei 2575.* In Vol. XLVII al *Gazetei Matematice*, la pagina 174, s'a publicat o soluţie trigonometrică a acestei probleme, arătându-se că se aşteaptă o soluţie geometrică, aşa cum de altfel este natura problemei. Vom da o soluţie geometrică simplă, elementară, a acestei probleme al cărui enunţ este următorul:

Fie A', B', C' *simetricele ortocentrului unui triunghiu faţă de laturile* BC, CA, AB. *Dreapta* A'B' *taie pe* CA *şi* CB *în* b *şi*

a'; *dreapta* B'C' *taie pe* AB *şi* AC *în* c *şi* b'; *dreapta* C'A' *taie pe* BC *şi* BA *în* a *şi* c'. *Să se demonstreze, că atunci când* a, b, c *sunt picioarele a trei ceviene şi* a', b', c' *sunt picioarele a trei ceviene.*

Să numim: H ortocentrul şi A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor triunghiului dat ABC.

A_1, B_1, C_1 fiind mijloacele segmentelor HA', HB', HC', triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi A'B'C' au laturile corespunzătoare paralele între ele şi antiparalele cu ale triunghiului ABC, iar înălţimile acestui triunghiu, fiind bisectoare ale triunghiului $A_1B_1C_1$, sunt de asemenea bisectoare ale triunghiului A'B'C'. Laturile triunghiului ABC, fiind perpendiculare pe aceste bisectoare, căci sunt înălţimile lui, triunghiurile $aA'a'$, $bB'b'$, $cC'c'$ sunt isoscele, iar triunghiurile aHa', bHb', cHc', fiind simetrice cu acestea, $HaA'a'$, $HbB'b'$, $HcC'c'$ sunt romburi, în care laturile Ha, Hb' sunt paralele cu A'B', Hb şi Hc', sunt paralele cu B'C' şi Hc, Ha' sunt paralele cu C'A'. Rezultă ab', bc', ca', diagonalele exagonului $aa'bb'cc'$, se taie între ele în H şi sunt paralele cu laturile triunghiului A'B'C' şi antiparalele cu ale triunghiului ABC, iar din asemănarea triunghiului ABC cu triunghiurile: Abc', $Ab'c$; Bca', $Bc'a$ şi Cab', $Ca'b$ scoatem:

$$\frac{\overline{Ab}}{\overline{Ac'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} ; \frac{\overline{Bc}}{\overline{Ba'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} ; \frac{\overline{Ca}}{\overline{Cb'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \therefore \frac{\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca}}{\overline{Ac'} \cdot \overline{Ba'} \cdot \overline{Cb'}} = -1 \quad (1)$$

$$\frac{\overline{Ab'}}{\overline{Ac}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} ; \frac{\overline{Bc'}}{\overline{Ba}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} ; \frac{\overline{Ca'}}{\overline{Cb}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \therefore \frac{\overline{Ab'} \cdot \overline{Bc'} \cdot \overline{Ca'}}{\overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb}} = -1. \quad (2)$$

Inmulţind egalităţile (1) şi (2) găsim:

$$\frac{\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca}}{\overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb}} \times \frac{\overline{Ab'} \cdot \overline{Bc'} \cdot \overline{Ca'}}{\overline{Ac'} \cdot \overline{Ba'} \cdot \overline{Cb'}} = 1$$

$$\therefore \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} \times \frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}} \cdot \frac{\overline{b'C}}{\overline{b'A}} \cdot \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = 1.$$

Această egalitate arată că *a*, *b*, *c* şi *a'*, *b'*, *c'* sunt în acelaşi timp — sau nu sunt — puncte colineare sau picioare a trei ceviene în triunghiul ABC.

Se poate însă arăta, că punctele *a*, *b*, *c* şi *a'*, *b'*, *c'* nu pot să fie picioarele unor ceviene în triunghiul ABC, aşa cum se presupune în enunţul problemei 2575, dar pot să fie colineare,

adică triunghiurile ABC şi A'B'C' să fie triomologice şi ar fi interesant să se cerceteze proprietăţile unor asemenea triunghiuri şi să se arate cum se pot construi.

D. STOICA.

57. *O problemă de analiză nedeterminată.* (Urmare dela pagina 516).

II. $n = p$

(3) $$x^p + y^p = 10^t.$$

Fie $2^\alpha 5^\beta$ divizorul comun al lui x şi y, adică

$$x = 2^\alpha 5^\beta x_1 \quad \text{şi} \quad y = 2^\alpha 5^\beta y_1,$$

unde x_1 şi y_1 sunt coprime între ele şi prime cu 2 şi 5. Ecuaţia (3) devine:

(3') $$(x_1 + y_1)\left(\frac{x_1^p + y_1^p}{x_1 + y_1}\right) = 2^{t-\alpha p}\, 5^{t-\beta p}.$$

Factorul ireductibil $(x_1^p + y_1^p)/(x_1 + y_1)$ în care x_1 şi y_1 sunt prime între ele şi p este un număr prim impar, nu are, în afară eventual de p, decât divizori primi de forma $q = 2hp + 1$ (*Gazeta Matematică*, Vol. XXXIX, pag. 23). Prin urmare p fiind un număr prim absolut, pe care îl presupunem deocamdată diferit de 5, factorul $(x_1^p + y_1^p)/(x_1 + y_1)$ este prim atât cu 2 cât şi cu 5, deci pentru ca relaţia (3) să existe trebuie ca:

(3'') $$\frac{x_1^p + y_1^p}{x_1 + y_1} = 1 \quad \therefore \quad x_1 = 1,\ y_1 = 0 \text{ sau } x_1 = 0,\ y_1 = 1$$

care conduce tot la soluţiile banale în care unul din factorii x sau y este nul.

Dacă $p = 5$, afară de (3'') se poate să avem şi

(3''') $$\frac{x_1^5 + y_1^5}{x_1 + y_1} = x_1^4 - x_1^3 y_1 + x_1^2 y_1^2 - x_1 y_1^3 + y_1^4 = 5.$$

Fie $x_1 > y_1$, din (3''') deducem:

$$x_1^4 - x_1^3 y_1 + x_1^2 y_1^2 - x_1 y_1^3 + y_1^4 = x_1^3 (x_1 - y_1) + x_1 (x_1 - y_1) + y_1^4 = 5$$

$$\therefore \quad y_1^4 \leqslant 5 \quad y_1 = 1.$$

Fie

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Avem

$$f(x+1) > f(x) \quad \text{pentru} \quad x > 2$$

şi

$$f(2) = 16 - 8 + 4 - 2 + 1 = 11 > 2$$

deci (3″) este imposibilă în numere întregi.

Prin urmare, dacă p *este un număr prim impar, nu există numere întregi* x *şi* y, *diferite de zero, astfel încât*

$$x^p + y^p = 10^t .$$

Relaţia (1) fiind imposibilă în numere întregi diferite de zero, pentru $n = 4$ şi pentru $n = p$, este imposibilă pentru orice valoare a lui n mai mare sau egală cu 3.

IOAN B. FLORESCU.

58. *Asupra problemei 2575.* Problema propusă sub acest număr şi rezolvată în „G. M.“, Vol. XLVII, pag. 174, *nu este posibilă pentru niciun fel de triunghiu.* In adevăr pentru ca problema să fie posibilă (cel puţin pentru un triunghiu particular), ar trebui îndeplinită condiţia:

$$(1) \quad \cos A \cos B \cos C = \cos(B - C) \cos(C - A) \cos(A - B).$$

Să punem partea a doua a egalităţii sub altă formă. Avem:

$$(2) \quad \cos(B - C) \cos(C - A) \cos(A - B)$$

$$= (\cos B \cos C + \sin B \sin C)(\cos C \cos A + \sin C \sin A) \times$$

$$(\cos A \cos B + \sin A \sin B)$$

$$= \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C + \cos A \cos B \cos C \sum \cos A \sin B \sin C$$

$$+ \sin A \sin B \sin C \sum \sin A \cos B \cos C + \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C.$$

Insă din desvoltările lui $\sin(a + b + c)$ şi $\cos(a + b + c)$ deducem:

$$\sum \cos A \sin B \sin C = \cos A \cos B \cos C - \cos(A + B + C)$$

$$= \cos A \cos B \cos C + 1.$$

$$\sum \sin A \cos B \cos C = \sin(A + B + C) + \sin A \sin B \sin C$$

$$= \sin A \sin B \sin C.$$

Inlocuind aceste valori în (2) obţinem:

$$\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)$$
$$= 2\cos^2A\cos^2B\cos^2C + \cos A\cos B\cos C + 2\sin^2A\sin^2B\sin^2C.$$

Această expresie înlocuită în (1) ne conduce la:

$$2(\cos^2A\cos^2B\cos^2C + \sin^2A\sin^2B\sin^2C) = 0$$

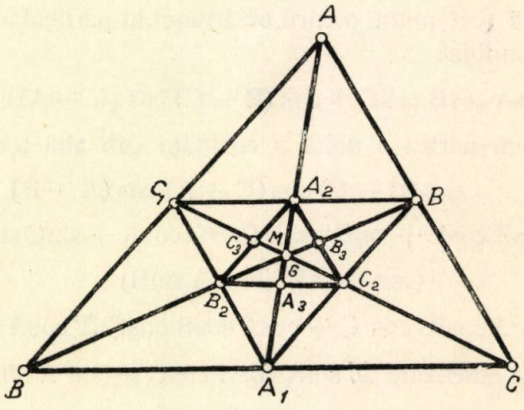
relaţie imposibilă pentru triunghiuri reale.

Totuşi chestiunea, dacă nu e posibilă pentru triunghiul A′B′C′ dat în problema 2575, este posibilă pentru foarte multe triunghiuri A′B′C′, *omologice* cu ABC.

Voi reveni cu un studiu mai amănunţit asupra acestor triunghiuri.

G. D. S.

59. *Soluţia geometrică a unei chestiuni de minimum.* Fiind dat un triunghiu oarecare ABC, a găsi în planul său un punct M astfel încât suma $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$ să fie minimă, este o problemă cunoscută, care se rezolvă analitic căutând extremele unei funcţiuni de două variabile independente.



Iată o soluţie geometrică simplă:

Aplicăm teorema medianei. Această teoremă aplicată de trei ori, rezultatele adunate, apoi simplificat, ne procură:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \overline{MC_1}^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

A_1, B_1, C_1 fiind mijloacele laturilor triunghiului considerat.

Analog procedăm cu suma pozitivă $\overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \overline{MC_1}^2$, obţinând

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MB_1}^2 + \overline{MC_1}^2 = \overline{MA_2}^2 + \overline{MB_2}^2 + \overline{MC_2}^2 + \frac{1}{4^2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

şi aşa mai departe.

Făcând substituirile în prima relaţie rezultă:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MA_n}^2 + \overline{MB_n}^2 + \overline{MC_n}^2 + \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{4^n}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Facem acum pe n să tindă către infinit.

Pentru ca suma $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$ să reprezinte un minimum trebuieşte ca $\overline{MA_n}^2 + \overline{MB_n}^2 + \overline{MC_n}^2$ să fie nulă, ceea ce evident se întâmplă când punctele M, A_n, B_n, C_n se confundă într'unul singur care este baricentrul G al triunghiului. In fine suma Σ este o progresie geometrică descrescătoare infinită şi am căpătat că minimul are loc când M este în G şi este dat de:

$$\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^3).$$

VIRGIL GHIŢESCU.

60. *Proprietăţi de ale parabolei în legătură cu proprietăţi de ale hiperbolei.* Dacă considerăm, din punct de vedere geometric, că parabola este o hiperbolă cu unele restricţiuni, atunci putem deduce unele proprietăţi de ale parabolei din proprietăţi analoage ale hiperbolei.

Să considerăm sau să definim că parabola ar fi o hiperbolă cu asimptotele paralele cu axa şi aruncate la infinit.

Folosind această definiţie, proprietatea enunţată de D-l N. N. MIHĂILEANU în problema 10 rezolvată în *Pozitiva* la pag. 196, Vol. I este adevărată şi pentru parabolă şi se enunţă astfel: *Fie* A *un punct fix în planul unei parabole. Paralela din* A *la axă taie parabola în* N. *Se consideră un punct* M *fix pe parabolă şi o secantă prin* M *care retaie parabola în* P. *Dreapta* NP *taie în* Q *paralela din* A *la* MP. *Punctul* Q *descrie o paralelă la axa parabolei.*

Alt exemplu. Se ştie că A *şi* B *fiind două puncte pe o hiperbolă, paralelele din* A *şi* B *la asimptote se întâlnesc pe diametrul conjugat direcţiei* AB. In cazul parabolei asimptotele fiind paralele cu axa, rezultă că şi *diametrul conjugat direcţiei* AB *este paralel cu axa.*

Spiritul acestei metode se poate aplica şi la alte proprietăţi.

R. P. VOINEA.

61. *Asupra exerciţiului Nr. 2, Vol. XLV.* Din cauza cadrului restrâns în care e publicat, exerciţiul nu e complect studiat. Ne propunem a face o discuţie complectă. Mişcările celor trei mobile, M_1, M_2, M, fiind presupuse uniforme, O nu poate fi situat între B şi C, căci atunci n'ar fi posibilă întâlnirea lui M cu ambele celelalte. Din

$$bd = ac + cd$$

am

$$d = \frac{ac}{b - c} \qquad (1)$$

α) $d > 0$ (punctul O situat pe prelungirea lui $\overline{CB}$, cazul presupus în enunţul exerciţiului).

Din (1) scot prima condiţie

$$b > c \qquad (2)$$

şi cum $a > b - c$, am şi

$$d > c \qquad (3)$$

(ceea ce se găsise în rezolvarea publicată).

β) $d > 0$ (O situat pe prelungirea lui $\overline{BC}$). Din (1) am:

$$| a | = \frac{ac}{c - b}$$

ceea ce atrage

$$c > b \qquad (4)$$

şi cum $a > c - b$

$$| d | > c, \qquad (5)$$

iar $c > c - b$

$$| d | > a. \qquad (6)$$

Se vede şi din (6) că O nu poate fi între B şi C.

In fine mai avem:

$$|d| - a = \frac{ac}{c-b} - a = \frac{ab}{c-b}$$

$$|d| - a > b, \tag{7}$$

relaţia asemănătoare cu (3).

In rezumat:

$$d > 0 \; ; \quad \boxed{b > c} \; , \quad \boxed{d > c}$$

$$d < 0 \; ; \quad \boxed{|d| > a+b > c > b}$$

în care e cuprins evident şi $|d| > a$.

EMIL S. MODÂLCĂ.

62. *O demonstraţie a teoremelor lui* CEVA *şi* MENELAUS. Iată o demonstraţie pe care am dat-o acestor teoreme şi pe care nu am găsit-o menţionată în nici un manual de geometrie.

Teorema lui MENELAUS. Fie triunghiul ABC tăiat de transversala $A_1B_1C_1$. Prin punctul A duc o dreaptă paralelă cu transversala $A_1B_1C_1$ şi care taie latura BC într'un punct M.

Din triunghiurile ABM şi CAM, fiindcă $A_1B_1C \parallel AM$ deduc

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A_1M}{A_1C} \; ; \quad \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{A_1C}{A_1M} .$$

Deci

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{A_1C}{A_1M} \cdot \frac{A_1M}{A_1B} = 1.$$

Teorema lui CEVA. Fie triunghiul ABC şi trei ceviene concurente AA_1, BB_1, CC_1 şi P punctul lor de concurenţă. Prin vârful A duc două drepte paralele respectiv cevienelor BB_1 şi CC_1 şi care taie latura BC în punctele M şi N.

Se observă uşor că:

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{BC}{BM} \; ; \quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{CN}{CB} .$$

Deci:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{BC}{BM}\cdot\frac{CN}{CB}=-\frac{A_1B}{BM}\cdot\frac{CN}{A_1C}.$$

Dar

$$\frac{A_1B}{BM}=\frac{A_1P}{PA}\quad;\quad\frac{CN}{A_1C}=\frac{PA}{A_1P}.$$

Deci

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=-\frac{A_1P}{PA}\cdot\frac{PA}{A_1P}=-1.$$

MIRCEA D. POPA.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXII. Nr. 5, Iulie 1942. Timişoara. Un nou sistem de coordonate rombice, de V. ALACI. Asupra unor ecuaţii diofantine, de E. VIŞA.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi“, Vol. XXVIII Nr. 2-3 Aprilie—Septemvrie 1942. Iaşi.

România Aeriană. Anul XVI Nr. 6. Iunie 1942. Bucureşti.

ION IONESCU. *Povestiri ştiinţifice.* Tipărită în Biblioteca tehnică „Universul“, Nr. 4, 1942. Editura ziarului „Universul“. Preţul 160 lei.

Această carte de 243 pagini, formatul 130×210, este o continuare a celei anunţată în această Revistă în luna Septemvrie, pag. 28. Cartea este închinată memoriei Doctorului CONSTANTIN ISTRATI, întemeietorul *Societăţii Române de Ştiinţe* şi al *Asociaţiunii Române pentru înaintarea şi răspândirea ştiinţelor.* Chestiunile tratate sunt următoarele 20: CONSTANTIN ISTRATI, Profesorul GHEORGHE KIRILOV, Studentul NICULAE SEGĂRCEANU, LEON LALANNE şi introducerea Sistemului metric în România, Iuţeala, Raporturile dintre matematică şi inginerie în trecut şi în prezent, Chestiuni de inginerie la al patrulea Congres internaţional al matematicianilor, Prima aritmetică tipărită în limba română, Vechile geometrii româneşti, Nomenclatura geometrică română, Prima trigonometrie română, Matematica în Regulamentul Organic, Cuvântare la Serbarea de 40 ani de existenţă a *Gazetei Matematice,* Contabilitatea şi Matematica, Munca matematică, Maşinile de calcul (Privire istorică), Ştiinţa şi Naţionalismul, Învăţământul matematicilor în Şcolile secundare, ISAC NEWTON, ANDRÉ-MARIE AMPÈRE.

Chestiunile sunt tratate în mod elementar astfel că citirea acestei cărți se poate face de cei ce au cunoștințele liceului și *a fortiori* de corespondenții *Gazetei Matematice*.

P. SERGESCU. *Un episod din bătălia pentru triumful calculului diferențial: Polemica* ROLLE-SAURIN *1702—1705*. București, 1942.

In acest „*Studiu închinat memoriei marelui* NICOLAE IORGA" D-l P. SERGESCU continuă expunerea cercetărilor D-sale privitoare la „*Journal de Savants*". D-sa ne arată conflictul dintre partizanii calculului algebric, reprezentat prin M. ROLLE și cei ai calculului infinitezimal, pentru care pleda în deosebi SAURIN. Polemica din coloanele revistei „*Journal de Savants*" a fost începută de ROLLE în 1695 și s'a încheiat abia în 1807 cu triumful deplin al noului calcul.

N. VASILESCU-KARPEN. *Viața și opera lui* GALILEO GALILEI, An. Acad. Române, Mem. Secț. Șt. Seria III, tom. XVII, Mem. 8, București, 1942.

Academia Română a ținut să cinstească memoria marelui GALILEU printr'o ședință comemorativă ținută în ziua de 23 lanuarie 1942. Cu acest prilej D-l VASILESCU KARPEN, membru al Academiei a ținut comunicarea cu titlul de mai sus. Incepând cu o scurtă privire asupra epocei în care a trăit fundatorul dinamicei, D-sa povestește succint, dar interesant, viața zbuciumată a marelui om de știință și luptător pentru libertatea de gândire. La sfârșit rezumă esențialul din opera lui GALILEO. Lucrarea se citește cu multă plăcere și mai ales cu folos.

Prof. Dr. HURMUZESCU. *Cincizeci de ani dela moartea profesorului* BACALOGLU, An. Acad. Române, Mem. Secț. Șt. Seria III, tom. XVII, Mem. 11, București, 1942.

Cu ocazia împlinirii unei jumătăți de veac dela moartea lui E. BACALOGLU, primul profesor de fizică al Facultății de științe din București, D-l Prof. HURMUZESCU, unul din foștii săi elevi, evocă într'o comunicare făcută în ședința publică a Academiei Române din 20 Februarie 1942, personalitatea distinsului profesor și om de știință. Comunicarea nu este numai o pioasă închinare memoriei fizicianului și matematicianului BACALOGLU, ci și o contribuție prețioasă la cunoașterea primei faze a desvoltării științelor fizice în România, dându-ne o icoană fidelă a ei.

Scrisă cu multă căldură și cuprinzând interesante amintiri și observații personale, broșura D-lui HURMUZESCU merită a fi citită de toți aceia cari poartă un interes trecutului nostru științific și știu aprecia enormele dificultăți pe cari le-au întâmpinat și învins cei care i-au pus temeliile.

VICTOR MARIAN.

G. G. CONSTANTINESCU. *Sur le critère* de M. POMPEIU *pour l'intégrabilité par quadrature de l'équation* de RICCATI (Extras din *Bulletin* de la *Section Scientifique* de *l'Académie roumaine*). București 1942.

G. G. CONSTANTINESCU. *Sur les intégrales de certaines classes d'équations différentielles linéaires* (Extras din *Bulletin* de la *Section scientifique* de *l'Académie roumaine*). Bucureşti 1942.

CERERI

315. Economiştii puri acuză pe matematician că se ocupă cu *imaginare*, sau dacă nu ele, cu alte *irealităţi*. S'a făcut vreun studiu al contribuţiunilor matematicianilor la propăşirea ştiinţelor economice?

I. I.

Răspuns la Cererea Nr. 309. Anul XLVII, pag. 322. Recomandăm următoarele tratate, ca răspuns la această cerere:

I. **Calculul variaţiunilor.** *Leçons sur le calcul des variations* par J. HADAMARD, 2 volume. Paris, Librăria Hermann, 1910. Volumul întâi consacră un capitol special calculului funcţional.

II. **Calculul tensorial.** *a*) G. JUVET. *Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu.* Paris, Librăria Blanchard, 1922.

b) H. GALBRUN. *Introduction à la théorie de la relativité, calcul différentiel absolu et géometrique.* Paris, Gauthier-Villars, 1923. Cap. I—IV, tratează despre calcul tensorial.

c) EDDINGTON. *Espace, temps et gravitation,* tradusă de ROSSIGNOL. Paris, Librăria Hermann, 1921. In partea II la pag, 24—63 tratează despre *calculul tensorial.*

d) G. BOULIGAND. *Géométrie vectorielle.* Paris, Librăria Vuibert, 1924. Nota I tratează despre: *Principiile calculului tensorial.*

A. GLODEN
Doctor în matematici.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

S. G. F. Nouveau système de Calcul intégral différentiel, naturel, direct, exposé à l'aide de l'algèbre élémentaire seulement. Paris 1891.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

MORITZ PASCH. Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Lipsca 1882.

Donată de D-l ION IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3534. *Să se demonstreze că numerele* x_1, x_2, x_3, *etc., obținute din ecuația simbolică*

$$(x+a+1)^m - (x+a)^m = m(a+1)^{m-1}$$

unde exponenții lui x *se înlocuiesc cu indici, sunt independente de* a.

S. KAUFMANN.

Pentru $m = 1$, egalitatea din enunț devine identitatea

$$(x_1 + a + 1) - (x_1 + a) = 1.$$

Pentru $m = 2$, egalitatea dată devine

$$[x_2 + 2(a+1)x_1 + (a+1)^2] - (x_2 + 2ax_1 + a^2) = 2(a+1)$$

$$\therefore \qquad x_1 = \frac{1}{2}.$$

Făcând $m = 3$ obținem

$$[x_3 + 3(a+1)x_2 + 3(a+1)^2 x_1 + (a+1)^3] - (x_3 + 3ax_2 + 3a^2x_1 + a^3) = 3(a+1)^2$$

$$\therefore \qquad 3x_2 + 3(2a+1)x_1 = 3a + 2$$

de unde, înlocuind pe x_1 prin valoarea găsită $\frac{1}{2}$, avem

$$x_2 = \frac{1}{6}.$$

Să admitem că proprietatea enunțată este adevărată până la x_{m-1} și să dovedim că ea rămâne adevărată și pentru x_m. Dacă notăm

$$A_i = (a+1)^i - a^i$$

și desvoltăm ecuația din enunț, avem

$$C_m^1 A_1 x_{m-1} + C_m^2 A_2 x_{m-2} + \ldots + C_m^{m-1} A_{m-1} x_1 + C_m^m A_m = m(a+1)^{m-1}.$$

Inlocuind pe m prin $m+1$ avem

$$C_{m+1}^1 A_1 x_m + C_{m+1}^2 A_2 x_{m-1} + \ldots + C_{m+1}^m A_m x_1 + C_{m+1}^{m+1} A_{m+1} = (m+1)(a+1)^m.$$

Ţinând seamă că $A_1 = 1$ şi simplificând egalitatea precedentă cu $m+1$, se obţine

$$x_m = (a+1)^m - \left[\frac{1}{2} C_m^1 A_2 x_{m-1} + \frac{1}{3} C_m^2 A_3 x_{m-2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{m} C_m^{m-1} A_m x_1 + \frac{1}{m+1} C_m^m A_{m+1}\right].$$

Pentru a dovedi că x_m este independent de a este suficient a arăta că derivata lui x_m în raport cu a este nulă. Derivând ecuaţia precedentă în raport cu a şi ţinând seamă că

$$A_i' = iA_{i-1}$$

şi că $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ sunt independenţi de a, obţinem

$$x_m' = m(a+1)^{m-1} - [C_m^1 A_1 x_{m-1} + C_m^2 A_2 x_{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + C_m^{m-1} A_{m-1} x_1 + C_m^m A_m].$$

Membrul al doilea este nul în baza ecuaţiei din enunţ, deci

$$x_m' = 0 \quad \text{şi} \quad x_m = \text{const.}$$

Pentru aflarea valorilor lui $x_1, x_2, \ldots$ este deci suficient a da lui a o valoare particulară, de exemplu zero şi atunci ecuaţia din enunţ se reduce la

$$(x+1)^m - x^m = m$$

care se ştie că dă, în condiţiile enunţului numerele lui BERNOUILLI

$$B_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad ; \quad B_3 = 0 \, ; \ldots$$

Notă. S'a primit o bună soluţie în lunie 1927 dela D-l GH. GH. CONSTANTINESCU, pe atunci elev la lic. „Fraţii Buzeşti" din Craiova.

PROBLEMA 5219. *Să se găsească ecuaţia unei drepte cunoscându-i-se direcţia şi ştiind că determină în iperbola echilateră* $x^2 - y^2 = a^2$ *o coardă de lungime dată.*

Să se găsească locul geometric al mijlocului acestei coarde, când lungimea ei rămâne constantă.

GH. D. SIMIONESCU.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), MIRCEA L. MIRCEA (student Cluj), D-TRU RIPIANU, TEODOR ȘERBAN (elev-inginer), MIRCEA D. POPA (Șc. ofițeri artilerie), N. ANDRIEVICI (lic. mil. „N. Filipescu").

Ecuația dreptei va fi $y = mx + n$, în care m este cunoscut și trebuie să determinăm pe n în condițiile problemei.

Să notăm cu $2l$ lungimea coardei determinată de dreapta de mai sus în iperbola echilateră. Punctele M_1 și M_2 de intersecție vor fi date de sistemul:

$$(1) \qquad y = mx + n \quad ; \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Eliminând pe y obținem ecuația de gradul al doilea:

$$(2) \qquad (1 - m^2)\, x^2 - 2mnx - a^2 - n^2 = 0$$

care ne dă abscisele x_1, x_2 pe care *nu avem nevoie* să le calculăm.

In adevăr $y_1 - y_2 = m(x_1 - x)$, iar distanța M_1M_2 va fi dată de:

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (1 + m^2)(x_1 - x_2)^2.$$

Insă R fiind realizantul unei ecuații de gradul II, se știe că

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{R}{a^2}.$$

In cazul nostru obținem din (2):

$$\overline{M_1M_2}^2 = (1 + m^2)\,\frac{4[(1 - m^2)\,a^2 + n^2]}{(1 - m^2)^2} = 4l^2$$

$$\therefore \quad n^2 = l^2\frac{(1 - m^2)^2}{1 + m^2} - a^2(1 - m^2)$$

$$= \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}[a^2(1 + m^2) + l^2(m^2 - 1)].$$

Dreapta căutată va avea drept ecuație:

$$(3) \qquad y = mx \pm \sqrt{\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}[a^2(1 + m^2) + l^2(m^2 - 1)]}.$$

Pentru a găsi locul geometric al mijlocului P al coardei $\overline{M_1M_2}$ vom socoti acest punct ca intersecţia dreptei (3) cu dreapta OP, ambele având ca parametru variabil m, direcţia dreptei (3). Ca să găsim ecuaţia dreptei OP vom calcula coordonatele lui P. Avem din (2)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{mn}{1 - m^2} \quad ; \quad y = mx + n = \frac{m^2 n}{1 - m^2} + n = \frac{n}{1 - m^2}$$

$$\therefore \quad (4) \quad x = my.$$

Eliminând pe m între (3) şi (4) şi lăsând la o parte soluţia banală $x^2 - y^2 = 0$, rămâne ecuaţia locului:

$$(5) \qquad x^4 - y^4 = a^2 (x^2 + y^2) + l^2 (x^2 - y^2).$$

Pe ecuaţia curbei-loc se citesc următoarele proprietăţi: *a)* trece prin origină, care e centru de simetrie, *b)* e simetrică faţă de ambele axe de coordonate, *c)* asimptotele sunt aceleaşi ca şi la iperbola echilateră, adică bisectoarele axelor, *d)* tangentele în origină sunt date de grupul termenelor de grad cel mai mic, deci:

$$(a^2 + l^2) x^2 - (l^2 - a^2) y^2 = 0 \quad \therefore \quad \frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{a^2 + l^2}{a^2 - l^2}}$$

care arată că origina e punct dublu şi anume: punct dublu cu tangente distincte dacă $l > a$, iar dacă $l < a$, punct dublu izolat.

Pentru trasarea curbei se poate trece la coordonate polare. Atunci (5) devine (lăsând de o parte soluţia $\rho^2 = 0$):

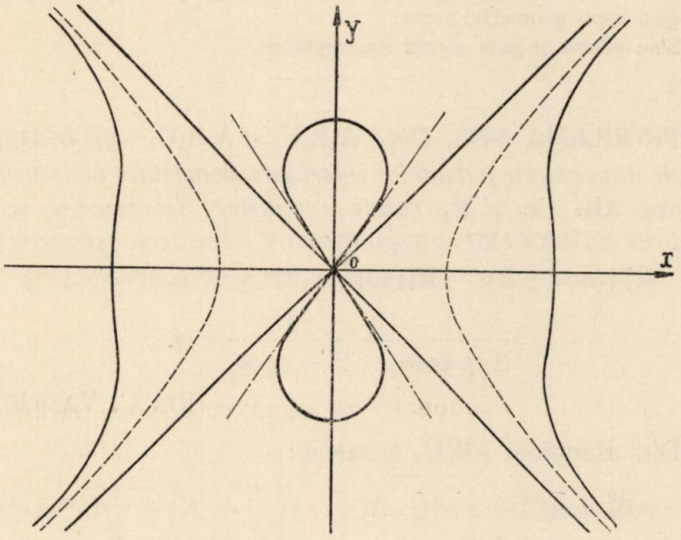
$$(6) \qquad \rho = \pm \sqrt{l^2 + \frac{a^2}{\cos 2\theta}} \quad \therefore \quad \rho' = \frac{a^2}{\rho} \frac{\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta}.$$

E suficient să se studieze curba în cadranul I. Avem tabloul:

θ	0		15^0		30^0	45^0	60^0		75^0		90^0
ρ'	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
ρ	$\sqrt{l^2 + a^2}$ min.	$\sqrt{l^2 + \frac{2a^2}{\sqrt{3}}}$		$\sqrt{l^2 + 2a^2}$	∞	$\sqrt{l^2 - 2a^2}$	$\sqrt{l^2 - \frac{2a^2}{\sqrt{3}}}$		$\sqrt{l^2 - a^2}$ max.		

Curba diferă ca formă după cum $l < a$ sau $l > a$.

Cazul $l < a$. Se citeşte pe tablou că nu există curba decât între 0^0 şi 45^0 şi ramurile deduse prin simetrie. Forma curbei este asemănătoare iperbolei şi este cuprinsă în interiorul iperbolei. Intre $(-a, +a)$ nu are decât origina ca punct dublu izolat.



Cazul $l > a$. Curba există dela $0^0 - 45^0$ precum şi între cele două tangente din origină. Pentru a ne da mai bine seama de forma cubei să rezolvăm ecuaţia (5) în raport cu x, luând pe y ca variabilă independentă. Avem:

$$x^2 = \frac{a^2 + l^2 \pm \sqrt{(a^2 + l^2)^2 + 4\,[y^4 - (l^2 - a^2)\,y^2]}}{2}$$

$$\therefore \quad xx' = \frac{y\,[2y^2 - (l^2 - a^2)]}{\sqrt{(a^2 + l^2)^2 + 4y^2\,(y^2 - l^2 + a^2)}}$$

ceea ce arată că vom avea maxime şi minime ale lui x pentru

$$y = 0 \quad \text{şi} \quad y = \pm \sqrt{\frac{l^2 - a^2}{2}},$$

ceea ce dă:

$$x_{max.} = \sqrt{l^2 + a^2}\ , \quad x_{max.} = \frac{l - a}{\sqrt{2}} \quad \text{şi} \quad x_{min.} = \frac{l + a}{\sqrt{2}}.$$

Cu aceste informaţii suplimentare la tabloul de variaţie în coordonate polare se poate trasa curba, care are forma din figură (s'a luat $a = 3$, $l = 5$).

Au dat soluţii mai lungi, fără a evita rezolvarea ecuaţiei de gradul II, D-nii: CONST. PANTELIMON (lic. mil. Iaşi) şi D. D. BOIANGIU (lic. T.-Severin). D-l TILICĂ C. ŞTEFAN (Şc. geniu) a rezolvat numai prima parte a problemei, fără a găsi locul geometric cerut.

S'au primit şi *şase* soluţii neacceptabile.

PROBLEMA 5402. *Dacă* $A_0B_0C_0$ *şi* $A_1B_1C_1$ *sunt triunghiurile formate din centrele pătratelor interioare construite pe laturile unui triunghiu* ABC, R_0 *şi* R_1 *razele cercurilor circumscrise,* ω_0 *şi* ω_1 *unghiurile lui* BROCARD *corespunzătoare, să se demonstreze relaţiile:*

$$R_1^2(\cot\omega + 2)^2 - R_0^2(\cot\omega - 2)^2 = 5S(\cot^2\omega + 1)\ ^1)$$

$$\frac{1}{2 + \cot\omega_0} + \frac{1}{2 - \cot\omega_1} = 4.$$

ION C. VASILIU.

Din triunghiul AB_0C_0 scoatem:

$$\overline{B_0C_0^2} = \overline{AB_0^2} + \overline{AC_0^2} - 2\,\overline{AB_0}\cdot\overline{AC_0}\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{1}{2}[b^2 + c^2 - 4S]$$

$$= \frac{1}{2}[4S(\cot\omega - 1) - a^2].$$

La fel:

$$\overline{B_1C_1^2} = \frac{1}{2}[b^2 + c^2 + 4S] = \frac{1}{2}[4S(\cot\omega + 1) - a^2].$$

S_0 fiind suprafaţa triunghiului $A_0B_0C_0$, vom avea:

$$S_0 = S - [BA_0C + CB_0A + AC_0B] + [AB_0C_0 + BC_0A_0 + CA_0B_0].$$

Dar:

$$BA_0C = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}\ ,\quad AB_0C_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

$$= \frac{1}{8}(-a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\therefore\quad S_0 = S - \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{S}{2}(2 - \cot\omega).$$

---

1) Enunţ corectat.

La fel:

$$S_1 = S + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{S}{2}(2 + \cot\omega).$$

Calculăm:

$$8\,\overline{B_0C_0^2}\cdot\overline{C_0A_0^2}\cdot\overline{A_0B_0^2} = \pi\,[4S(\cot\omega - 1) - a^2] = 64S^3(\cot\omega - 1)^3$$
$$- 16S^2(\cot\omega - 1)^2(\Sigma a^2) + 4S(\cot\omega - 1)(\Sigma b^2c^2) - a^2b^2c^2.$$

Dar: $\Sigma a^2 = 4S\cot\omega$

$$\Sigma b^2c^2 = 4S^2(\cot^2\omega + 1)$$

$$a^2b^2c^2 = 16S^2R^2$$

$$\therefore\ 8\Pi\,\overline{B_0C_0^2} = 64S^3(\cot\omega - 1)^3 - 64S^3(\cot\omega - 1)^2\cot\omega$$
$$+ 16S^3(\cot\omega - 1)(\cot^2\omega + 1) - 16S^2R^2$$
$$= 16S^2\,[S(\cot\omega - 1)(\cot\omega - 2)^2 + S(\cot\omega - 1) - R^2]$$

$$\therefore\ R_0 = \frac{\Pi\,\overline{B_0C_0^2}}{16S_0^2} = \frac{1}{2}\left[S(\cot\omega - 1) + S\frac{\cot\omega - 1}{(\cot\omega - 2)^2} - \frac{R^2}{(\cot\omega - 2)^2}\right]$$

La fel:

$$R_1^2 = \frac{1}{2}\left[S(\cot\omega + 1) + S\frac{\cot\omega + 1}{(\cot\omega + 2)^2} - \frac{R^2}{(\cot\omega + 2)^2}\right].$$

Eliminăm pe R^2:

$$R_1^2(\cot\omega + 2)^2 - R_0^2(\cot\omega - 2)^2 = 5S(\cot^2\omega + 1).$$

Şi prima relaţie este astfel demonstrată.

Pentru a doua relaţie vom scrie:

$$\cot\omega_0 = \frac{\Sigma\,\overline{B_0C_0^2}}{4S_0} = \frac{6S(\cot\omega - 1) - 2S\cot\omega}{2S(2 - \cot\omega)} = \frac{2\cot\omega - 3}{2 - \cot\omega}$$

iar:

$$\cot\omega_1 = \frac{2\cot\omega + 3}{2 + \cot\omega}.$$

Eliminăm pe $\cot\omega$:

$$\frac{1}{2 + \cot\omega_0} + \frac{1}{2 - \cot\omega_1} = 4.$$

A rezolvat foarte bine problema D-l POPA D. MIRCEA (Şcoala Ofiţeri Artilerie). D-sa a verificat relaţiile din enunţ, a arătat că relaţia (1) trebue modificată, însă nu a găsit în ce constă această modificare.

Soluţii bune de la D-nii M. A. NEGREA (Brăila) şi P. P. DRĂGHICESCU (Lic. militar Iaşi).

I. C. V.

PROBLEMA 5495. *Un punct material* M *alunecă fără frecare pe tangenta unui cerc fix, al cărei punct de contact descrie cercul cu o iuțeală unghiulară constantă* ω.

Să se studieze mișcarea punctului M *și să se determine reacția tangentei, știind că asupra punctului* M *nu lucrează nicio forță dată.*

M. GHERMĂNESCU.

Alegem ca axe doi diametri ai cercului, unul Ox trecând prin poziția inițială a punctului de contact T_0. Poziția punctului de contact T la un moment dat fiind cunoscută (arcul T_0T se vede din centrul cercului sub unghiul ωt), poziția punctului M este determinată, fie prin cunoașterea unghiului $\theta = TOM$, fie prin cunoașterea lungimii $TM = q$, pe care o vom alege ca parametru al problemei, folosind ecuația lui LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = 0,$$

unde T este energia cinetică $\frac{mv^2}{2}$ a punctului M, v fiind viteza sa, iar membrul al doilea este nul căci nu avem forțe date.

Proiectând triunghiul OTM pe axe, obținem ușor

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= R\cos\omega t - q\sin\omega t, \\ y &= R\sin\omega t + q\cos\omega t, \end{aligned}$$

unde R este raza cercului; deducem

$$(2) \qquad \begin{aligned} x' = \frac{dx}{dt} &= -R\omega\sin\omega t - q\omega\cos\omega t - q'\sin\omega t \qquad q' = \frac{dq}{dt}, \\ y' = \frac{dy}{dt} &= \quad R\omega\cos\omega t - q\omega\sin\omega t + q'\cos\omega t, \end{aligned}$$

deci

$$T = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{m}{2}[(R\omega + q')^2 + q^2\omega^2].$$

Avem deci

$$\frac{\partial T}{\partial q'} = m(R\omega + q') \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q} = mq\omega^2,$$

astfel că ecuaţia lui LAGRANGE de mai sus se reduce la

$$q'' - \omega^2 q = 0,$$

cu integrala generală

$$q = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}, \tag{3}$$

unde A şi B sunt constante ce se determină prin condiţii iniţiale. (1) constituesc apoi *ecuaţiile parametrice* ale traiectoriei, în care q este dat de (3).

Fie N reacţiunea tangentei, normală acesteia, nefiind frecare; ecuaţiile mişcării fiind

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = N\cos\omega t \ , \ m\frac{d^2y}{dt^2} = N\sin\omega t, \tag{4}$$

se deduce reacţiunea N din una din ele, observând că din (2) se deduce, ţinând seama de (3),

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2\cos\omega t - 2q'\omega\cos\omega t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\omega^2\sin\omega t - 2q'\omega\sin\omega t,$$

cu care ambele ecuaţii (4) dau aceeaşi expresie pentru reacţia N, anume

$$N = -m\omega(R\omega + 2q'),$$

în care q' este dat de (3).

Notă. 1°. A dat o soluţie foarte bună, în sensul celei precedente, D-l E. MODÂLCĂ, student inginer Bucureşti.

2°. O soluţie incomplectă, în care se determină numai mişcarea relativă a lui M pe tangentă prin considerarea forţei centrifuge, a fost dată de D-l C. D. EFTIMIE.

M. G.

PROBLEMA 5541. *Dintr'un punct* O *se asvârle o bilă. Să se determine iuțeala inițială și direcția de asvârlire astfel încât bila să intre într'un tub de lungime* l *înclinat cu unghiul* φ *pe orizontală, având capătul său inferior situat pe orizontala lui* O *la o distanță* a *de acesta.*

Tubul are diametrul interior corespunzător diametrului bilei și se află într'un plan vertical trecând prin O.

Rezistența aerului se va neglija.

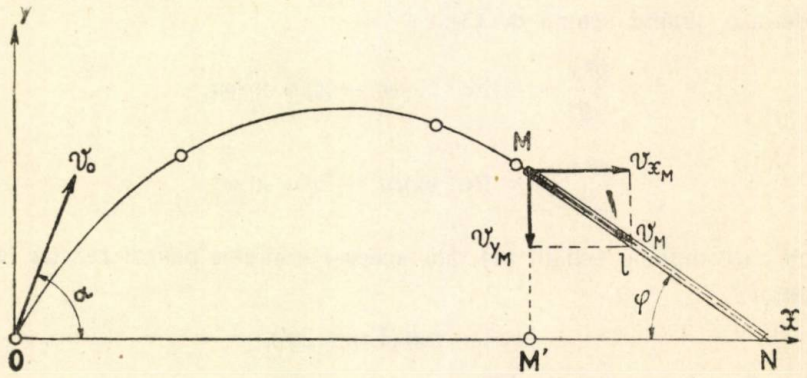
Aplicație:

$$a = 8{,}00\text{ m};\quad \varphi = 30^0;\quad l = 1{,}20\text{ m}.$$

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de D-nii: C. D. EFTIMIE (elev-inginer) și C. BAKONYI (bacalaureat din Timișoara).

In planul vertical în care are loc mișcarea, să luăm drept axe de coordonate Ox orizontal și Oy vertical ascendent; fie v_0 *iuțeala inițială* și α *unghiul direcției de tragere.*



Ecuația *traiectoriei* este parabola:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

iar *coordonatele* capătului superior M al tubului sunt:

$$x_M = a - l\cos\varphi\quad ;\quad y_M = l\sin\varphi.$$

Condițiile ce trebue să îndeplinească traiectoria, pentru c bila să intre în tub sunt următoarele:

1) să treacă prin capătul superior al tubului;

2) tangenta geometrică la traiectorie în punctul M să fie îndreptată după axa tubului.

Exprimând analitic prima condiție obținem relația:

$$l \sin \varphi = (a - l \cos \varphi) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(a - l \cos \varphi)^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \qquad (1)$$

Ținând seama că tangenta trigonometrică a unghiului făcut de tangenta geometrică cu direcția pozitivă a axei Ox este dată de expresia:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

obținem imediat expresia analitică a celei de a doua condiție:

$$\operatorname{tg} (\pi - \varphi) = - \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(l - \cos \varphi)}{v_0^2 \cos^2 a}. \qquad (2)$$

Expresiunile (1) și (2) formează un sistem de două ecuații cu două necunoscute v_0 și α.

Punând relațiile (1) și (2) sub forma:

$$\frac{g(a - l \cos \varphi)^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = (a - l \cos \varphi) \operatorname{tg} \alpha - l \sin \varphi \qquad (3)$$

$$\frac{g(a - l \cos \varphi)}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi \qquad (4)$$

și împărțind membru cu membru obținem:

$$\frac{a - l \cos \varphi}{2} = \frac{(a - l \cos \varphi) \operatorname{tg} \alpha - l \sin \varphi}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}.$$

De unde:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \frac{a + l \cos \varphi}{a - l \cos \varphi}.$$

Introducând această valoare în (4) și ținând seama că:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

se obține:

$$v_0^2 = \frac{g}{2a \operatorname{tg} \varphi} [(a - l \cos \varphi)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi (a + l \cos \varphi)^2]$$

Sau:

$$v_0^2 = \frac{g}{2a\operatorname{tg}\varphi}\left[\frac{a^2}{\cos^2\varphi} + l^2 - \frac{2al}{\cos\varphi}\cdot\cos 2\varphi\right].$$

Timpul în care bila străbate distanţa dela O la capătul superior al tubului este dat de relaţia:

$$t_M = \frac{a - l\cos\varphi}{v_0\cos\alpha},$$

iar iuţeala v_M cu care intră în tub are componentele:

$$v_{M_x} = v_0\cos\alpha \quad ; \quad v_{M_y} = v_0\sin\alpha - gt_M$$

$$v_M = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt_M)^2}.$$

In cazul aplicaţiei se obţin:

$$\alpha = 36^0 51' 40'' \qquad v_0 = 8{,}966\ ^m/_{sec}$$

$$t_M = 0{,}97\ \text{sec}$$

$$v_{M_x} = 7{,}17^m/_{sec} \qquad v_{M_y} = -4{,}14\ ^m/_{sec}$$

$$v_M = 8{,}28\ ^m/_{sec}.$$

AL. ST.

PROBLEMA 5544. *Intrebuinţând câte o singură dată pe fiecare din cele zece cifre ale sistemului zecimal, să se formeze patru numere aşa încât*

$$a + bc + def = ghij$$

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j fiind cifre.

G-L GH. BUICLIU.

Dacă egalitatea din enunţ se scrie sub forma

$$a + bc + def + ghij = 2 \times ghij$$

atunci se vede că $ghij = 9m$, căci suma cifrelor membrului întâi este 45.

Observăm apoi că dacă, la o soluţie găsită, permutăm cifrele *a, c, f* sau *b, e* între ele se obţin noi soluţii pentru membrul întâi, în vreme ce suma *ghij* rămâne aceeaşi.

Vom numi *soluție primitivă* soluția în care $a < c < f$ și $b < e$ și *soluții derivate* toate celelalte soluții. Vom căuta deci numai *soluțiile primitive*, cele *derivate* deducându-se prin permutarea cifrelor a, c, f și apoi a cifrelor $b \times e$, așa că dacă n este numărul *soluțiilor primitive*, numărul total de soluții va fi

$$n \times P_3 \times P_2 = 12n.$$

Efectuând acum adunarea în relația din enunț, obținem

$$(1)\quad a+c+f = 10\varepsilon + j \quad , \quad (2)\quad b+e+\varepsilon = 10\varepsilon' + i,$$

$$(3)\quad d+\varepsilon' = gh$$

ε, ε', ε'' fiind cifre. Dând în fiecare din egalitățile (1), (2), (3) valorile maxime pe care le pot avea cifrele a, b, c, d, e, f se vede că $\varepsilon \leqslant 2$, $\varepsilon' \leqslant 1$.

Facem în (3) $\varepsilon' = 1$, atunci

$$d + 1 = gh$$

de unde se deduc următoarele posibilități, dat fiind că $d \leqslant 9$:

I. $gh = 10$ cu $d = 9$ și II. $g = 0$ cu $d + 1 = h$.

Dacă facem $\varepsilon' = 0$ atunci $d = h$, contra ipotezei. Avem deci de examinat 2 cazuri.

Cazul I. $\varepsilon' = 1$, $gh = 10$, $d = 9$. Cum $ghij = 9m$ rezultă

$$1 + i + j = 9m \quad \therefore \quad i + j = 8$$

ținând seamă că cifrele 0, 1, 9 au fost deja întrebuințate, găsim pentru $ghij$ următoarele 4 soluții

$$1026,\ 1035,\ 1053,\ 1062.$$

1°. Fie $ghij = 1026$. Avem

$$3+4+5 = 12 \leqslant a+c+f = 10\varepsilon + 6 \leqslant 8+7+5 = 20$$

$$\therefore \quad a+c+f = 16 \quad \text{și} \quad \varepsilon = 1.$$

Deci

$$b+e+1 = 12 \quad \therefore \quad b+e = 11 \quad \therefore \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & 3 & 4 \\ \hline e & 8 & 7 \\ \hline \end{array}$$

adăogând la fiecare grupa $b < e$, cifrele rămase neîntrebuințate găsim următoarele 2 *soluții primitive*:

$$1026 = 3 + 45 + 978 = 4 + 35 + 987.$$

Procedând ca la 1° pentru celelalte 3 valori ale lui *ghij* găsim următoarele 3 *soluţii primitive*

$1035 = 2+46+987$; $1053 = 2+64+987$; $1062 = 3+74+985$.

Cazul I are deci în total $12 \times 5 = 60$ soluţii, *primitive* şi *derivate*.

Cazul II. $\varepsilon' = 1$, $g = 0$, $d+1 = h$. Relaţia între d şi h, dă următoarele valori posibile pentru aceste cifre

d	1	2	3	4	5	6	7	8
h	2	3	4	5	6	7	8	9

.

1°. Fie *grupa* $d = 1$, $h = 2$. Trebuind ca $h+i+j$ să fie $9m$, rezultă pentru i şi j următoarele sisteme de valori

i	3	4	7	9
j	4	3	9	7

.

Considerăm grupa (3, 4). Vom avea de determinat celelalte cifre aşa, încât

$$a + bc + 1ef = 234.$$

Procedând ca la 1° dela cazul I găsim soluţia primitivă

$$0234 = 7 + 58 + 169.$$

Se examinează absolut la fel toate valorile grupului (d, h) şi se mai găsesc următoarele 13 *soluţii primitive* ale cazului II:

$0243 = 6 + 58 + 179$; $0351 = 4+68+279 = 6+47+298$; $0459 = 1+72+386$

$0468 = 1+72+395$; $0513 = 6+28+479$; $0531 = 6+27+498$; $0576 = 1+82+493$

$0621 = 4+38+579$; $0729 = 1+43+685$; $0738 = 1+42+695$; $0819 = 2+53+764$

$$0846 = 1 + 52 + 793.$$

In total cazul II are $12 \times 14 = 168$ soluţii *primitive* şi *derivate*

Problema are deci

$$60 + 168 = 228$$

soluţii, căci enunţul nu exclude cazul numerilor *ohij*, formal de 4 cifre.

Notă. 1°. D-nii MIREL D. STOENESCU (Şc. ofiţeri aviaţie) şi M. A. GHIŢESCU (Politehnica, Bucureşti) sunt singurii cari au examinat ambele cazuri $g = 1$ şi $g = 0$, găsind câte 84 din cele 228 soluţii.

2°. Au examinat numai cazul I găsind:

— 60 soluţii D-şoara LYDIA M. TUDORAN (Şc. Centrală de fete, Bucureşti) şi D-nii: D. D. BOIANGIU (Elev-inginer Bucureşti); M. D. COTARIU (Brăila); C. C. DEAC, GH. D. OPREA, ELIZEU N. PETRESCU (Lic. mil. Timişoara); CL. SENI (Lic. „Titu Maiorescu", Bucureşti); ŞERB. I. STOIANOVICI (Liceul mil. Predeal).

— 48 soluţii D-nii P. P. DRĂGHICESCU (Lic. mil. Iaşi); R. P. VOINEA (bacalaureat, Craiova).

— 26 soluţii D-l C. GH. CRUCERU (Politehnica, Bucureşti).

— 5 soluţii D-l GH. D. SBÂRNEA (Elev-inginer).

3°. Trebuie să subliem şi cu acest prilej, forma impecabllă de scris şi acurateţă a soluţiilor D-şoarei L. M. TODORAN. Regretăm că mijloacele nu ne îngăduie a-i fotografia una din soluţiile d-sale.

4°. Pentru probleme analoage cu aceasta, indicăm:

Gazeta Matematică, XXXIII—432, Problema 3642: $ab + cd + ef = ghi$. (I. IONESCU).

Gazeta Matematică, XXXIV—273, Problema 3701: $abc + def = ghij$. (I. IONESCU). Această problemă a fost propusă *ulterior* şi în *Mathesis* de D-l V. THÉBAULT şi rezolvată la pag. 204, Vol. XLVII al acelei reviste.

Gazeta Matematică, XXXV—226, Problema 3672: $abc + def = ghi$. (GH. BUICLIU).

Mathesis, LIV—147, Problema 3189 în care D-l V. THÉBAULT cere 4 numere din care unul egal cu suma celorlalte trei. Soluţia acestei probleme încă nu s'a publicat.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5590. *O placă omogenă dată, în formă de triunghiu dreptunghiu* ABC, *situată într'un plan vertical, articulată în vârful unghiului drept* A *pe planul orizontal, are prinse de vârfurile* B *şi* C *greutăţile* P *şi* Q. *Să se determine poziţia de echilibru şi să se discute rezultatul.*

RADU P. VOINEA.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (liceul Militar, Iaşi).

Pentru determinarea poziţiei de echilibru este suficient să determinăm unghiul α pe care latura AC îl face cu orizontala.

Asupra plăcii ABC lucrează forţele P şi Q precum şi greutatea G aplicată în centrul de greutate al triunghiului ABC.

Pentru ca placa să fie în echilibru trebue ca rezultanta forţelor P, Q şi G să treacă prin punctul de articulaţie A.

Aplicând teorema lui VARIGNON:

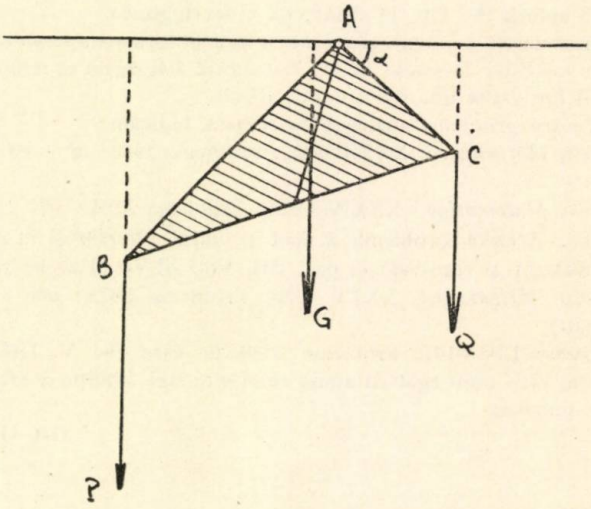
$$M_A P + M_A Q + M_A G = 0$$

găsim

$$Pc \sin\alpha - Qb \cos\alpha + G \frac{(c \sin\alpha - b \cos\alpha)}{3} = 0$$

deci

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b(3Q + G)}{c(3P + G)}$$



Discuție. 1°. Oricare ar fi P, dacă $Q = -\frac{G}{3}$, avem $\alpha = 0$, adică latura AC este orizontală. Valoarea $Q = -\frac{G}{3}$ arată că trebue să aplicăm în punctul C o forță verticală în sus, egală cu o treime din greutatea plăcii.

2°. De asemenea, oricare ar fi Q, dacă $P = -\frac{G}{3}$ avem $\alpha = 90^0$, adică latura AB este orizontală.

3°. Latura BC este orizontală dacă $\alpha = C$, adică:

$$\operatorname{tg} C = \frac{b}{c} \frac{3Q + G}{3P + G}$$

sau:

$$3(Pc^2 - Qb^2) = G(b^2 - c^2).$$

4°. Dacă $\alpha = B$ se vede imediat că $P = Q$.

S'au mai primit soluţii foarte bune dela D-l C. C. BAKONYI (Politehnica Timişoara) care studiază echilibrul stabil când placa e sub planul orizontal şi instabil când este deasupra. D-l C. GH. CRUCERU (Politehnica Bucureşti) discută pentru cazurile particulare ($P = Q$, $P \to \infty$ şi $Q \to \infty$), şi D-l M. IACOMI (liceul Militar, Iaşi) care studiază şi cazul ($P = Q = 0$).

S'a primit şi o soluţie dela D-l D. BOIANGIU (Politehnica Bucureşti) în care, din cauza unei erori de calcul se ajunge la un rezultat eronat.

G. Ţ.

PROBLEMA 5654. *Pentru plata unei chirii, o persoană împrumută 7000 lei cu 12% la Sf. Gheorghe (23 Aprilie), angajându-se a-i restitui la Sf. Dumitru (26 Octomvrie). Împrumutătorul îi reţine dobânda la facerea împrumutului. Care este procentul real al acestui împrumut?*

I. IONESCU.

Dela Sf. Gheorghe până la Sf. Dumitru sunt 186 zile. Deci dobânda pentru 7000 lei cu 12% este:

$$D = (7000 \times 12 \times 186)/(100 \times 360) = 434 \text{ lei.}$$

Cel ce împrumută ia deci numai:

$$7000 - 434 = 6566 \text{ lei.}$$

Procentul real al împrumutului este deci:

$$P = (434 \times 100 \times 360)/(6566 \times 186) = 4200/3283 = 12{,}79,$$

adică 12,8% aproximativ.

P. P. DRĂGHICESCU
(Bacalaureat, Liceul militar, Iaşi).

Notă. Toate celelalte soluţiuni primite au greşeli de calcul numeric. In special s'a greşit calcularea zilelor dela Sf. Gheorghe la Sf. Dumitru!

I. I.

EXERCIŢII

23. Fie A fix şi B mobil pe cercul O. Perpendiculara din O pe bisectoara unghiului ABO taie această bisectoare în M, iar pe AB în N. Să se găsească locul punctelor M şi N.

G-L GH. BUICLIU.

R. Se vede că prin construcţie

$$BN = OB = C^t$$

deci N descrie o concoidă de cerc, anume melcul lui PASCAL cu punctul dublu în A şi cu axa direcţia AO.

24. Să se afle natura seriei

$$\frac{1}{2^2}+\frac{3^3}{4^4}+\frac{5^5}{6^6}+\ldots+\frac{(2n-1)^{2n-1}}{(2n)^{2n}}+\ldots$$

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Aplicând teorema lui ABEL vom avea

$$\lim_{n\to\infty} nu_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2n}\cdot\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right]^{-1}\cdot\frac{n}{2n-1}$$

$$=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}\neq 0.$$

Seria este deci divergentă.

PROBLEME PROPUSE

5679. Care sunt numerele de două cifre la care se poate avea rădăcina patrată cu aproximaţiune de 0,1 scriind o virgulă între acele cifre?

I. IONESCU.

5680. Să se determine numerele întregi A şi B astfel încât

$$A=\varphi[\sigma(B)] \quad \text{şi} \quad B=\varphi[\sigma(A)],$$

unde $\varphi(N)$ şi $\sigma(N)$ sunt numărul şi suma numerelor prime cu N şi mai mici decât N.

I. B. FLORESCU.

5681. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reprezintă numerele prime cu N şi mai mici ca el, atunci, pentru m impar, avem:

$$p_1^m+p_2^m+\ldots+p_n^m=MN.$$

COMANDOR I. LINTEŞ.

5682. In câte feluri putem alege $k(\geqq 3)$ numere întregi pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_k$ astfel ca:

1°. Suma numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ să fie egală cu un număr întreg şi pozitiv dat n,

2°. Să existe un poligon de k laturi cu laturile proporţionale cu numerele $x_1, x_2, \ldots, x_k$?

TIBERIU POPOVICIU.

5683. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \ldots & \frac{1}{2n+1} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2n+1} & 0 & \frac{1}{2n+3} & 0 \ldots & \frac{1}{4n+1} \end{vmatrix}.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

5684. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

ştiind că are ca rădăcini pe

1°. $m + n$; $m - n$; mn; $\frac{m}{n}$

2°. $m + n$; $m - n$; mn; $\frac{n}{m}$,

m şi n fiind numere diferite şi diferite de zero.

GH. BASACOV.

5685. Se consideră coarda AB a unui cerc, pe care variază un punct M. Proiecţia lui M pe coarda AB fiind N, iar P şi Q fiind proiecţiile punctelor A şi B pe tangenta în M la cercul dat, să se afle locul geometric al centrului cercului PNQ.

EMIL MORŢUN.

5686. Să se construiască triunghiul ABC, asemenea cu un triunghiu dat, cunoscând poziţia vârfului A şi ştiind că B şi C se află pe două drepte date.

G-L D. PETROVANU.

5687. Se dau în plan un punct M, un unghiu xoy şi o dreaptă Δ. Să se ducă prin M o secantă care să taie laturile unghiului xoy şi dreapta Δ respectiv în punctele A, B, C aşa ca mijlocul lui $\overline{AB}$ să se confunde cu mijlocul lui $\overline{MC}$.

G-L GH. BUICLIU.

5688. Două cercuri egale (A) şi (B) se taie în punctele C şi D. Prin punctul D trece un cerc (I), variabil ca poziţie, însă egal cu cercurile (A) şi (B). Cercul (I) taie cercurile (A) şi (B) a doua oară în M şi N.

1°. Care este locul punctului P, intersecţia tangentelor în M şi N la cercul (I) ?

2°. Care este locul centrului O al cercului CMN ?

O. N. ŢINO.

5689. Un vector V este determinat în mărime, direcţiune şi sens prin trei cantităţi scalare M_a ; M_b ; M_c egale cu mărimea momentelor lui V în raport cu trei puncte A, B, C din planul său, puncte ce formează un triunghiu dat ABC.

Să se demonstreze că valoarea V a vectorului este dată de relaţia

$$F = \frac{K}{2S},$$

în care:

$$K = \sqrt{a^2 (M_b - M_a)(M_c - M_a) + b^2 (M_a - M_b)(M_c - M_b) + c^2 (M_a - M_c)(M_b - M_c)},$$

iar S este suprafaţa triunghiului ABC.

Să se studieze reducerea vectorilor situaţi în acelaşi plan întrebuinţând reprezentarea dată mai sus.

ALEXANDRU STOENESCU.

5690. Să se demonstreze că integralele $y(x)$ ale ecuaţiei diferenţiale lineare

$$p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\, y = 0,$$

în care $p_i(x)$ sunt polinoame cel mult de gradul m în x, verifică o relaţie de forma:

$$y(x) + \int_{\Gamma} e^{xz}\, dz \int_{C} y(x)\, e^{-xz}\, dx = 0,$$

în care C şi Γ sunt două contururi de integrare ce urmează să fie precizate.

G. G. CONSTANTINESCU.

ERATA. In enunţul problemei 5677, propusă la pag. 536 din numărul precedent se înlocuesc cuvintele « *o jumătate de sferă* » prin « *o calotă sferică* ».

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

		Pag.
C-dor I. Linteş	Cercetări în legătură cu indicatorii. . .	117, 158
I. Petrescu	Asupra teoremei lui FERMAT.	350

2. Geometria

N. Abramescu	Proprietăţi ale tetraedrului echifacial	161
N. Abramescu	Asupra curbelor deduse prin proprietatea triunghiurilor în care unghiurile B = 2A	441
P. P. Drăghicescu . . .	Despre poziţia relativă a două puncte din planul unui triunghiu	548
D. V. Ionescu	Generalizarea unei teoreme a lui PAPPUS .	201, 252
I. Petrescu	Relativ la o configuraţie din triunghiu	57
G. D. Simionescu . . .	Soluţia geometrică a problemei 1384	204
I. C. Vasiliu	Asupra limitei unor triunghiuri.	355

3. Algebra

A. Dobrescu	Asupra unor serii	446

4. Geometria analitică şi infinitezimală

D. Barbilian	Despre o parabolă cubică [1])	397
N. Gh. Gaiu	Asupra triunghiurilor în care B = 2A	443
D. I. Mangéron	Corespondenţa prin tangente izocline. . .	208, 257
A. Myller	Curba care încovoiată nu se schimbă.	251

5. Calculul şi Geometria vectorială

Pl. Andronescu	Calculul vectorial	109, 300, 404, 484, 537

1) Vezi erata dela pag. 536

6. Mecanica

		Pag.
R. Bădescu	Asupra mişcării tautocrone plane	305, 345
Al. Stoenescu	Câteva proprietăţi mecanice şi geometrice ale elipselor lui KEPLER	122

7. Istoria Matematicilor

V. Marian	Matematicile la şcolile din Blaj	499

8. Invăţământul matematic

I. Ionescu	Matematica Românească în Transnistria	249, 297

9. Necrolog

P. Sergescu	† Profesorul GH. BRATU	105, 153

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

***	Lista membrilor societăţii „Gazeta Matematică“	5
***	Membri decedaţi	21

2. Premii şi concursuri

I. Buşilă, D. A. Stan	Premiile, bursele şi publicaţiile societăţii „Gazeta Matematică“	22
G-l Gh. Buicliu, Al. Bunescu, C-dor I. Linteş	Raport pentru decernarea premiului „G-l Sc. PANAITESCU“	24
Delegaţia Societăţii	Concursul „*Gazeta Matematică*“ din anul 1942	60
C-dor I. Linteş, O. Onicescu, P. Sergescu	Raport asupra premiului „V. CONTA“	126
E. Botea, C. Ionescu-Bujor, Gabriela Ţiţeica	Raport pentru acordarea premiului „N. GH. BOTEA“	212
Delegaţia Societăţii	Concursul „*Gazeta Matematică*“	261
G-l Buicliu, I. Ionescu, C-dor I. Linteş	Raportul comisiunii pentru premiul de aritmetică	311
Al. A. Roşu, D. Stoica, Gabriela Ţiţeica	Premiul „Ing. AL. ROŞU“	357
Gh. Th. Gheorghiu	Rezultatul concursului „*Gazeta Matematică*“ din anul 1942	393
V. Alaci, Th. Angheluţă, Al. Bunescu	Raport asupra premiului de algebră	409

		Pag.
C. Ionescu-Bujor, Al. V. Niculescu, Gabriela Ţiţeica	Raport pentru acordarea premiului „V. CRISTESCU"	452
Al. Bunescu, D. Stoica, O. N. Ţino	Raportul comisiunii pentru decernarea premiului de geometrie elementară „G. ŢIŢEICA" . . .	506
G. G. Constantinescu, C-dor I. Linteş, Ing. Al. Stoenescu	Raport pentru decernarea premiului de mecanică „Spiru Haret"	554

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

41 [1]) *G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	410
48. *G-l Gh. Buicliu* . .	Numere interesante cu 10 cifre diferite	508
43. *Gh. Constantinescu* .	Imposibilitatea în numere întregi a ecuaţiei $x^3 + y^3 = 10^n$	453
32. *P. P. Drăghicescu* .	Notă asupra divizibilităţii numerelor	315
45. *I. B. Florescu* . . .	Consideraţiuni asupra problemei 3456.	455
51. *I. B. Florescu* . . .	Asupra problemei 5604	512
54. *I. B. Florescu* . . .	O problemă de analiză nedeterminată . . 515,	556
50. *A. Gloden*	O ecuaţie diofantiană	511
6. *I. Ionescu*	Numere pseudo-prime	127
19. *I. Ionescu*	Asupra problemei 5424.	213
34. *I. Ionescu*	Asupra problemei 3911.	358
14. *C-dor I. Linteş* . . .	Numere imperfecte şi numere inamice.	164
22. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra problemei 3518	214
24. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra unor neegalităţi cu indicatori de ordin superior	262
37. *C-dor I. Linteş* . . .	Asupra unor exerciţii din „*Théorie des Nombres*" par E. LUCAS	360
9. *A. Moessner*	Două soluţii ale unei ecuaţii diofantiene. . . .	129
13. *A. Moessner*	Pătrat magic cu numere zecimale.	164
31. *A. Moessner*	Un sistem diofantian.	314
42. *Tib. Popovici* . . .	Asupra problemei 1885	411

2. Geometria

38. *P. P. Boldescu* . . .	Asupra problemei 5039	362
27. *G-l Gh. Buicliu* . .	O problemă de construcţie a lui G. ŢIŢEICA .	311
17. *P. P. Drăghicescu* .	Asupra triunghiurilor S	167

1) Numerele din această coloană indică numărul de ordine al notei în Vol. XLVII.

		Pag.
16. *I. B. Florescu*	Asupra problemei 4505	167
26. *R. Georgescu*	O problemă asupra conicelor	264
23. *Şerb. Gheorghiu*	Asupra unei propoziţiuni în legătură cu dreapta lui SIMSON	215
53. *Şerb. Gheorghiu*	Notă asupra ortocentrului	513
59. *V. Ghiţescu*	Soluţia geometrică a unei chestiuni de minimum	558
3. *C. Ionescu-Bujor*	Asupra problemei 5109	65
21. *N. N. Mihăileanu*	Asupra unui contur poligonal	213
15. *Al. V. Niculescu*	Asupra ariei unui patrulater oarecare	166
40. *C. Pantelimon*	O proprietate a bisectoarelor unghiurilor unui triunghiu	365
18. *I. I. Petrescu*	Notă relativă la o iperbolă din triunghiu	167
62. *M. D. Popa*	O demonstraţie a teoremelor lui CEVA şi MENELAUS	561
52. *O. Gh. Rădulescu*	Asupra problemei 4906	513
12. *J. Segal*	Asupra problemei 4177	133
39. *G. D. Simionescu*	Asupra notei 38	364
56. *D. Stoica*	Soluţia geometrică a problemei 2575	554
49. *V. Thébault*	Puncte remarcabile în triunghiu şi triunghiuri speciale	509
44. *I. C. Vasiliu*	Relaţii metrice în triunghiu şi tetraedru	454
60. *R. P. Voinea*	Proprietăţi de ale parabolei în legătură cu proprietăţi de ale hiperbolei	559

3. Algebra

5. *I. B. Florescu*	O nouă soluţie a problemei 4232	67
46. *N. Gaiu*	Asupra unei indentităţi	457
7. *Gh. Th. Gheorghiu*	Criteriul lui PRINGSHEIM	128
8. *Gh. Th. Gheorghiu*	Asupra unei probleme din J. HAAG	129
29. *Gh. Th. Gheorghiu*	Asupra problemei 19 cap. XIII din *Culegere de probleme de Algebră*	312
11. *V. Ghiţescu*	Asupra problemei 5097	132
33. *I. Petrescu*	Asupra unei extinderi relative la modulele rădăcinilor ecuaţiilor algebrice	316
55. *I. I. Stamate*	Raţionalizarea unei funcţii	517

4. Trigonometria

28. *G-l G. I Liteanu*	Asupra problemei 5282	312
58. *G. D. Simionescu*	Asupra problemei 2575	557

5. Geometria analitică şi infinitezimală

10. *R. Bădescu*	Asupra cardioidei	130
30. *N. Barbilian*	Indreptare	313
2. *G-l Gh. Buicliu*	Asupra problemei 5389	27

6. Mecanică

		Pag.
4. *Al. Stoenescu* . . .	Asupra problemei 4971	65
61. *Em. S. Modâleă* . .	Asupra exerciţiului Nr. 2, Vol. XLV	560

7. Balistica

25. *C-dor I. Linteş* . .	Asupra stabilirii unei formule de balistică aeriană	263

8. Istoria Matematicilor

47. *I. Ionescu*	Cunoştinţe matematice pentru ofiţerii de geniu	507

9. Diverse

20. *Cpt. M. I. Focşeneanu*	Asupra problemei 5359	213
7. *I. Ionescu*	Nota redacţiei	128
35. *I. Ionescu*	Asupra problemei 5557	360
36. *Al. Stoenescu* . . .	Asupra problemei 5556	360
1. *C. C. Teodorescu* .	Asupra mediei şi extremei raţii	25

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul „Gazeta Matematică" din 1942. Enunţul problemelor date la proba scrisă 365

Concursul de admitere în Şcoala de Ofiţeri activi de artilerie contra aeronavelor. Bucureşti Iulie 1941 69

Şcoala Politehnică Bucureşti: Examenul de intrare din Oct. 1941 318

Şcoala Politehnică din Timişoara. Sesiunea Sept., Oct. 1941 217

Universitatea din Bucureşti. Examenul de matematici generale. Sesiunea Oct. 1941 169

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări şi reviste recenzate

I. Ionescu	G. ŢIŢEICA. Operele Vol. I.	28
I. Ionescu	*Gazeta Matematică.* Enunţurile problemelor nerezolvate propuse în anii I-XLIV	72
V. Marian	TH. ANGHELUŢĂ şi P. SERGESCU. Comemorarea iluştrilor matematicieni EM. PICARD şi H. LEBESGUE	415
V. Marian	PROF. DR. HURMUZESCU. Cincizeci de ani dela moartea profesorului BACALOGLU	563
V. Marian	P. SERGESCU. Quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France. .	29
V. Marian	Sur l'identité des auteurs de quelques articles mathématiques insérés dans le „*Journal des Savants*"	414

Pag.

Redacţia . . . . . I. IONESCU. Maxime şi minime geometrice . . 220
*** . . . . . I. IONESCU. Povestiri ştiinţifice 28, 562
*** . . . . . P. SERGESCU. Un episod din bătălia pentru triumful calculului diferenţial 563
*** . . . . . N. VASILESCU-KARPEN. Viaţa şi opera lui GALILEO GALILEI 563

2. Lucrări nerecenzate

N. Abramescu . . . . . Algebra superioară pentru clasa VIII 135
Th. Angheluţă şi P. Sergescu . . . . . Comemorarea iluştrilor matematicieni EM. PICARD şi H. LEBESGUE 373
Gh. Th. Gheorghiu . . Curs de analitică şi trigonometrie 414
C. G. Iliovici . . . . . Greşeli în studiul formelor nedeterminate . . . 322
Gh. Nichifor . . . . . Antemergătorul învăţăturii arhitecturii: ALEXANDRU ORĂSCU 72
N. N. Mihăileanu . . . Corespondenţa omografică 28
Al. Pantazi . . . . . Elemente de geometrie diferenţială proiectivă a curbelor şi a suprafeţelor 458
P. Puiu . . . . . Cuantificarea spaţiului şi teoria cuantelor . . . 73

3. Extrase, Suplimente, Teze

Th. Angheluţă . . . . Determinarea substituţiilor ortogonale al căror modul este un determinant simetric 135
Th. Angheluţă . . . . Memoriu de lucrări 135
Th. Angheluţă . . . . Remarques sur des mouvements tautochrones . 134
Th. Angheluţă . . . . Sur une équation fonctionnele qui définit les polynomes à plusieurs variables 134
Th. Angheluţă . . . . Sur une limite pour les modules des zéros des polinomes 134
Th. Angheluţă . . . . Une remarque sur une généralisation des fonctions analitiques 135
A. Avramescu . . . . . Beiträge zur Berechnung des Kurzschlusserwärmung 29
A. Avramescu . . . . . Die Wärmewirkung der Schalt- und Strosströme 30
A. Avramescu . . . . . Efectele termice ale curenţilor de scurt circuit în reţelele electrice 30
A. Avramescu . . . . . Eine elektrische Methode zur Messung der wahren spezifischen Wärme von Metalien . . . 30
A. Avramescu . . . . . Erwärmungsberechnung elektrischer Kontakte . 30
A. Avramescu . . . . . O nouă sursă de lumină electrică 30
A. Avramescu . . . . . Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Kupfer und Aluminium bis zum Schmelzpunkt 30

Pag.

A. Avramescu . . . . . Über die Änderung des elektrischen Widerstandes Temperatur-Koeffizienten von Kupfer und Aluminium bis zum Schmelzpunkt. . . . 30

A. Avramescu . . . . . Über die Berechnung der Kurzschlusser-wärmung 30

A. Avramescu . . . . . Über die Berechnung der Wärmewirkung von Ausgleich und Überströmen 30

A. Avramescu . . . . . Über die Erwärmung der Kurzchlusserwärmung 30

A. Avramescu . . . . . Über die Zündung von Entladungslampen. . . 30

N. Bărbulescu . . . . . Die Zustandsgleichung der Oberfläche . . . 221

N. Bărbulescu . . . . . La théorie dipolaire des solutions 221

N. Bărbulescu . . . . . Le principe de la rélativité restreinte et le temps absolu 221

N. Bărbulescu . . . . . Sur la thermodynamique des phénomènes superficielles 221

N. Bărbulescu . . . . . Sur l'additivité de la constante α de VAN DER WAALS 221

M. St. Botez . . . . . L'expression analytique de la perspective Newtonienne des polygones 171

G. G. Constantinescu . . Sur le critère de M. POMPEIU pour l'integration par quadrature de l'équation de RICCATI. 563

G. G. Constantinescu . . Sur les integrales de certaines classes d'équations différentielles linéaires. 564

M. Ghermănescu . . . Mişcarea punctului material 414

M. Ghermănescu . . . Sur une équation fonctionnelle 414

C. Iacob . . . . . Considérations élémentaires sur la double source 72

C. Iacob . . . . . Memoriu de titluri şi lucrări 171

C. Iacob . . . . . Sur l'écoulement lent d'un fluide parfait, compressible, autour d'un cylindre circulaire . . 72

C. Iacob . . . . . Sur le passage du régime infrasonore à celui ultranosore au cas de la double source . . 72

C. Iacob . . . . . Sur le problème de la dérivée oblique de POINCARÉ et ses connexions avec le problème de HILBERT 171

C-dor I. Linteş . . . . Avionul stratosferic 134

C-dor I. Linteş . . . . Câteva noutăţi şi învăţăminte de tehnică militară din războiul actual 414

C-dor I. Linteş . . . . Efectul bombelor aeriene 267

C-dor I. Linteş . . . . Turele aerodinamice pentru viteze foarte mari . 135

C. G. Malcoci . . . . . Greşeli în studiul formelor nedeterminate . . . 517

V. Marian . . . . . Fizicianul PIERRE WEISS 322

P. Sergescu . . . . . Notă asupra curbelor osculatoare staţionare . . 73

P. Sergescu . . . . . O oră de seminar matematic 134

Pag.

P. Sergescu . . . . . Sur l'identité des auteurs de quelques articles mathématiques insérés dans „*Le Journal* des *Savants*" 458
N. Vasilescu-Karpen . Viaţa şi operele lui GALILEO GALILEI 458

4. Reviste, Periodice

Anuarul Observatorului din Bucureşti 321
Asociaţia Română de Poduri, Şarpante şi Incercarea materialelor 134
Boletin Matematico 71, 134, 171, 220
Buletinul Politechnicei din Bucureşti 71, 414
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 28, 171, 220, 413, 414
Bulletin mathématique de la Société roumaine des sciences 171
Bulletin scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara 27, 321
Deutsche Mathematik 71, 135
Disquisitiones Mathematicae et Physicae 135
Euclides 321, 414
Gazeta Matematică. Suplimentul cu exerciţii 134, 414
Mathematica 267
Mathesis 27, 28, 321
Pozitiva 134, 171, 267, 321
Revista de la Facultad de Ciencias Fisicomatematicos 72
Revista Matematică din Timişoara 27, 72, 134, 171, 220, 267, 373, 414, 458, 517, 562
Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" 562
Revista Matematică Hispano-Americană 28, 72, 321
România aeriană 134
Universitatea din La Plata 28

F. CERERI *)

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul	*Nr. Cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1 . . .	24 (XXI)	?	14 . . .	183 (XXI)	?
4 . . .	24 „	?	15 . . .	219 „	?
5 . . .	24 „	?	16 . . .	254 „	?
7 . . .	59 „	?	17 . . .	294 „	264 (XXXVIII) ?
8 . . .	59 „	?			
10 . . .	91 „	?	20 . . .	420 „	?
11 **) . .	144 „	?	23 . . .	17 (XXII)	?
12 . . .	145 „	?	24 . . .	75 „	?
13 . . .	145 „	219 (XXI) ?	26 . . .	161 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns.

**) A se vedea nota matematică dela pag. 249, Vol. XLVI.

Nr. cererii	*Pagina la care a fost :* Propusă	Răspunsul
27 . . .	187 (XXII)	?
28 . . .	213 „	?
29 . . .	231 „	?
30 . . .	258 „	?
31 . . .	277 „	?
32 . . .	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV) ?
33 . . .	308 „	?
34 . . .	40 (XXIII)	?
35 . . .	40 „	?
36 . . .	65 „	?
37 . . .	86 „	211 (XXIII) ?
38 . . .	112 „	?
39 . . .	137 „	?
40 . . .	157 „	?
41 . . .	185 „	?
42 . . .	211 „	?
43 . . .	235 „	?
44 . . .	259 „	?
45 . . .	275 „	?
46 . . .	13 (XXIV)	?
49 . . .	57 „	?
50 . . .	70 „	?
51 . . .	88 „	?
52 . . .	103 „	?
55 . . .	168 „	?
56 . . .	168 „	?
58 . . .	16 (XXV)	?
59 . . .	36 „	?
60 . . .	58 „	?
61 . . .	58 „	?
63 . . .	71 „	?
64 . . .	122 „	?
65 . . .	122 „	?
66 . . .	155 „	?
67 . . .	175 „	?
68 . . .	199 „	?
70 . . .	223 „	?
71 . . .	251 „	?
73 . . .	45 (XXVI)	?
74 . . .	45 „	?
75 . . .	94 „	?
77 . . .	198 „	?
78 . . .	227 „	?
80 . . .	263 „	?
81 . . .	27 (XXVII)	?
82 . . .	27 „	160 (XXVII)?
83 . . .	160 „	?
84 . . .	197 „	?
85 . . .	197 „	?
86 . . .	240 „	?
87 . . .	283 „	?
88 . . .	329 „	?
89 . . .	361 „	?

Nr. cererii	*Pagina la care a fost :* Propusă	Răspunsul
91 . . .	26 (XXVIII)	?
92 . . .	57 „	?
93 . . .	57 „	?
95 . . .	136 „	?
96 . . .	136 „	?
97 . . .	213 „	?
98 . . .	213 „	?
100 . . .	297 „	?
101 . . .	342 „	?
102 . . .	458 „	?
103 . . .	458 „	?
104 . . .	24 (XXIX)	?
105 . . .	58 „	?
107 . . .	145 „	?
108 . . .	226 „	?
109 . . .	298 „	?
112 . . .	419 „	?
113 . . .	454 „	?
115 . . .	22 (XXX)	?
116 . . .	102 „	?
117 . . .	102 „	?
118 . . .	140 „	?
119 . . .	218 „	?
120 . . .	261 „	?
122 . . .	306 „	?
123 . . .	337 „	?
124 . . .	383 „	?
126 . . .	423 „	?
128 . . .	33 (XXXI)	?
129 . . .	55 „	?
130 . . .	56 „	?
131 . . .	100 „	?
134 . . .	184 „	?
142 . . .	53 (XXXII)	?
143 . . .	102 „	?
144 . . .	142 „	?
146 . . .	216 „	?
148 . . .	296 „	?
149 . . .	343 „	?
152 . . .	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153 . . .	51 „	?
154 . . .	51 „	?
157 . . .	146 „	?
158 . . .	185 „	?
159 . . .	217 „	?
162 . . .	295 „	?
163 . . .	341 „	?
166 . . .	457 „	?
179 . . .	385 (XXXIV)	?
181 . . .	24 (XXXV)	?
186 . . .	216 „	?
193 . . .	466 „	?
196 . . .	57 (XXXVI)	?
201 . . .	221 „	?

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
207	414 (XXXVI)	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
243	212 (XL)	?
244	266 „	?
245	309 „	?
247	499 „	?
248	553 „	?
250	148 (XLI)	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 „	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
259	629 „	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
269	34 (XLIII)	73
270	90 „	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
279	639 „	?
280	32 (XLIV)	?
284	479 „	?
289	248 (XLV)	?
290	306 „	?
291	419 „	?
292	479 „	?
294	530 „	?
296	638 „	?
297	205 (XLVI)	?
298	254 „	?
299	315 „	?
300	364 „	267, 322
301	483 „	?
302	534 „	?
303	583 „	?
304	641 „	?
305	30 (XLVII)	?
306	135 „	?
307 *)	171 „	?
308	221 „	?
309	322 „	564
310	373 „	?
311	373 „	?
312	458 „	?
313	518 „	?
314	518 „	?
315	564 „	?

G. DIVERSE

1. Premiul „Politechnicei" din Bucureşti din fondul N. VASILESCU-KARPEN 268
2. Şedinţele societăţii „Gazeta Matematică" 31, 322
3. Şedinţele societăţii române de matematici 172, 268, 322
4. Sporirea bibliotecii „Gazeta Matematică" 31, 73, 222, 322, 373, 417, 458, 518, 564

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea pe materii a problemelor propuse în acest an

Aritmetica şi teoria numerelor 5543, 4, 5, 6, 57, 8, 9, 70, 1, 81, 2, 3, 92, 3, 4, 5, 604 5, 6, 7, 17, 8, 30, 1, 2, 42, 3, 54, 5, 68, 9, 70, 8, 9, 80, 1, 2

*) La pag. 171 a fost propusă cu numărul greşit 306.

Geometria 2647, 4991, 5523 42, 9, 50, 1, 2, 3, 60, 1, 3, 9, 72, 3, 4, 80, 4, 5, 6, 96, 7, 8, 608, 9, 19, 20, 1, 5, 33, 4, 40, 4, 5, 7, 51, 61, 3, 7, 75, 7, 85 6, 7, 8
Algebra 5547, 8, 67, 8, 75, 6, 87, 9, 99, 600, 1, 10, 1, 2, 3, 26, 39, 49, 50, 6, 7, 8, 71, 2, 3, 4, 83, 4
Trigonometria 5562, 6, 88, 602, 14, 35, 7, 8, 48, 59, 60
Geometria analitică şi diferenţială 5564, 5, 77, 615, 6, 22, 3, 4, 36, 46, 62, 76
Geometria vectorială . 5689
Mecanica 5554, 5, 79, 90, 1, 603, 27, 8, 9, 41, 53, 65, 6
Analiza 5578, 652, 64, 5690
Balistica 5556

b) Repartizarea pe autori a problemelor propuse în acest an

N. Abramescu . . . 5565, 615, 76
V. Alaci 5609
Th. Angheluţă 5548, 612
I. S. Antoniu 5543, 659
Gh. Basacov . 2647, 5560, 99, 684
G-l Gh. Buicliu . 5544, 58, 72, 87, 98, 616, 23, 37, 46, 74, 87
A. D. Bunescu 5677
St. Cetăţeanu 5618
Th. Gh. Cocea 5621
G. G. Constantinescu . 5600, 8, 90
P. P. Drăghicescu . . 5633
I. B. Florescu . . 5581, 625, 72, 80
Cpt. M. Focşeneanu 5622
N. Gaiu 5644
Ad. Gheorghiu 5551, 86
Gh. Th. Gheorghiu . .5547, 67, 76, 89 650.
Şerb. Gheorghiu . . 4991, 5552, 64 73, 620, 34, 51, 64, 73, 83
M. Ghermănescu 5554, 68, 75, 601, 7, 31, 52, 6, 71
V. Ghiţescu 5549, 660
A. Gloden 5643
D. V. Ionescu 5661
I. Ionescu . . 5542, 57, 69, 80, 92, 604, 17, 30, 42, 54, 67, 79
C-dor I. Linteş . 5546, 59, 70, 83, 94, 605, 9, 81
Şt. S. Mihăescu 5675
N. N. Mihăileanu 5640
C. Mihu 5645
I. M. Miu 5582
Em. S. Modâlcă 5627
Em. Morţun 5685
Al. V. Niculescu 5606
Şerb. Oteteleşanu . . . 5624, 36
C. V. Pantelimon 5584
N. Pavel 5639
Iul. Petrescu 5596, 663
G-l D. Petrovanu 5686
M. D. Popa 5561
Gh. Popescu-Botoşani . . 5578, 85
T. Popoviciu 5658, 78, 82
M. L. Rusu 5597
P. Sergescu 5613
Gh. D. Simionescu . 5566, 74, 88, 602, 38, 662
I. I. Stamate 5610, 26, 57
Al. Stoenescu . . 5556, 603 29, 41, 53, 66, 89
C. C. Teodorescu 5614
I. St. Teodorescu . . . 5577, 611
V. Thébault . . . 5545, 63, 71, 95, 647, 68
O. N. Ţino 5553, 655, 88
Gabriela Ţiţeica . . 5555, 79, 91, 628, 65
P. Trofim 5550
M. Al. Vasilescu-Stabu . . . 5670
I. C. Vasiliu 5523, 62, 635
R. P. Voinea 5590
E. Wegener 5648
I. Gh. Zamfirescu, Cpt. . . . 5619
Gr. Zapan, C-dor . . 5593, 632, 49

c) Indicarea paginei la care problemele au fost propuse sau rezolvate

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI), 238 (XVI)	NR
676	148 (VII)	
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	
1000 **)	220 „, 438 (XVI)	NR
1008	244 (X), 462 (XVI)	136
1056	100 (XI)	NR
1146 ***)	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1180	172 „	222
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1398	224 „	NR
1412	256 „	NR
1424	288 „	
1450	352 „	
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
1656	239 (XVI)	
1676	279 „	
1679	280 „	
1690	320 „	172
1702	360 „	
1711	399 „, 372 (XXXI)	
1735 ****)	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	NR
1764 *****)	120 „	NR
1790	240 „	NR
1823	400 „	NR
1831	439 „	NR
1835	440 „	
1840	466 „	
1898	199 (XVIII)	
1911	239 „	
1914 ******)	239 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1944	319 „	
1945 *******)	320 „	
1958	359 „	NR
1959	360 „	NR
1969	399 „	NR
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2038	159 „	
2048	198 „	NR
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2065	239 „	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii. A se vedea articolul dela pag. 402, Vol. XLIV.

**) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

***) A se vedea nota matematică dela pag. 634, Vol. XLVI, în baza căreia problema rămâne nerezolvată. soluţia dela pag. 77 neräspunzând adevăratei înterpretări a enunţului.

****) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

*****) Pentru definiţia momentelor statice polare, a se vedea G. M., Vol. XVII, pag. 87.

******) Vezi erata pag. 280, Vol. XVIII.

*******) Vezi erata pag. 360, Vol. XVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2070*)	240 (XIX)	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2118	399 „	
2130**)	460 „	NR
2133	439 „	
2145	462 „	. . .459
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	. . . 31
2263	359 „	
2264	360 „	NR
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2284	439 „	
2290	439 „	
2301	462 „	
2302	462 „	NR
2311	40 (XXI)	
2332	119 „	
2338	120 „ 422 (XXXI)	NR
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2394	318 „	. . .417
2422	399 „	
2423	399 (XXI)	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2461	32 (XXII)	. . .173
2462	62 „	NR
2466	63 „	
2477	95 „	
2497	144 „	
2500	144 „	
2537	287 „	NR
2539	288 „	
2545	312 „	
2553	47 (XXIII)	
2560	72 „	
2566	120 „	. . .269
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	. . .174
2577	168 „	
2586	216 „	
2587	216 „	
2591	240 „	
2593	264 „	
2599	288 „	
2602***)	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	. . .374
2609****)	32 „	NR
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2645	143 „	
2647*****)	438 (XLVII)	
2655	191 (XXIV)	NR
2660	191 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	
2675	63 „	
2684	80 „	
2688	80 „	
2692	108 „	
2713	143 „	
2731	191 „	
2752	264 „	
2758	56 (XXVI)	
2769	79 „	NR
2778	104 „	

*) Vezi erata pag. 280, Vol. XIX.

**) Inlocueşte problema 2130 propusă la pag. 430, Vol. XIX.

***) Inlocueşte problema 2602 propusă la pag. 16, Vol. XXIV.

****) Soluţia dată la pag. 458, Vol. XXXIX nefiind satisfăcătoare, se aşteaptă o nouă soluţie la această problemă.

*****) Inlocueşte enunţul problemei 2647 dela pag. 143, Vol. XXIV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2789	135 (XXVI)	
2814	192 „	NR
2818	216 „	
2820	216 „	
2822	216 „	
2827	247 „	
2850	335 „	
2865	70 (XXVII)	
2886	104 „	NR
2906	184 „	
2909	221 „	
2912	222 „	NR
2922	263 „	
2926	264 „	NR
2936	343 „	NR
2947*)	376 „	NR
2953	416 „	. . 31
2955	416 „	
2969	39 (XXVIII)	
2971	39 „	
2983	79 „	
2985	80 „	
2993	119 „	
2999	120 „	
3000	120 „	
3003	159 „	
3005	159 „	
3013	199 „	
3019	200 „	
3041	319 „	
3054	360 „	
3069	400 „	NR
3070	400 „	
3071	439 „	
3073	439 „	
3075	439 „	
3081	479 „ 454 (XXXI)	NR
3085	480 (XXVIII)	
3086	480 „	
3091	39 (XXIX)	
3095	40 „	
3108	80 „	
3118	120 „	
3134**)	199 „	
3150	240 „	
3161	318 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3173	358 (XXIX)	
3177	359 „	
3178	360 „	
3180	360 „	
3189	400 „	
3198	440 „	
3220	40 (XXX)	
3227	80 „	
3228	80 „	
3230	80 „	
3232	119 „	
3239	120 „	
3245	160 „	
3249	160 „	
3251***)	198 „	. . . 136
3253	199 „	
3255	199 „	NR
3260	200 „	
3267	239 „	
3277	280 „	
3287	320 „	
3288	320 „	
3291	358 „	
3296	359 „	
3298	359 „	NR
3300	360 „	. 139
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3320	440 „	
3332	119 (XXXI)	
3340	40 „	
3341	79 „	
3350	80 „	. . . 234
3360	120 „	
3389	240 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	
3429	400 „	

*) Vezi rectificarea pag. 448, Vol. XLIII.

**) A se vedea soluția parțială dela pag. 254 și nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției.

***) Un început de soluție s'a dat la pag. 314, Vol. XXX. I s'a dat soluția la pag. 136, din acest an sub Nr. greșit 3215. Vezi erata pag. 200.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3430 . . .	400 (XXXI)	
3439 . . .	440 „	
3445 . . .	479 „	
3448 . . .	479 „	
3457 . . .	39 (XXXII)	
3459 . . .	40 „	
3467*) . . .	79 „	
3468 . . .	80 „	
3472 . . .	80 „	
3474 . . .	119 „	
3488 . . .	159 „	
3493 . . .	160 „	
3495 . . .	199 „	
3497 . . .	199 „	. . . 323
3499 . . .	199 „	
3504 . . .	200 „	
3506 . . .	239 „	
3512 . . .	240 „	
3513 . . .	240 „	
3521 . . .	279 „	
3522 . . .	280 „	NR
3523 . . .	280 „	NR
3533 . . .	320 „	
3534 . . .	320 „	565
3535 . . .	359 „	NR
3536 **) . .	438 „	NR
3542 . . .	360 „	NR
3545 . . .	398 „	NR
3546 . . .	399 „	
3551 . . .	39 (XXXIII)	NR
3572 . . .	480 (XXXII)	NR
3573 . . .	480 „	NR
3584 . . .	79 (XXXIII)	
3589 . . .	80 „	
3597 . . .	120 „	
3600 . . .	120 „	
3607 ***) . .	159 „	
3608 . . .	159 „	
3610 . . .	160 „	
3620 . . .	199 „	
3622 ****) .	239 „	
3625 . . .	239 „	
3627 . . .	278 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3632 *****) .	279 (XXXIII)	
3635 . . .	279 „	
3640******)	280 „	NR
3644 . . .	319 „	
3647 . . .	320 „	
3653 . . .	359 „	NR
3657 . . .	359 „	
3658 . . .	360 „	
3659 . . .	360 „	
3660 . . .	360 „	
3664 . . .	399 „	
3677 . . .	440 „	
3681 . . .	478 „	NR
3682 . . .	478 „	
3689 . . .	480 „	NR
3693 . . .	39 (XXXIV)	
3699 . . .	40 „	NR
3700 . . .	40 „	NR
3706 . . .	79 „	
3713 *******)	119 „	NR
3720 . . .	120 „	
3725 . . .	160 „	
3732 . . .	199 „	
3733 . . .	119 (XXXV)	. . 465
3736 . . .	200 (XXXIV)	
3749 . . .	240 „	
3762 . . .	319 „	
3764 . . .	319 „	
3768 . . .	320 „	
3772 . . .	359 „	
3776 . . .	360 „	NR
3780 . . .	360 „	
3784 . . .	399 „	
3787 . . .	400 „	
3790 . . .	400 „	
3792 . . .	439 „	
3793 . . .	439 „	NR
3802 . . .	479 „	
3804 . . .	479 „	
3807 . . .	480 „	
3808 ********)	480 „	
3810 . . .	480 „	
3817 . . .	40 (XXXV)	

*) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.

**) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.

***) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.

****) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.

*****) Problema rezolvată la pag. 95, Vol. XLII este 3630, iar nu 3632. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.

******) Problema rezolvată la pag. 35, Vol. XLII este 3639, iar nu 3640. A se rectifica în consecință tabla de materii a Vol. XLII și a volumelor următoare.

*******) A se vedea erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

********) A se vedea completarea enunțului la pag. 288, Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3819	40 (XXXV)	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3836	120 „	NR
3844	159 „	NR
3845	159 „	. . . 325
3849	160 „	
3853	199 „	
3863	239 „	NR
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3874	38 (XXXVIII)	
3876	279 (XXXV)	
3880	280 „	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3902	398 „	
3909	400 „	NR
3913	439 „	NR
3920*)	53 (XLVI)	. . . 74
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3939	40 „	
3944	79 „	. . . 467
3950	80 „	
3961	159 „	
3965	159 „	
3975	200 „	
3976	200 „	
3983	238 „	NR
3999	280 „	
4010	320 „	NR
4013	359 „	
4022	398 „	
4028	400 „	
4030	400 „	
4034	439 „	
4035	440 „	
4041	38 (XXXVIII)	
4045	479 (XXXVI)	
	142 (XL)	NR
4053**)	39 (XXXVII)	NR
4056	79 „	
4059	40 „	
4060	40 „	
4067	80 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4070	80 (XXXVII)	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4096	200 „	
4098	200 „	NR
4102	239 „	
4103***)	239 „	. . . 519
4104	239 „	NR
4105	240 „	
4107	240 „	
4111	279 „	NR
4112	279 „	NR
4118	280 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	NR
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4155	439 „	
4167	479 „	NR
4169	480 „	NR
4172	39 (XXXVIII)	NR
4184	79 „	
4185	79 „	
4192	118 „	
4194	119 „	
4199	120 „	
4206	160 „	NR
4210	160 „	
4214	198 „	
4234	279 „	
4236	280 „	NR
4245	319 „	
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4270	400 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	NR
4280****)	164 (XLVI)	. . 78

*) Inlocueşte problema 3921 dela pag. 440, Vol. XXXV.

**) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

***) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.

****) Inlocueşte problema 4280 propusă la pag. 440, Vol. XXXVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4281 . . .	479 (XXXVIII)	NR
4283 . . .	479 „	NR
4285 *) . . .	479 „	
4287 . . .	480 „	
4289 . . .	480 „	NR
4290 . . .	383 (XXXIX)	NR
4297 . . .	40 „	
4302 . . .	78 „	
4303 . . .	78 „	NR
4307 . . .	79 „	
4315 . . .	120 „	NR
4316 . . .	120 „	
4319 . . .	120 „	NR
4326 . . .	159 „	
4333 . . .	198 „	NR
4335 . . .	198 „	
4337 . . .	200 „	NR
4340 . . .	200 „	NR
4350 . . .	240 „	
4352 . . .	286 „	
4356 . . .	287 „	NR
4357 . . .	288 „	NR
4358 . . .	288 „	NR
4360 . . .	334 „	NR
4362 . . .	334 „	NR
4363 . . .	335 „	NR
4370 . . .	336 „	
4373 . . .	383 „	
4376 . . .	384 „	
4380 . . .	384 „	NR
4384 . . .	431 „	NR
4389 . . .	432 „	
4393 . . .	478 „	NR
4395 **) .	479 „	NR
4396***) .	502 (XLVI) . .	270
4399 . . .	480 (XXXIX)	NR
4402 . . .	480 „	
4404 . . .	526 „	NR
4405 . . .	526 „	NR
4407 . . .	527 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4411 . . .	528 (XXXIX)	
4412 . . .	528 „	NR
4416 . . .	46 (XL)	
4426 . . .	48 „	
4435 . . .	96 „	
4445 . . .	143 „	
4446 . . .	143 „	
4449 . . .	144 „	NR
4450 . . .	144 „	
4452 ****) .	165 (XLVI) . . .	33
4453 . . .	190 (XL) . .	328
4458 . . .	191 „	
4464 *****)	109 (XLV)	
4468 . . .	239 (XL)	NR
4473 . . .	240 „	NR
4478 ******)	285 „	
4480 . . .	286 „	
4481 *******)	286 „ . .	161
4484 . . .	287 „	
4486 ********)	288 „	
4487 . . .	334 „	NR
4489 . . .	334 „	NR
4490 . . .	335 „	NR
4492 . . .	335 „	NR
4494 . . .	336 „	
4496 . . .	336 „	
4509 . . .	384 „	
4511 . . .	430 „	NR
4513 . . .	430 „	NR
4515 . . .	431 „	
4516**********)	165 (XLVI)	
4520 . . .	432 (XL)	
4525 . . .	478 „	
4533 . . .	480 „	
4534 . . .	480 „	NR
4540 . . .	527 „	
4547 . . .	573 „	NR
4548 . . .	573 „	
4550 . . .	574 „	NR
4553**********)	574 „	

*) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.

**) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

***) Inlocueşte problema 4396 propusă la pag. 479, Vol. XXXVIII şi pe cel dela pag. 165, Vol. XLVI.

****) Inlocueşte problema 4452 propusă la pag. 190, Vol. XL.

*****) Inlocueşte problema 4464 dela pag. 240, Vol. XL. In tabla de materii a Vol. XLVI problema 4464 a fost trecută din eroare ca rezolvată în pag. 109, a acelui volum.

******) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

*******) Vezi erata din josul pag. 111.

********) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

*********) Inlocueşte problema 4516 dela pag. 431, Vol. XL.

**********) I s'a dat o soluţie la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota dela pag. 302. Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4557	575 (XL)	
4558	576 „	NR
4559	116 (XLI)	NR
4560 *)	116 „	
4561	116 „	NR
4564 **)	117 „	
4566	118 „	
4568	118 „	
4571	119 „	
4573	119 „	
4576	119 „	
4578	120 „	
4581	166 „	
4587	262 „	
4588	168 „	
4589	168 „	
4590	168 „	
4592	215 „	. . . 378
4593	215 „	
4596	215 „	NR
4598 ***)	216 „	NR
4601	216 „	
4603	262 „	NR
4607 ****)	263 „	
4613	264 „	
4614	264 „	NR
4615	310 „	NR
4618	311 „	
4620	311 „	
4621	311 „	. . . 140
4625	312 „	
4628	359 „	. . . 520
4630	359 „	NR
4631	359 „	
4633	359 „	
4634	360 „	
4636	360 „	
4637	360 „	
4638	360 „	
4639	406 „	. . . 34
4640	406 „	
4641	407 „	NR
4644	407 „	
4647	408 „	NR
4657	454 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4660	455 (XLI)	NR
4664	503 „	
4667 *****)	501 (XLV)	
4670	504 (XLI)	
4671	504 „	NR
4672	504 „	
4673	504 „	
4674	504 „	
4675	550 „	. . 35
4680	550 „	NR
4683	551 „	
4685 ******)	552 „	NR
4686	552 „	NR
4688	598 „	
4690	598 „	NR
4693	599 „	
4695	600 „	
4696	600 „	NR
4697	600 „	
4698	600 „	NR
4703	647 „	
4704	647 „	. . . 235
4705	647 „	
4706	647 „	
4710	648 „	NR
4717	55 (XLII)	
4720	56 „	
4722	56 „	
4723	110 „	. . . 328
4726	110 „	
4729	111 „	
4730	111 „	
4731 *******)	112 „	
4734	112 „	NR
4741	167 „	
4742	167 „	NR
4745	168 „	
4749	223 „	
4753	223 „	
4755	224 „	
4765	279 „	
4768	280 „	
4770	280 „	
4772	334 „	NR
4779	336 „	

*) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.

**) Vezi o soluție la pag. 412, Vol. XLI.

***) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.

****) Vezi erata pag. 312, Vol. XLI.

*****) Inlocuește problema 4667 propusă la pag. 503, Vol. XLI.

******) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.

*******) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4780	336 (XLII)	
4783	390 „	NR
4785	390 „	
4788*)	390 „	
4790	391 „	
4791	391 „	NR
4793	392 „	
4801	447 „	
4804	448 „	
4812	503 „	NR
4815	504 „	
4817	504 „	
4821	558 „	
4825	559 „	
4826	559 „	
4836	615 „	
4839**)	616 „	NR
4840	616 „	
4848	671 „	
4849	671 „	NR
4853	672 „	
4854	672 „	
4859	55 (XLIII)	NR
4866	56 „	
4870	110 „	
4872	111 „	. . 271
4879	166 „	NR
4880	166 „	
4889	168 „	
4890	168 „	. . . 175
4894	222 „	NR
4897	223 „	
4898	223 „	NR
4901	224 „	NR
4905	278 „	NR
4909	279 „	
4913	280 „	NR
4914 ***)	501 (XLV)	NR
4917	334 (XLIII)	
4920	334 „	
4922	335 „	NR
4923	335 „	
4928	390 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4929 ****)	390 (XLIII)	NR
4931	391 „	. . 80
4937	392 „	NR
4938	392 „	NR
4940	446 „	
4944	447 „	NR
4946	447 „	
4949	448 „	NR
4953 *****)	614 „	NR
4954	502 „	
4955	503 „	
4958	503 „	
4959	504 „	
4962	504 „	NR
4967	559 „	
4968	559 „	
4969	559 „	
4973	560 „	NR
4974	560 „	NR
4977	614 „	
4978	614 „	. . . 418
4979	615 „	. . . 141
4981	615 „	
4982	615 „	
4984	616 „	
4985	616 „	
4986	616 „	
4989	670 „	
4991 ******)	102 (XLVII)	
4992	671 (XLIII)	NR
4993	671 „	
4995	671 „	
4997	672 „	NR
5001	54 (XLIV)	
5002	54 „	
5003*******)	109 „	. . . 379
5006	55 „	
5009	55 „	NR
5010	56 „	NR
5012	56 „	
5013	56 „	
5016	109 „	
5020	110 „	

*) Problema rezolvată la pag. 611, Vol. XLII, este 4787, iar nu 4788. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

**) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

***) Inlocueşte problema 4914, propusă la pag. 280, Vol. XLIII.

****) Numărul problemei rezolvate la pag. 494 este 4926 iar nu 4929.

*****) I s'a modificat enunţul dela pag. 502, Vol. XLIII.

******) Inlocueşte problema 4991 propusă la pag. 670, Vol. XLVI. A se vedea şi erata dela pag. 152, Vol. XLVII.

*******) Inlocueşte problema 5003 dela pag. 54, Vol. XLIV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5021	110 (XLIV)	
5022	111 „	
5023	111 „	. . .141
5024	111 „	. . .474
5026	112 „	
5027	112 „	
5028	112 „	NR
5030	166 „	
5031	166 „	
5033	166 „	
5034	167 „	
5037	167 „	NR
5040	168 „	
5042	168 „	.274
5043	168 „	NR
5045 *)	222 „	NR
5046	222 „	
5047	222 „	
5049	222 „	
5051	223 „	
5052 **)	223 „	
5053	223 „	NR
5054	223 „	
5055	224 „	
5056	224 „	
5059	277 „	NR
5060	277 „	
5061 ***)	334 „	
5064	278 „	
5068	278 „	NR
5069	279 „	NR
5072	280 „	
5073 ****)	280 „	NR
5074	334 „	NR
5075 *****)	335 „	
5076	335 „	NR
5079	335 „	
5081	335 „	475
5082	335 „	
5085	336 „	NR
5086	336 „	
5091	390 „	
5092	390 „	
5093	390 „	
5094	391 „	NR
5095	391 (XLIV)	
5099	391 „	NR
5105	445 „	
5106	445 „	
5108	446 „	. . .477
5110	446 „	
5111	446 „	
5113	447 „	. . .142
5114	447 „	
5116	447 „	
5117	448 „	
5119	501 „	. . .85, 479
5121	501 „	
5123	501 „	NR
5125	502 „	. . . 38
5126	502 „	
5127	502 „	NR
5128	503 „	
5129	503 „	NR
5130	503 „	NR
5134	558 „	. . .277
5136	558 „	
5137	558 „	
5138	559 „	
5139	559 „	NR
5140	559 „	
5142	559 „	
5143	560 „	
5144	560 „	
5145	560 „	
5146	560 „	NR
5147	560 „	. . .381
5155	615 „	
5157	615 „	
5158	615 „	
5161	616 „	
5162 ******)	616 „	
5166 *******)	109 (XLV)	. . .143
5167	669 (XLIV)	
5168	669 „	. . .236
5169	670 „	
5170	670 „	
5171	670 „	
5172	670 „	
5173	671 „	

*) Vezi erata pag. 280, Vol. XLIV.

**) Vezi erata pag. 336, Vol. XLIV.

***) Inlocueşte problema propusă cu acelaşi număr la pag. 277, Vol. XLIV.

****) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.

*****) A se vedea erata pag. 3[illegible]9. Vol. XLIV.

******) Vezi erata pag. 672, Vol. XLIV.

*******) Rectificat enunţul dela pag. 669, Vol. XLIV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5174	671 (XLIV)	526
5176	671 „	
5177	672 „	
5178	672 „	NR
5179	672 „	
5181 *)	53 (XLV)	
5182	53 „	
5183	53 „	
5184	54 „	NR
5192	55 „	
5193	56 „	420
5194	56 „	278
5196	109 „	NR
5197 **)	110 „	
5200	110 „	NR
5203 ***)	669 „	
5204	111 „	NR
5205	111 „	
5206	111 „	
5208	112 „	281
5209	112 „	
5211	166 „	
5212	166 „	NR
5214	166 „	39
5216	167 „	
5217	167 „	
5219	168 „	566
5220	168 „	NR
5221	168 „	NR
5225	220 „	NR
5226	221 „	
5227	221 „	
5228	221 „	238
5230	221 „	NR
5231	222 „	88
5233	222 „	283
5234	222 „	
5236	223 „	
5242	278 „	
5244	278 „	
5246	278 „	
5247	279 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5248	279 (XLV)	NR
5249	279 „	
5250	279 „	
5252	280 „	
5253	280 „	NR
5254	280 „	
5255	280 „	144
5258	334 „	
5259 ****)	334 „	40
5260 *****)	557 (XLVI)	
5261	334 (XLV)	
5262 ******)	334 „	
5264	335 „	184
5267	335 „	
5268	336 „	421
5272	389 „	
5274	390 „	NR
5276	390 „	
5278	390 „	
5279	391 „	
5284	392 „	NR
5286	392 „	NR
5288	446 „	
5289	446 „	NR
5290	446 „	
5291	446 „	
5292	446 „	
5293 *******)	447 „	
5294	447 „	
5295	447 „	NR
5296	447 „	
5298	448 „	NR
5301	448 „	
5302	501 „	
5303	502 „	
5304	502 „	
5305	502 „	
5306	502 „	
5307	502 „	481
5308	503 „	41
5309	503 „	
5311	503 „	422

*) Vezi rectificarea numărului de ordine la pag. 112, Vol. XLV.

**) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

***) Inlocueşte problema 5203 propusă la pag. 111, Vol. XLV.

****) O soluţie a acestei probleme s'a publicat şi la pag. 660, Vol. XLV.

*****) Inlocueşte vechea problemă 5260 a cărei soluţie dela pag. 271, Vol. XLVI se anulează după cum se anulează şi noua problemă 5260, propusă la pag. 444, Vol. XLVI. A se vedea nota dela pag. 529, Vol. XLVI şi erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

******) Vezi erata pag. 392, Vol. XLV.

*******) Vezi erata pag. 560, Vol. XLV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5312	503 (XLV)	
5313	504 „	88
5316	504 „	90
5318	557 „	
5319	557 „	93
5320	557 „	
5321	557 „	
5322	558 „	
5324	558 „	
5325	558 „	
5326	558 „	
5327	559 „	
5328	559 „	42
5332	613 „	
5333	613 „	
5334	614 „	
5335	614 „	NR
5336	614 „	
5337	614 „	
5339	615 „	
5341	615 „	
5342	615 „	NR
5343	616 „	
5344	616 „	NR
5345	616 „	NR
5346	616 (XLVI)	93
5347*)	445 (XLV)	NR
5348	670 „	185
5349	670 „	NR
5350	670 „	43
5351	670 „	
5352	670 „	
5354	671 „	
5355	671 „	
5357	671 „	NR
5358	671 „	
5359 **)	672 „	656
5360	672 „	NR
5361	672 „	96
5363	53 (XLVI)	
5364	53 „	146
5365	54 „	330
5366	54 „	
5367	54 „	
5368	54 „	
5369	54 „	284

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5370	55 (XLVI)	NR
5371	55 „	
5372	55 „	99
5374	56 „	186
5376	56 „	NR
5379	110 „	
5380	110 „	
5381 ***)	110 „	
5382	110 „	NR
5383	111 „	NR
5384	111 „	
5386	111 „	334
5388	112 „	NR
5390	112 „	189
5391	112 „	
5392	165 „	
5393	165 „	423
5394	166 „	NR
5395	166 „	
5396	166 „	
5397	166 „	
5399	167 „	
5402	167 „	570
5403	168 „	425
5404	168 „	
5405	168 „	NR
5408	221 „	NR
5409	222 „	427
5410	222 „	
5411	222 „	NR
5412	222 „	
5413	222 „	
5414	223 „	47
5415	223 „	383
5416	223 „	
5417	223 „	49
5418	224 „	
5419	224 „	
5420	224 „	190
5421	224 „	NR
5422	578 „	NR
5423	278 „	
5424	278 „	192
5425	278 „	NR
5426 ****)	389 „	
5427	278 „	

*) Inlocueşte problema 5347, dela pag. 669 Vol. XLV. A se vedea nota din josul pag. 445 Vol. XLVI şi erata dela pag. 440, Vol. XLVII. Să se suprime nota cu două asterice dela pag. 695 Vol. XLVI.

**) Problema 5359 a fost rezolvată la pag. 656 Vol. XLVI. In tabla de materii a Vol. XLVI s'a trecut din eroare ca rezolvată la acea pagină problema 5358.

***) Vezi complectarea enunţului la pag. 248, Vol. XLVII.

****) Inlocueşte problema 5426 de la pag. 278, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5428	279 (XLVI)	100
5429	279 „	
5430	279 „	
5431	279 „	
5432	280 „	
5433	280 „	
5434	280 „	
5435	280 „	
5438	333 „	193
5439	334 „	429
5440	334 „	
5441	334 „	
5442	335 „	194
5443	335 „	
5444	335 „	384
5445	335 „	
5446	335 „	
5447	445 „	
5448	336 „	NR
5449	336 „	
5450	336 „	NR
5451	336 „	239
5452	389 „	240
5453	389 „	NR
5454	389 „	
5455	389 „	
5456	390 „	
5457	390 „	243
5458	390 „	
5459	391 „	
5460	391 „	NR
5461	391 „	NR
5462	391 „	NR
5463	392 „	NR
5464	392 „	
5465	392 „	NR
5466	392 „	NR
5467	445 „	
5468	445 „	
5469	445 „	286
5470	446 „	NR
5471	446 „	NR
5472	446 „	NR
5473	446 „	
5474	447 „	
5475 *)	502 „	
5476 **)	669 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5477	447 (XLVI)	
5478	447 „	
5479	448 „	NR
5480	448 „	50
5481	448 „	NR
5483	502 „	195
5484	503 „	NR
5485 ***)	503 „	
5486	503 „	337
5487	503 „	
5488	503 „	385
5489	503 „	
5490	503 „	NR
5491	504 „	
5492	504 „	
5493	504 „	
5494	504 „	
5495	504 „	572
5496	504 „	
5497	557 „	NR
5498	557 „	NR
5499	557 „	196
5500	558 „	
5501	558 „	527
5502	558 „	NR
5503	558 „	
5504	559 „	
5505	559 „	
5506	559 „	
5507	559 „	
5508	560 „	
5509	560 „	
5510	560 „	387
5511	560 „	431
5512	614 „	NR
5513	614 „	NR
5514	615 „	NR
5515	615 „	NR
5516	615 „	NR
5517	615 „	
5518	615 „	
5519	616 „	
5520	616 „	
5521 ****)	616 „	
5522	616 „	
5523 *****)	293 (XLVII)	
5524	616 (XLVI)	

*) Inlocueşte enunţul de la pag. 447, Vol. XLVI.

**) Inlocueşte problema de la pag. 447, Vol. XLVI.

***) Vezi erata de la pag. 560, Vol. XLVI.

****) A se vedea erata de la pag. 672, Vol. XLVI.

*****) Inlocueşte problema 5523, dela pag. 616, Vol. XLVI.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost* Propusă	Rezolvată
5525	616 (XLVI)	NR
5526	616 „	. . . 197
5527	664 „	
5528	669 „	NR
5529	670 „	. . . 529
5530	670 „	
5531	670 „	. . . 530
5532	670 „	
5533	670 „	
5534	670 „	
5535	671 „	
5536	671 „	
5537 *)	671 „	
5538	671 „	NR
5539	671 „	
5540	672 „	
5541	672 „	. . . 574
5542	54 (XLVII)	NR
5543	54 „	
5544	54 „	. . . 576
5545	54 „	
5546	54 „	NR
5547	55 „	
5548	55 „	NR
5549	55 „	
5550	55 „	
5551	55 „	
5552	55 „	NR
5553	56 „	
5554	56 „	
5555	56 „	. . . 337
5556	56 „	. . . 288
5557	102 „	. . . 290
5558	102 „	
5559	103 „	NR
5560	103 „	NR
5561	103 „	
5562	103 „	
5563 **)	103 „	
5564	103 „	NR
5565 ***)	150 „	
5566	104 „	
5567	104 „	
5568	104 „	NR
5569	150 „	. . . 340
5570	150 „	
5571	150 „	
5572	151 „	

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă	Rezolvată
5573	151 (XLVII)	
5574	151 „	
5575	151 „	
5576	151 „	NR
5577	152 „	
5578	152 „	NR
5579	152 „	NR
5580	199 „	NR
5581	199 „	
5582	199 „	NR
5583	199 „	NR
5584	199 „	
5585	199 „	
5586	200 „	
5587	200 „	
5588	200 „	NR
5589	200 „	
5590	200 „	. . . 579
5591	200 „	NR
5592	246 „	NR
5593	246 „	
5594	246 „	
5595	246 „	
5596	247 „	
5597	247 „	NR
5598	247 „	
5599	247 „	
5600	247 „	
5601	248 „	
5602	248 „	
5603	248 „	NR
5604	294 „	. . . 434
5605	294 „	
5606	294 „	
5607	204 „	NR
5608	294 „	NR
5609	295 „	
5610	295 „	
5611	295 „	NR
5612	295 „	NR
5613	295 „	. . . 531
5614	296 „	
5615	296 „	NR
5616	296 „	
5617	342 „	. . . 483
5618	342 „	
5619	342 „	
5620	342 „	NR

*) Vezi erata pag. 152, Vol. XLVII.

**) Vezi erata pag. 152, Vol. XLVII.

***) Inlocueşte enunţul dela pag. 101, Vol. XLVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5621	343 (XLVII)	NR
5622	343 „	
5623	343 „	
5624	343 „	
5625	343 „	
5626	344 „	
5627	344 „	
5628	344 „	
5629	344 „	NR
5630	389 „	
5631	390 „	NR
5632	390 „	
5633	390 „	NR
5934	390 „	NR
5635	391 „	NR
5636	391 „	NR
5637	391 „	
5638	392 „	
5639	392 „	
5640	392 „	NR
5641	392 „	
5642	438 „	
5643	438 „	
5644	438 „	
5645	438 „	NR
5646	439 „	
5647	439 „	NR
5648	439 „	
5649	439 „	
5650	439 „	NR
5651	440 „	NR
5652	440 „	NR
5653	440 „	
5654	486 „	581
5655	486 „	NR
5656	486 (XLVII)	NR
5657	486 „	
5658	486 „	NR
5659	486 „	
5660	487 „	
5661	487 „	NR
5662	487 „	NR
5663	488 „	
5664	488 „	NR
5665	488 „	NR
5666	488 „	NR
5667	533 „	NR
5668	533 „	NR
5669	533 „	
5670	534 „	NR
5671	534 „	NR
5672	534 „	NR
5673	534 „	NR
5674	535 „	
5675	535 „	NR
5676	535 „	NR
5677 *)	536 „	NR
5678	536 „	NR
5679	582 „	NR
5680	582 „	NR
5681	582 „	NR
5682	582 „	NR
5683	583 „	NR
5684	583 „	NR
5685	583 „	NR
5686	583 „	NR
5687	583 „	NR
5688	584 „	NR
5689	584 „	NR
5690	584 „	NR

I. EXERCIȚII **)

Aritmetica și Teoria numerelor . . . . . 1(53), 4(102), 5(150), 11(293), 21(533), 22(533).
Geometria . . . . . 2(53), 3(101), 8(245), 9(245), 10(245), 12(342), 15(389), 24(584)
Algebra . . . . . 6(198), 13(388), 14(389).
Trigonometrie . . . . . 7(245), 16(437), 17(437), 18(484), 19(485).
Geomeria analitică . . . 20(485), 23(584).

*) Vezi erata pag. 584.

**) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exercițiul al cărui număr precede paranteza.

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E., 7, 464
Abel H. N., 222, 373, 582.
Abramescu N., 6, 7, 24, 74, 78, 104, 134, 135, 150, 157, 161, 163, 212, 296, 325, 443, 535.
Abt A., 505.
Adam M., 173, 174, 526.
Adelhard de Bath, 29.
Alaci V., 7, 27, 32, 134, 267, 295, 321, 373, 409, 414, 458, 517, 562.
Alasia C., 417, 458, 518.
Aldea V. M., 42, 99, 239, 286, 477.
Aldea N. N., 7.
Aldea V. V., 99, 261.
Alexe C., 386.
Alexiu I., 6, 7.
Alimănescu T., 464.
Alt W., 135.
Amodeo Fr., 222.
Ampère A. M., 396, 562
Andonie Gh., 7.
Andonie S. I., 34, 99, 149, 190.
Andoyer H., 156.
Andreescu M. M., 194, 261.
Andreevici M., 286.
Andrievici N., 567.
Andrei Gh. A., 261, 383, 429.
Andrei M. C., 34, 196.
Andriescu I., 464.
Andronescu Pl., 7, 116, 304, 409, 499, 547.
Angelescu A., 21, 155, 157, 267, 325, 396.
Angelescu El., 374.
Angelescu I. N. Dr., 373.
Angheluţă Th., 6, 7, 27, 55, 134, 135, 212, 295, 321, 373, 409, 415, 416.
Antoniu Corn, 7.
Antoniu S. I., 5, 6, 7, 54, 486.
Appell P., 108, 124, 156, 305, 308.
Aprihăneanu I., 464.
Ardeleanu Gh., 530.
Arendt R. E., 261.
Arghiriade Em., 5, 7, 171, 175, 180.
Arieşan I., 504.
Armeanca I., 7, 154.
Aron I. Gh., 261.
Aron de Bistra P. P., Episcop, 500.
Asachi Gh. 73.
Avramescu A., 7, 29, 30.
Avramescu C., 7.

Bacaloglu E., 220, 563.
Bachiller R. T., 28.
Bäcklund, 268.
Bădărău E., 7.
Bădărău M., 135.
Badea A. I., 34, 149, 336, 337, 386.
Bădescu A. L., 7.
Bădescu R., 8, 27, 90, 92. 132, 171, 220, 310, 349,
Bădulescu P. N., 284.
Baidaff Ig B., 8, 134, 220.
Baillaud B, 156.
Bakonyi C. C., 42, 188 189, 192, 193, 195, 196, 286, 337, 386, 530, 574, 581.
Balaban I Gh., 324.
Bălan G. Şt., 8.
Balea I. I., 261.
Baltă C., 34.
Banciu I., 21, 441.
Barbilian D., 5, 8, 134, 175, 184, 314, 404, 467, 473.
Bărbulescu N., 221.
Bărcălescu D, 464.
Bărgăoanu G., 464.
Bărglăzan N. A., 321.
Barisien N. E., 441.
Bariţiu G., 503.
Bârlea-Suhăţeanu G. V., 190.
Baroni V., 156.
Barsucov N. A., 298.
Bârzescu M., 261, 395, 396.
Bârzu C. V., 84.
Basacov Gh., 103, 247, 438, 583.
Beiu-Paladi Gh. E., 477.
Belian R., 464.
Beneş P., 5, 6, 8, 394.
Berdan C., 136.
Berezenscaia S. E., 250.
Berwald L., 267.
Bernouilli, 566.
Bessel, 267, 321.
Bieberbach L., 71.
Bjerknes A. C., 222, 373.
Blanchard R., 321, 564.
Blăndu N. I., 373.
Blaschke W., 214.
Bochvar M., 135.
Bodnărescu M. D., 322.
Bodnărescu M. H., 34, 39, 42, 93, 189, 192, 194, 236, 239, 271, 334, 383, 386, 420, 474, 478, 482.
Bogdan Gr. Gh., 42, 186, 195, 261, 278, 396, 397, 475, 530.
Bogdanov I., 250.
Boian D. Em., 84.
Boiangiu D. D., 22, 93, 186, 281, 388, 377, 529, 570, 579, 581.
Bol G., 214.
Boldescu B. P., 364.
Borneanu G., 8.
Bosinceanu C., 530.
Botea G. Em., 6, 8, 213.
Botea G. N., 21, 549.
Botez Gh., 464.
Botez D. M., 149.
Botez St. M., 5, 6, 8, 27, 171.
Bouvaist R., 321.
Bouligand G. 564.
Bradis V., 299.
Brahy Ed., 395.
Brătila F., D-ra, 197, 527, 528.
Bratu Elena, 106, 107, 155, 156.
Bratu Gh., 21, 105, 106, 107, 108, 134, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 267.
Bratu N., 107.
Brener M. A., 8.
Brianchon, 64.
Brocard, 99, 293, 509, 510 570.
Broşteanu Gh. Gh., 93, 194, 195, 286, 334, 336, 337, 386, 483.
Bruckner V., 8
Bucşa G., 505.
Bucur N. G., 195, 337.
Bucurescu I. Cpt., 8.
Budeanu I. C., 8.
Buicliu Gh. G-l., 5, 6, 8, 25, 27, 43, 46, 49, 54,

102, 133, 150, 151, 200, 247, 268, 277, 296, 311, 312, 322, 325, 330, 334, 337, 343, 355, 378, 379, 391, 394, 411, 418, 439, 465, 467, 476, 509, 520, 535, 576, 579, 581, 583.
Bujoreanu N., 8
Bunescu D. A., 5, 8, 25, 409, 507, 536
Bungescu I. Lt.-Col., 8.
Bungeţeanu Preduţa, 21.
Buradescu T., 8.
Burghele C., 464.
Burileanu Şt. G-l., 9.
Burlă, 155.
Buşilă Ad., 9.
Buşilă D. C., 9.
Buşilă G. I., 7, 9, 24.
Butlewsky Z., 267.
Buzincu I. I. 93.
Buznea D. D., 47, 278.

Călin M. Gh., 174.
Camara S., 414.
Cambureanu V. D., 9.
Cambureanu V. V., 9.
Câmpan Florica, 220.
Camus M., 374.
Cantemir D. Dr., 73.
Cantor S., 250.
Capriel I., 9.
Căpriţă G. I., 261, 292.
Capşa Gr. 373.
Capşa N., 373.
Carafoli E., 9.
Caraman E., 9.
Carnot L., 166.
Cârstoiu I., 71.
Cartianu Gh., 9
Căruntu D. F., 42, 93, 193, 195, 261, 386, 530.
Cassian Gh. Col., 9.
Cătănescu Lt., 518.
Catelan, 415.
Cauchoy J., 135.
Cauchy A., 172.
Cavallaro G. V., 27.
Cazacu N. C., 9.
Cazanacli V. P., 9, 278, 483.
Cayley, 473.
Cernat V., 31.
Cesaro E., 252.
Cetăţeanu St., 34, 86, 87, 142, 144, 149, 185, 189, 278, 292, 342, 360, 480.
Ceva. 47, 63, 175, 271, 561.
Charpit, 347, 348.
Checian Ana, 77.
Chemale E., 464.
Chintescu M. M., 34, 42, 99, 190.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A., 9
Chirilă Ilie *), 505.
Chiş Gh., 154.
Chiselev A., 298.
Chiţulescu I. I., 6, 9, 394, 395, 396.
Chiţulescu I. Tr., 340.
Cioc M., 9.
Ciorănescu I. N., 10, 71, 418, 518.
Ciorapciu F. M., 10
Ciumaşu V., 261, 337, 340.
Claeyes A., 28.
Clain M. S., 502.
Claudian V., 10,
Clifford, 400.
Climescu, 156.
Cocea Gh. Th., 40, 41, 100, 141, 343.
Cohen, 351.
Columbeanu D. P., 261, 484.
Comberousse Gh. de, 161.
Comşa N., 499, 500.
Constantinescu I. E. 261, 396, 397.
Constantinescu Gh. Ing. 10.
Constantinescu Gh. Prof., 358, 359, 454.
Constantinescu Gh. Gh., 5, 6, 10, 172, 247, 249, 294, 413, 554, 563, 566, 584.
Constantinescu T., 10.
Constantinescu Z., 10.
Corâci I. C., 194.
Coriolis, 388.
Cornăţeanu I. A., 238, 277.
Coroianu D., 503.
Corolcov A., 250.
Corpaciu I. A., 71.
Coşereanu I., 10, 32.
Coşniţă C., 71, 235.
Coşniţă V., 32.
Costăchescu V. C. Cpt., 10.
Costescu Gh. I., 388.
Costinescu C., 10
Cotariu D. M., 340, 437, 458, 579.
Cothiger S. J., 34.
Couder, 153.
Covaci I., 504.
Crăciuneanu C. Cpt., 10.
Cramer, 218.
Crăciunescu I. Mioara, 192.
Crelle, 397.
Cremona, 397, 399.
Cristea I. C., 479.
Cristescu M. P., 149.
Cristescu V., 34, 189.
Cristoceanu I., 503.
Crivăţ Th., 30.
Cruceru Gh. C., 34, 42, 149, 190, 196, 262, 340, 422 429, 529. 579, 581.
Culianu Al. 156.

Darboux G., 156.
Dăscălescu Hr., 10.
Dăscălescu I., 464.
Deac C. C. 579.
Deac I., 437.
Deaux R., 27, 28, 321,
Deruits, 458.
Desargues, 72.
Denker A. E., 135.
Diaconescu V. C., 261, 396,
Diaconescu C. N., 337.
Diaz G., 321.
Dimitriu C. I., 34, 430.
Dinescu P. Al., 10.
Diocles, 461.
Diophante, 73.
Dirichlet H., 416, 455, 456, 457.
Dobrescu A., 10, 451.
Dobrescu V. E., 261.
Dobrescu P. P., 338, 360.
Domşa C. F., 506.
Donciu N., 10.
Drăgan M., 220.
Drăgea G., 503.
Drăghicescu P. I., 249.
Drăghicescu P. P., 34, 38, 39, 40, 42, 46, 49. 77, 88, 93, 99, 100, 167, 185, 186, 188, 190, 192, 193,

*) Acelaşi cu *Faur*.

194, 195, 197, 198, 236, 239, 243, 244, 245, 261, 271, 277, 281, 282, 283, 284, 292, 311, 316, 328, 329, 335, 337, 340, 357, 380, 384, 385, 390, 395, 397, 421, 422, 423, 424, 426, 527, 428, 474, 475, 477, 478, 482, 506, 507, 526, 530, 553, 571, 579, 581.
Drăghici Gh. M., 93.
Drăgoiu I., 192, 194.
Dragomir E. A., 194.
Dragomirescu-Buzne Ed. Cpt., 10.
Drosescu Gh. I., 10.
Duhem P., 414.
Dumitrescu Cezar, 34, 149, 190.
Dumitrescu A. D., 11.
Dumitrescu F. Dan, 23, 261, 337.
Dumitrescu I. Gh., 5, 6, 11, 417, 464.
Dumitrescu Gh., 337.
Dumitrescu C. I., 11.
Dürer Alb, 222.

Eckstein V, 141, 245.
Eddington, 564.
Efremov A. V., 297, 298, 299.
Eftimie D. C., 34, 42, 49, 50, 93, 99, 188, 189, 192, 193, 195, 197, 240, 278, 287, 288, 337, 380, 383, 387, 421, 431, 483, 554, 573, 574.
Eftimiu D. C., 136.
Einstein A., 178, 314.
Elias T. P., 194.
Emanuel D., 267.
Emde Fr., 498.
Enescu D. D., 475.
Enulescu O, 465.
Ermin Ad., 383.
Escardos L., 28.
Euclide, 24, 29, 30, 395.
Euler, 39, 60, 63, 247, 272, 274, 325, 353, 378, 379, 395, 402, 403, 404, 511, 513, 516, 551.

F. G. M., 397, 458, 475, 536.
F. J. 536.
Fânaru N. D., 261.
Faur *), 504.
Felbinger, 502.
Felix C. G-l., 11.
Fermat, 28, 63, 127, 350, 515, 516.
Feuerbach, 162, 378, 535.
Fibonacci, 519.
Filipescu Em. Gh, 21, 395, 396.
Fitz-Patrik J., 143, 397.
Florescu B. I. 69, 167, 199, 343, 358, 359, 457, 465, 467, 513, 518, 519, 520, 534, 557, 582.
Florescu M. U., 11.
Florescu L. V., 34, 53, 99, 272, 336, 421.
Floreşteanu D. Al., 261, 396, 397.
Florian Z., 11.
Focşeneanu I. M. Căp., 6, 11, 213, 282, 325, 343, 378, 379, 380, 384, 385, 425, 427.
Fotino S., 71.
Fourier, 71, 135.
Fraile A., 321.
Francotte R., 27.
Frégier, 514.
Frenet 303.
Franke, 325.
Friedman I. B., 192.
Fundăţeanu C. I., 21.

Gabrielescu R., 11.
Gagnus V. R., 297.
Galu Gh. N., 438, 445, 457
Gâlcă I. T., 11.
Galbrun F, 564.
Galileo Galilei, 222, 458, 563.
Gâţă G. G., 261.
Gauss, 134, 170, 494, 537.
Gautier-Villars, 564.
Georgescu A. C, 464.
Georgescu D., 233.
Georgescu I. N., 11.
Georgescu N. N., 11.
Georgescu Răducanu, 266.
Georgescu-Roegen N., 11.
Georgescu-Roegen Otilia, 6, 11, 394.
Georgescu-Val N., 11,
Gergonne, 59, 60.
Gericke H., 71.
Géromo, 293.
Gheorghieş Al. G-l., 11.
Gheorghiev G., 220.
Gheorghiu C. Ad., 5, 11, 55, 200, 321, 394.
Gheorghiu Al., 11.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 6, 12, 27, 29, 43, 55, 93, 100, 104, 128, 129, 151, 173, 174, 175, 200, 274, 277, 278, 281, 312, 394, 397, 414, 439, 449.
Gheorghiu S. I., 12.
Gheorghiu A. M, 12
Gheorghiu Marius, 337.
Gheorghiu E. Oct., 90, 93, 99, 190, 192, 284, 337, 342, 381, 386, 423, 475, 477, 484, 530.
Gheorghiu A. Ş., 12, 55, 102, 103, 151, 257, 325, 327, 328, 342, 383, 391, 414, 440, 488, 511, 535, 583.
Ghermănescu M., 5, 6, 12, 27, 56, 104, 134, 135, 151, 248, 294, 305, 306, 307, 308, 321, 390. 414, 440, 486, 526, 530, 531, 534, 572, 573.
Ghermani D., 12, 71.
Ghica Al., 322.
Ghimuş D. A. Lt.-Col., 12.
Ghiolu S., 465.
Ghircoiaşu V. N., 12.
Ghişoiu I. P., 12.
Ghiţă M. V., 261, 397.
Ghiţescu A. M, 587.
Ghiţescu V., 5, 6, 12, 55, 96, 99, 101, 133, 188, 213, 485, 487, 559, 582.
Gilon, 153.
Ginglan T. D., 34, 149.
Gligor N. I., 34, 42, 190.
Gloden A., 438, 512, 564.
Göbl F., 473.
Godeaux L., 267.

*) Acelaşi cu *Chirilă Ilie.*

Gonzales G. I., 134.
Goormaghtigh R., 28, 321, 552.
Gorciu Gh. V., 12, 394.
Goursat E., 156.
Graf U., 71.
Grama Al., 505.
Grecianu J. de, 373.
Grigorescu C., 12.
Grumăzescu M. S-Lt., 99, 185, 300, 526.
Gurviţ O. I., 297.
Gutnic, 153.
Gutschove, 27.
Guţu I. A., 12, 71.
Guţu I. I., 12.
Guţu V., 12.

Haag J., 129.
Hadamard J., 564.
Hahn W., 71.
Halunga Em., 171.
Hamburger I., 465.
Hamel G., 71.
Hamilton J. N., 407.
Hanganu D. M., 12.
Haret C. Sp., 222, 373, 518.
Helshhami Clusisimi, 374.
Hermann, 564.
Hilbert, 171.
Hofmann Josepha 135.
Hofmann C. J., 71, 135.
Hofman G. J., 72.
Holdea L. R., 149.
Holea L. R., 193.
Hospital, 64, 388, 389, 415.
Hospital, marchiza, 415.
Hossu I., 505
Hostinsky B., 267.
Hristescu A., 465.
Hulubei H., 135.
Humbert P., 267.
Hurmuzescu Dr., 563.
Huygens, 345.

Iacob Caius, 72, 171, 267.
Iacob St E. Cpt., 533.
Iacob P. P., 501.
Iacomi D. M., 185.
Iacomi M. M., 340, 581.
Iancovici T., 503.
Ianculescu S. Oct., 139.
Ianculescu R., 12.
Ibanez C., 321.
Ieşan Şt. Al., 261, 340, 395, 397.
Iglisch R., 71.
Iliescu Gh., 5, 13, 393, 394.
Iliovici G. C., 322, 517.
Inculeţ I. I., 240.
Ioachimescu Gh. A., 13, 222, 233, 312, 396, 397.
Ioachimescu A. Gh., 13.
Ioanovici A., 13.
Ion A. Ilie, 271.
Ionescu Bogdan, 323.
Ionescu C., 149.
Ionescu V. D., 6, 13, 204, 256, 267, 487.
Ionescu P. H., 6, 13, 84.
Ionescu Ion, 5, 6, 13, 24, 25, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 54, 72, 73, 85, 87, 102, 127, 129 135, 136, 138, 150, 171, 199, 213, 220, 221, 222, 240, 246, 250, 268, 290, 292, 294, 300, 311, 322, 323, 328, 340, 341, 342, 359, 360, 373, 390, 393, 394, 395, 396, 397, 417, 434, 438, 458, 479, 481, 483, 486, 507, 512, 518, 533, 562, 564, 579, 581, 582.
Ionescu Marieta, 261.
Ionescu I. Paul, 13.
Ionescu Tib., 13.
Ionescu V. Th., 135.
Ionescu-Bujor C., 5, 6, 13, 65, 213, 394, 452.
Ionescu-Ţiu D. C. Cpt., 5, 6, 13.
Ionescu-Zane D. Gh., 13.
Iorga N., 267, 563.
Iorgulescu N. F., 34, 42, 190, 193.
Isac Gr. Em., 197.
Istrati C. Dr., 562.
Istrati C. Lt-C-dor, 13, 465.
Iunge G., 71.
Ivan C. Z., 337, 482.

J. G. R., 321.
J. M. T. M., 28.
Jareghie V. I., 381, 477.
Jiletcovici G. Al., 386.
Joachimsthal F., 134, 385.
Josepha, 135.
Juan J., 28.
Jucowski E. N., 263.
Jung F., 494, 546, 547.
Juvet G., 564.

Kantz G., 71.
Kanz G., 135.
Kariya, 324.
Karsai I., 505.
Kaufmann N., 13, 323.
Kaufmann Seb., 465, 565.
Kepler, 122.
Kirilov Gh., 562.
Klompers Th., 395.
Klose A., 71.
Kneschke A., 71.
Koenigs G., 135, 305.
Krannich I., 25.
Kummer, 71.

La Montre, 415.
Lagrange C. J., 134, 348, 572, 573.
Laguerre, 399.
Lalane G., 562.
Lalescu Tr., 99, 156, 167 378, 379.
Lambert G., 28, 321.
Lamoth P., 13.
Laplace P. S., 28.
Laplaza A. S., 322.
Lascu Bal, 13, 34, 385.
Lauricella, 135.
Lazăr Gh., 28.
Lăzărescu D., 417.
Lazarini, 28.
Lazariu I. G., 73.
Lazu C., 13.
Le Paige, 458.
Lebesgue H., 172, 173, 415, 416.
Leemans J., 28, 321.
Leibniz G. G., 415
Leibovici S., 381.
Lemoine E., 509.
Lenin I. V., 297.
Leonida D., 14.
Linteş G. I. C-dor, 5, 14, 25, 31, 55, 103, 122, 127, 134, 135, 143, 144, 145, 146, 149, 150, 160, 165, 186, 192, 196, 199, 215, 239, 240, 246, 263, 264, 267, 286, 287, 294, 311, 362, 394, 414, 427, 429, 430, 529, 533, 554, 582.
Liouville, 135, 181.
Liteanu D., 465.
Liteanu I. Gh. G-l, 5, 14, 33. 312, 394, 420, 421.
Livada F. Gr., 14.

Lochell*) R., 295, 531.
Longchamps G., 441
Longley W., 395.
Lorent H., 28.
Lucas Ed., 127, 135, 143, 350, 360.
Luckey P., 72.
Lugojanu I., 504.
Lupa N. A., 340.

Magnickij F. L., 28.
Maior Gr., 501.
Malaxa C. Elena, 14.
Malaxa N., 14, 156.
Malcoci C., 14.
Manafu V., 14.
Mănescu, Prof., 156.
Mănescu Gh. I., 261, 396.
Mănescu M., 321.
Mang Ileana, 77.
Mangeron I. D., 212, 261.
Manoil E. Col., 340, 360.
Manoilescu M., 14.
Manolache M., 484.
Manoliu V., 530.
Mansion P., 31.
Mărăcine B., 14.
Marcu N., 503.
Mărculescu Origen, 84.
Mărculeţ I., 504.
Mareş T., 14.
Mărgărit I. N., 262.
Marian V, 6, 14, 29, 322, 395, 415, 416, 506, 518, 563.
Marinescu N., 465.
Markoff, 172, 414.
Martac V. R., 24.
Marteş V. Gr., 194, 277.
Mateescu A., 292, 340.
Mateescu Cr., 14.
Matei D. D., 526.
Mavrodin D. D., 328, 330.
Mayer O., 465.
Melas P., 465.
Melchior C., 135.
Menelaus, 58, 73, 483, 561.
Mercator, 71.
Mereuţă E., 14, 189, 190, 284, 286, 395.
Mereuţă V., 14.
Merten A., 31.
Metea Virg., 452.
Michel Ch., 336, 385.
Miclescu A. Cpt., 14.
Micu A., 504.
Micu M. I., 504.
Mihăescu S. Şt., 378, 535.
Mihail I. G., 34, 149, 190.
Mihăileanu N. N., 5, 6, 14, 28, 34, 39, 49, 88, 140, 142, 194, 214, 222, 268, 270, 321, 325, 334, 392, 395, 441, 559.
Mihăilescu C. C., 93, 337.
Mihailescu I. St., 261.
Mihalcu I. I., 261, 292.
Mihalopol C., 14.
Mihoc Gh, 15, 172, 414.
Mihu C., 15, 88, 90, 184, 185, 238, 239, 438, 475.
Milea C. C., 42, 93, 195, 337.
Minea I., 105.
Miquel, 88, 325, 326, 327, 384, 385, 400.
Mircea M. E., 15.
Mircea C. M., 340.
Mircea L. Mircea, 567.
Mirescu D., 30.
Mirescu P., 15.
Miroslav St. T., 261, 479.
Mişicu V. M., 340.
Mitescu C., 15.
Mititelu C. Cl., 15.
Mititelu C. I., 15.
Mittman D., 135.
Mittmann O., 71.
Miu M. I., 15, 199
Modâlcă S. Em., 34, 42, 90, 93, 185, 186, 188, 192, 194, 197, 278, 287, 337, 344, 383, 387, 422, 431, 476, 554, 561.
Moessner A., 130, 164, 315.
Moisil C. Gr., 71, 135, 172, 220, 268.
Moivre, 64.
Moldovan S., 503.
Mongé, 222.
Montel P., 106, 416.
Morţun Gh. Em., 15, 583.
Moscovici N. E., 99.
Moscovici E. N., 197, 337.
Müller G, 518.
Munteanu G., 504.
Munteanu P Vl., 261.
Musceleanu S. Doru, 193, 261, 286, 484.
Musceleanu I., 397.
Musceleanu Vinicius, 193, 261.
Myller A., 208, 209, 210, 252, 257.

Nache D. D., 237, 261.
Nagel, 550, 551.
Năsturaş D., 31.
Neamţu P., 15.
Negre I., 73.
Negrea A. L. M., 34, 42, 90, 99, 174, 189, 192, 197, 281, 337, 386, 567, 571.
Negrescu C. I., 34, 190, 194, 243, 287.
Negru N., 465.
Negruţiu F. I., 503.
Negruţiu F. N., 506.
Negură Gr. St., 15
Nestor G. D., 15.
Neuberg J., 31, 73, 161, 321, 441.
Newton Isac, 329, 395, 518, 562.
Nichifor A. G., 15, 73.
Nicolau Al., 15.
Nicolau Gr. C., 42, 193.
Nicolau H. C., 15.
Nicolau C. Lucilius, 193.
Nicolau T. M., 15.
Nicolescu I. R., 15.
Niculescu V. Al., 5, 6, 15, 166, 294, 452.
Niculescu Cr., 15.
Niculescu G., 465.
Niculescu C. Mircea, 190, 192, 194, 278, 283, 285, 386, 421.
Niculescu Miron, 15, 135.
Niewenglowski A., 395.
Nimbus, 239.
Nistor I., 149.
Niuton, 298.

Oblath R., 322.
Onicescu O., 6, 16, 29, 127, 172, 414.
Oprea D. G., 261, 340, 579.
Orănescu O., 16, 139, 140, 358, 359, 418, 520, 526.
Orăşanu D. C., 16.
Orăscu Al., 72.

*) Pseudonimul lui *Rolle M.*

Orăşeanu Gr., 16.
Oteteleşanu Şerb., 343, 391.
Ozanam, 417.

Painlevé P., 156.
Panaitescu Sc., 21.
Pantazi Al., 5, 6, 16, 135, 171, 394, 458, 465.
Pantelimon V. C., 34, 39, 40, 42, 90, 93, 99, 190, 192, 194, 199, 236, 246, 272, 278, 281, 337, 360, 365, 380, 421, 473, 482, 504, 570.
Pântescu C, 475.
Papadopol D. Elena, 281.
Papelier G., 205, 206.
Pappus, 201. 203, 252.
Parent A., 415.
Pârvu A., 16.
Păsărică Fl., 5, 6, 16.
Pascal, 64, 321, 441, 442, 445, 581.
Pascaru I. C., 381, 477.
Pasch M., 564.
Patriciu G. T., 21.
Păun G., 465.
Pavel Dorin, 16, 414.
Pavel N., 392.
Pavica V., 261, 397.
Perieţeanu D., 374, 465. 552.
Perlea G. D., 16.
Persu A., 16.
Petrescu V. Achille, 84, 86, 87, 381.
Petrescu Al. Al., 278.
Petrescu N. Elizeu, 579.
Petrescu R. G., 93, 185.
Petrescu S. Gh., 16.
Petrescu Iulian, 22, 23, 38, 39, 53, 60, 93, 102, 144, 168, 247, 278, 285, 318, 354, 430, 477, 482, 488.
Petrescu P. Lt.-Col., 16.
Petrescu Pietraru A., 172.
Petrovanu D. G-l, 583
Philipide M., 16.
Picard E., 108, 156, 322, 415, 416.
Picard Sophie, 267.
Pintelescu V. 418.
Pintilie I. I., 42, 193, 483.
Pitagora, 28, 86, 321, 340, 341.
Pitiş L N,, 261.
Poienaru P., 28.
Poincaré H., 171.
Polya G., 413, 457.
Pompeiu D., 29, 108, 153, 172, 267, 268, 321, 413, 414, 563.
Poncelet, 335.
Pop Şt., 504.
Popa N. A., 93, 192, 195, 261, 278, 334, 380, 395, 397, 474, 484, 526, 530.
Popa Marcel, 286.
Popa D. M., 22, 23, 39, 40, 41, 42, 88, 89, 92, 93, 103, 145, 192, 235, 236, 239, 243, 271, 275, 286. 328, 380, 386, 420, 421, 477, 482, 526, 562, 567, 571.
Popa N. N., 425.
Popa T., 261, 396, 397.
Popescu Fl., 34, 99, 189, 194, 386.
Popescu I. Gh. G-l, 167.
Popescu I., 21.
Popescu C. I., 34, 284.
Popescu M. I. Cpt., 16.
Popescu Gh. M., 34, 47, 49, 190, 197, 261, 271, 284, 337, 340, 386, 430, 530.
Popescu Victor, 17.
Popescu-Botoşani Gh, 17, 152, 199.
Popescu-Zorica N. Al., 141.
Popişca V. M., 149, 193.
Popov I., 250.
Popova C. N., 300.
Popova S., 250.
Popovăţ P., 220.
Popovici C. Prof., 220, 322.
Popovici C. C., 268.
Popoviciu Gab., 34.
Popoviciu Tib., 6, 17, 128, 172, 267, 268, 325, 394, 413, 414, 429, 431, 486, 536, 582.
Popp N. C-dor, 17.
Popp L. V., 503
Popp Tr. 17, 395.
Portocală M., 17, 73, 373, 374.
Pöschl, 395.
Potopeanu Gh. G-l, 17.
Praporgescu N., 17.
Predoescu-Ţânţăreni Tr., 141.
Prin, 153.
Pringsheim, 128, 129.
Procopovici Al., 267.
Profiri N., 204.
Protopopescu E., 418.
Protopopescu Gr. Col., 17.
Provinceanu M., 17.
Ptolomeu, 63, 166.
Puchiu T. Gh., 42, 193, 195, 261, 337, 530.
Puiu P., 73.
Pumnul Aron, 504.
Puşcariu Sextil, 267.

Quade W., 135.

Racliş N., 71.
Radoslav Gh. I, 149, 284, 426.
Radu S., 154.
Raduan B. F., 322.
Rădulescu Gh. Oct., 272, 513.
Rădulescu I. M., 17.
Rădulescu Th., 337.
Raica S. V., 149.
Rallet, 156.
Raţiu I., 500.
Raţiu V., 503.
Reinhorn M., 418.
Remond de Montmort P., 415
Retali V., 325.
Revici T., 17.
Ribchin N, 297, 298, 299.
Riccati, 413, 440, 563.
Riemann, 171, 268, 322.
Ringleb F., 71.
Ripianu D,, 92, 171, 277, 476, 567.
Riquier M., 373.
Rizescu Gh., 174.
Roeser E., 71.
Rohr I. A., 42, 84, 236, 278, 281, 526.
Rolle*) M, 295, 415, 531, 563.
Romanescu C., 278.
Romaşcan G. Georgeta, 24.

*) Vezi *Lochell R.*

Roşca R., 268.
Roşculeţ N. M., 321.
Rossignol, 564.
Roşu Al. Al., 5, 6, 17, 357.
Roşu T. N., 261.
Roşu V., 17,
Rouché E., 161.
Rusu L. M., 77, 88, 93, 192, 193, 194, 247, 284, 334.
Ruzvan I. T., 17.

S. G. F., 564.
Săbăreanu Gh., 286.
Sabio E. A., 321.
Sager N. I., 328.
Şaichin O. A., 278.
Sălăgeanu A. 17.
Saligny M. 17.
Sandu Gh. I., 286.
Săndulache C., 193.
Sapoşnicov A. N., 298.
Săpunaru S. Gh., 17.
Sarian M., 18.
Săruleşteanu I. E., 93.
Saurin, 563.
Savin C. I. Lt., 18, 389.
Sbârnea D. Gh., 34, 42, 88, 99, 190, 193, 194, 262, 337, 386, 478, 579.
Schileru-Dili C. I., 18.
Schwarz A., 465.
Schwartzi M., 374.
Schwartz, 71, 170, 171.
Segal J., 34, 84, 99, 133.
Segârceanu N., 562.
Şelbulescu A. C., 334.
Seni Cl., 340, 579.
Şerban C. C., 194.
Şerban A. T., 77, 79, 90, 92, 142, 193, 194, 213, 278, 286, 336, 381, 383, 421, 475, 567.
Şerban-Ulmeni D., 520.
Şerbănescu Gh. V., 18.
Şerbănescu I. V., 261.
Sergescu B., 18.
Sergescu P., 6, 18, 28, 29, 72, 73, 108, 117, 127, 134, 158, 195, 197, 267, 295, 373, 414, 415, 416, 458, 527, 528, 531, 563.
Servois C., 73.
Sfinţescu I. C., 18.
Silaş G., 238.
Simionescu D. G., 5, 6, 18, 104, 151, 171, 194, 200, 207, 236, 248, 264, 274, 283, 321, 324, 325, 364, 381, 386, 392, 394, 421, 423, 475, 479, 481, 487, 558, 566.
Simionescu M., 18.
Simpson, 102, 152.
Simson T., 55, 152, 167, 215, 216, 217, 273, 274, 282, 327, 379.
Şincai Gh., 502.
Sispanov S., 127, 134.
Şleahtenea D., 18.
Smântânescu A., 18.
Smith E. D., 134.
Smith P., 395.
Solomon P., 504.
Sotirescu N., 337, 385.
Spielrein J., 490.
Staicu I. C., 34, 193, 261, 284, 340, 424.
Stamate I. I., 278, 295, 344, 421, 486, 511, 512, 517.
Stamatescu I. G., 18.
Stamatescu I., 18.
Stan I. A. Cpt., 18.
Stan A. D., 18, 24.
Stancu S. Marin, 18.
Stancu S. Mircea, 18.
Stănculescu M., 50, 52, 78, 94, 483.
Ştefan C. T.*), 278, 570.
Ştefănescu D. N., 18, 325.
Ştefănescu-Goangă A., 19.
Ştefanovici I. M., 34, 189.
Steiner, 59.
Stern E., 27.
Stewart. 63.
Stihi E., 414.
Stockes, 546.
Stoenescu I. Al., 6, 19, 50, 53, 56, 67, 71, 78, 80, 93, 96, 126, 213, 248, 288, 290, 344, 360, 392, 394, 397, 431, 434, 440, 498, 554, 574, 576, 584.
Stoenescu D. Mirel, 34, 39, 142, 189, 192, 238, 286, 336, 337, 385, 477, 578.
Stoian G., 504.
Stoian I., 504.
Stoianovici G., 340.
Stoianovici I. Ş., 189, 261, 529, 579.
Stoica V. D., 19, 24, 72, 357, 395, 396, 397, 418, 420, 507, 556.
Stoicescu I. T., 19, 42.
Stoika V. V., 19.
Stoilov S., 172, 322.
Streder G. I., 272.
Suciu V., 506.
Sudan G., 135.
Szegö G., 413, 457.
Szymansky P., 267.

Tailer N., 465.
Tănăsescu M. A. G-l, 19.
Tănăsescu A. T., 19.
Tarczewski A., 531.
Tarewski A., 340.
Taylor, 491, 511.
Teodoreanu V., 19.
Teodorescu C. C., 6, 19, 26, 136, 296, 395.
Teodorescu St. I., 152, 295, 334.
Teodorescu N., 172, 268.
Teodorescu V. N., 19.
Thébault V., 27. 28, 33, 34, 103, 150, 161, 246, 378, 439, 441, 475, 511, 533, 552, 579.
Théodore de Tripoli, 73.
Theodorescu N., 71, 135.
Theodoru H., 19.
Thierrin H. G., 19.
Thomson S., 214.
Ţicudi V. E., 503.
Tilică C. Şt.*), 99, 189, 530.
Ţino N. O., 5, 6, 19, 27, 56, 72, 171, 245, 267, 373, 394, 441, 458, 486, 507, 584.
Ţintea M. I., 19.
Ţiţeica Gabriela, 5, 6, 19, 56, 152, 190, 192, 200, 213, 337, 339, 344, 357, 387, 388, 394, 452, 488, 581.
Ţiţeica George, 21, 28, 29, 134, 157, 173, 220, 311, 312, 324, 394, 397, 416.
Ţiţeica G. R., 5, 6, 19, 29, 395.

*) Acelaşi cu *Tilică C. Ştefan.*
**) Acelaşi cu *Ştefan C. T.*

Ţiţeica Şerban, 5, 6, 19, 395.
Toepken H., 71.
Tomescu Şt. I., 20.
Trefilov I. M., 42, 88, 93, 142, 184, 190, 236, 286, 336, 421, 475, 478, 482.
Triandafil A., 418.
Trofim I. P., 55.
Tudoran M. Lydia, 34, 46, 146, 149, 186, 190, 341, 360, 434, 579.
Tudoran P., 418.
Tuhai N., 31.
Tullea C. Gh., 19.
Turcu R. S., 526.
Turculeţ D. T., 193, 261, 484, 529.

Ulescu A., 20.
Unkelbach H., 71,

Văduva Fl M., 42, 50, 428.
Vâlcovici V., 20, 234, 235.
Valţov C. N., 298.
Van Aubel, 245.
Van der Waals, 221.
Vandermonde, 177, 321.
Vardala I., 20.
Varignon, 580.
Vasilache I., 20.
Vasilescu Alexandra, 37.
Vasilescu Fl., 459.
Vasilescu C. Gr. 20.
Vasilescu C. I., 20.
Vasilescu I. T., 20.
Vasilescu-Karpen N., 458, 563.
Vasilescu-Stabu A. M., 37, 84, 141, 236, 272, 274, 278, 474, 475, 478, 526, 533, 534.
Vasiliu A., 329.
Vasiliu G. Dan, 20.
Vasiliu G. D-tru, 190, 261, 337, 529, 530.
Vasiliu C. E., 20.
Vasiliu D. Gh., 20.
Vasiliu C. I., 20, 103, 293, 356, 391, 422, 455, 465, 570.
Vasiliu M., 20, 395, 465.
Velea M., 437, 484.
Velescu I., 269.
Velicescu N. N., 474.
Ver Eecke P., 73.
Vescan T. T., 20.
Viciu A. A., 20.
Viciu E., 505.
Vijelie Gh., 34, 42, 43, 99, 189, 194, 286, 337, 477, 482, 526.
Vişa E., 220, 321, 388, 389, 562.
Vişoianu C., 465.
Vlasa G., 505.
Vogel D., 465.
Voicu D. Gh., 190, 286, 337.
Voinea P. R., 34, 49, 190, 192, 193, 196, 200, 246, 286, 290, 336, 337, 340, 388, 529. 560, 579.
Voronca St., 465.
Vrânceanu G., 28, 29, 171, 268.
Vuibert H., 99, 151, 564.

Wallis, 132.
Wegener P. E., 439, 526.
Weiss P., 322.
Weltner R., 577.
Wilczynski, 181, 183.
Wilson, 63,
Wittenbauer, 395.
Woinarovski R., 20.

Zacharias M., 72.
Zaharia Gh., 190.
Zamfir C. I., 190.
Zamfirescu C. Gr., 21, 459.
Zamfirescu G. I. Cpt., 21, 80, 186, 342,
Zapan Gh., 6, 21, 465.
Zapan Gr. C-dor, 5, 6, 21, 246, 390, 395, 439, 465.
Zapan M., 465
Zeiss, 153.
Zlatcu St. C., 21.

K. LUCRĂRI CITATE *)

1. Cărţi, Lucrări extrase, Teze

		Pag.
N. Abramescu	Algebra superioară	24
N. Abramescu	Lecţiuni de geometrie analitică. .	74, 161, 212, 443
A. Abt	Fizica	505
A. Angelescu	Lecţiuni de calcul diferenţial	155, 396
T. Angheluţă	Curs de algebră	212
P. Appel	Précis de mécanique rationnelle	124
P. Appel	Mécanique	305, 308
D. Barbilian	Untersuchungen über die Cliffordischen Ketten	473
E. S. Berezenscaia. . .	Culegere de probleme şi exerciţii de aritmetică	250
W. Blasche şi G. Bol. .	Geometrie der Gewebe	214
I. Bogdanov, Ş. Cantor, A. Corolcov	Culegere de probleme de aritmetică.	250

*) In acest capitol nu sunt trecute lucrările citate în *Bibliografie* şi în *Diverse*: Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică*.

		Pag.
G. Bouligand	Géometrie vectonelle	564
V. Bradiş	Table matematice de patru cifre	299
Ed. Brahy	Exercices méthodiques de calcul différentiel	395
Gh. Bratu	Calcul integral	155
Gh. Bratu	Curs de astronomie	155
Gh. Bratu	Matematici generale	155
E. Cesaro	Vorlesungen über natürliche Geometrie	252
I. Chirilă	Fizica poporală	505
A. Chiselev	Algebra	298
I. Chiţulescu	Chaosul	395, 396
I. Chiţulescu	Skiagrafometria	395, 396
Cohen	Théorie des nombres	351
V. Cristescu	Culegere de probleme de trigonometrie	34, 189
Eddington	Espace, temps et gravité	564
F. Domşa	Geometria desemnativă	506
F. G. M.	Exercices de géometrie	397, 475
Felbinger	Anleitung zur Rechenkunst	502
Gh. Em. Filipescu	Statica construcţiunilor şi rezistenţa materialelor	395
H. Galbrun	Introduction à la theorie de la rélativité, calcul différentiel absolu et géometrique	564
J. Hadamard	Leçons sur le calcul des variations	564
Fitz Patrick	Arithmétique	397
Fitz Patrick	Exercices d'Artihmétique	143
R. V. Gagnus şi I. O. Gurviţ	Curs de geometrie	297
Gh. Th. Gheorghiu	Probleme de analiză	128
Al. Grama	Explicarea mecanică modernă a naturii şi credinţa în Dumnezeu	505
J. Haag	Exercices du cours de mathématiques spéciales	129
I. Hossu	Geometria desemnativă	505
I. Hossu	Planimetria constructivă	505
I. Hossu	Stereometria desemnativă	505
I. Hossu şi E. Viciu	Geometria, Traducere	505
P. P. Iacob	Elementa Arithmeticae numericae	501
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de algebră	312, 396, 397
I. Ionescu	ANDRÉE-MARIE AMPÈRE	396
I. Ionescu	Beton armat	395, 396
I. Ionescu	Comparaţia rădăcinilor ecuaţiilor de gradul II	395
I. Ionescu	Culegere de probleme de aritmetică	397
I. Ionescu	Génie civil	395
I. Ionescu	Geometrografia	396
I. Ionescu	GH. EM. FILIPESCU	396
I. Ionescu	ISAC NEWTON	395
I. Ionescu	Istoria învăţământului ingineriei	396

Pag.

I. Ionescu . . . . . Lucrările publice la Romani 395
I. Ionescu . . . . . Maxime şi minime geometrice . . 24, 389, 395, 396
I. Ionescu . . . . . Nomografia 396
I. Ionescu . . . . . Reforma calendarului 396
I. Ionescu . . . . . Un nou metod pentru studiul trigonometriei . 395
I. Ionescu . . . . . Viaţa lui EULER 395
G. Juvet . . . . . Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu 564
Th. Klompers . . . . . Traité d'Arithmétique commerciale 395
I. Krannich . . . . . Manual grafic 25
Tr. Lalescu . . . . . Geometria triunghiului 99, 167, 378, 379
Ed. Lucas . . . . . Théorie des nombres . . . 127, 135, 143, 350, 360
I. Mărculeţ . . . . . Manual de aritmetică pentru clasele inferioare. 505
V. Marian . . . . . Elementele lui EUCLID 27, 395
Ch. Michel . . . . . Compléments de géometrie moderne . . . 336, 385
D. Mirescu . . . . . Geometria 30
G. Müller . . . . . Compendium Aritmeticae vulgaris 518
G. Munteanu . . . . . Computul mental şi cu cifre 504
I. F. Negruţiu . . . . . Aritmetică 503
B. Niewenglowski . . . Cours de géométrie analytique 395
G. Papelier . . . . . Exercices de géométrie moderne. 205, 206
G. Polya & G. Szegö. . Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 413, 457
Şt. Pop . . . . . Măsurile metrice 504
I. Popov . . . . . Aritmetică 250
N. S. Popova . . . . . Culegere de probleme şi exerciţii de aritmetică 300
S. Popova . . . . . Manual de aritmetică 250
I. Raţiu . . . . . Dascălii noştrii 500
N. R. Ribchin . . . . . Culegere de probleme de geometrie. . . . 297, 298
N. R. Ribchin . . . . . Trigonometria rectilină 299
Rouché et Comberousse Traité de géométrie 161
N. A. Sapoşnicov, N. C. Valţov . . . . . Culegere de probleme de algebră 298, 299
Gh. Şincai . . . . . Indreptare către aritmetică 502, 503
P. Smith et W. Longley Eléments de mécanique rationnelle 395
J. Spielrein . . . . . Vektorrechnung 490
Al. Stoenescu . . . . . Culegere de probleme de mecanică. Statica . . 397
I. Stoian . . . . . Aritmetica pentru şcolile poporale 504
V. Suciu . . . . . Aritmetica pentru clasa II poporală 506
V. Suciu . . . . . Aritmetica pentru clasa III, IV poporală . . . 506
V. Suciu . . . . . Aritmetică şi geometrie pentru clasa V şi VI poporală 506
V. Suciu & N. F. Negruţiu Aritmetică şi geometrie pentru cl. III poporală 506
Gabriela Ţiţeica şi Al. Stoenescu . . . . . Probleme de calcul vectorial 213

Pag.

G. Țițeica . . . . . Culegere de probleme de geometrie . . . 40, 244
G. Țițeica . . . . . Culegere de probleme de geometrie analitică . 397
E. Viciu . . . . . Algebră 505
G. Vlasa . . . . . Aritmetică 505
G. Vlasa . . . . . Geometrie 505
H. Vuibert . . . . . Relations entre les éléments d'un triangle . . . 99
H. Vuibert . . . . . Problèmes de bacalauréat 151
Wittenbauer & Pöschl . Aufgaben aus der tehnischen Mechanik 395
*** . . . . . Cursu elementaru de algebră 373
*** . . . . . Harta fotografică a cerului 153
*** . . . . . Tabele balistice pentru bombardamentul aerian 31

2 Periodice

Annalles Scientifiques de l'Université de Iassy 108, 208
Anuarul liceului de băieți „*Sf. Vasile cel Mare*", din Blaj 499
Asachi 72
Boletino Matematico 127
Buletinul Centrului de Instrucție al Artileriei Antiaeriene 24
Bulletin de l'Académie royale de Belgique 161,
Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine 528
Compte rendu de l'Académie des Sciences de Paris 108, 305
Curierul matematic 287
Disquisitiones Mathematicae et Physicae 305
Enciklopedie der Mathematischen Wissenschaft 259
Gazeta Matematică 5, 10, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 31, 32, 33, 56, 60, 61, 62, 65, 67, 99, 102, 117, 119, 122, 126, 128, 132, 133, 137, 150, 158, 160, 161, 165, 167, 168, 174, 179, 200, 204, 212, 213, 214, 215, 235, 238, 245, 248, 249, 261, 262, 264, 271, 282, 293, 300, 311, 312, 313, 316, 322, 324, 325, 327, 355, 358, 358, 359, 360, 362, 365, 373, 374, 377, 379, 389, 393, 394, 395, 396, 400, 409, 410, 411, 418, 429, 430, 438, 440, 441, 446, 452, 455, 473, 508, 511, 513, 515, 518, 519, 529, 552, 554, 556, 557, 560, 579.
Gazeta Matematică, Vol. jubilar 395
Gazeta Matematică, Suplimentul cu Exerciții 62
Journal des Savants 295, 414, 531
Jurnalul lui CRELLE 397
Mathésis 441, 476, 510, 511, 579
Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége 441
Monitorul Oastei 507
Numerus 549
Periodico di Matematica 441, 559
Pitagora 41, 49, 101
Pozitiva 441, 559
Revista Aeronauticei și Marinei 24

Pag.

Revista Artileriei 24, 25
Revista Geniului 24
Revista Matematică din Timişoara 528, 531

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Problema 5437	56
Problema 4991	152
Pagina 74	152
Problema 5563	152
Problema 5537	152
Pagina 136	200
Problema 5381	248
Problema 5580	248
Pagina 234	344
Pagina 445, Vol. XLVI	440
Pagina 398, 399, 400, 402, 475	536
Problema 5677	584

M. SUPLIMENTE

Burse şi premii din fondurile Societăţii *Gazeta Matematică*. Supliment la Nr. 1 . . . . . 14 pagini
Darea de seamă a mesei comune. Supliment la Nr. 9 . . . . . 6 „

N. PUBLICAŢIUNI INAFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

N. Abramescu . . . . . Lecţiuni elementare de algebră superioară. Ed. 7-a
Elementele lui EUCLID (Cărţile XI-XIII de geometrie în spaţiu, Cartea XIV a lui HYPSICLE şi cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de V MARIAN.
Enunţurile problemelor nerezolvate propuse în anii I-XLIV . . . . 58 pagini
I. IONESCU Maxime şi minime geometrice.
Suplimentul cu Exerciţii. Vol. VIII. 9 numere . . . . . 158 pagnii

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Andarache Ion (5594); *Corbaru A. D.* (5660); *Cubat H. A.* (5530, 605, 48, 60); *Dimitriu Tigran* (5659, 60); *Donţu G. G.* (5605, 98); *Drăghicescu P. P.* (3467, 74, 88, 513, 4788, 5093, 418, 19, 506, 49, 85, 617, 30, 46, 63, E, N, P); *Iacob St. E.* (3768); *Ionescu V. N.* (5654, 60, 74); *Marinescu A. V.* (5660); *Pantelimon C.* (5519, 619); *Popescu Gh. Marin* (3178, 4516, 5437, 77, 504, 43, 94, 632, 44, 48, 49, 54, 59, 69); *Popescu I. Ad.* (5648, 49, P); *Seni Cl.* (5562, 628, 44, 57); *Tănăsescu Gh. V.* (5660); *Wegener E.* (5435, E).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *«Gazetei Matematice»* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 200 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 10 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

Vol. I, II, IV, V, VI (Fasc. I, II, şi III) şi VIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră Superioară* pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia VII . . . . . Lei 160

VI. **Tr. Lalescu,** *Curs de Geometrie Analitică.*
Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 200 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 95

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 190

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea I-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 125

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 120

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 140

XVII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 240

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 160

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 150

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 50 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 100

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 3-9803).

C. 81.860.